Edwaldo Bianchini

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

9º ano

Componente curricular:
MATEMÁTICA

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO. VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
PNLD 2024 - Objeto 1
Código da coleção:
0022 P24 01 00 020 020

MODERNA

Edwaldo Bianchini
Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto,
da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo,
no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

9º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Roberta Stoppe
Preparação de texto: Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Serpentine Pavilion, 2017; Kensington Gardens, Londres, Inglaterra. Desde novembro de 2017 a obra integra o acervo da ILHAM Gallery em Kuala Lumpur, Malásia.
© Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Foto: Jim Stephenson.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração, JSDesign
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Patricia Cordeiro, Roberta Otoni, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

```
    Bianchini, Edwaldo
       Matemática Bianchini : 9º ano: manual do
    professor / Edwaldo Bianchini. -- 10. ed. --
    São Paulo : Moderna, 2022.

       Componente curricular: Matemática.
       ISBN 978-85-16-13576-8

       1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.


22-115269                             CDD-372.7
```

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

O Pavilhão Serpentine, em Londres (Reino Unido), é um espaço dedicado à instalação de uma obra arquitetônica temporária. Em 2017, o arquiteto escolhido para a exposição foi Diébédo Francis Kéré. Sua obra, uma estrutura suspensa de aço coberta por um material transparente, foi inspirada em uma grande árvore de sua cidade natal, em Burkina Fasso, e no sentido de comunidade e de conexão com a natureza de seu povo.

SUMÁRIO

ORIENTAÇÕES GERAIS

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Manual* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material o(a) auxilie a melhor aproveitar e a compreender as diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos quatro livros desta coleção.

Este *Manual* também discute a avaliação da aprendizagem sob a luz de pesquisas em Educação e Educação Matemática e em documentos oficiais. Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na intenção de contribuir para a ampliação de seu conhecimento, sua experiência e atualização.

As características da coleção, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são também expostos e discutidos aqui.

Visão geral da proposta da coleção

Esta coleção tem como principais objetivos servir de apoio ao professor no desenrolar de sua prática didático-pedagógica e oferecer ao estudante um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Com base nos conteúdos indicados para a Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos) e suas especificidades de ensino, a obra procura possibilitar ao estudante a elaboração do conhecimento matemático, visando contribuir para a formação de cidadãos que reflitam e atuem no mundo, e subsidiar o trabalho docente, compartilhando possibilidades de encaminhamento e sugestões de intervenção. Nesse sentido, atribui especial importância ao desenvolvimento de conceitos de maneira precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para aqueles de maior importância.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o estudante a assimilar a totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de esgotar o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas, não apenas visando à revisão, mas à complementação e ao aprofundamento de conteúdos. Acreditamos que, por meio de diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos, o estudante conseguirá apreender seus significados.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo se dá, principalmente, por meio de situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao estudante uma aprendizagem significativa, assim como estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, e informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. Assim, a obra tem por objetivo contribuir para a formação integral do estudante, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de maneira eficaz para a solidificação do conhecimento matemático e com o preparo do exercício da cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na perspectiva mundial da permanente busca por melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade, com vistas a uma **formação integral** e **inclusiva**. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma, de maneira explícita, seu compromisso com a educação integral e reconhece que:

> [...] a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades (BRASIL, 2018, p. 14).
>
> A ideia de educação inclusiva sustenta-se em um movimento mundial de reconhecimento da diversidade humana e da necessidade contemporânea de se constituir uma escola para todos, sem barreiras, na qual a matrícula, a permanência, a aprendizagem e a garantia do processo de escolarização sejam, realmente e sem distinções, para todos (SÃO PAULO, 2019, p. 25).

Na sequência, os conceitos teóricos são trabalhados entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, por atividades de outra natureza em seções especiais. A distribuição das atividades em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao estudante desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas de acordo com o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se aos exercícios convencionais, importantes para formalizar e sistematizar conhecimentos, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento, que contemplam temas abrangendo informações de Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Ciências e Tecnologia.

A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os estudantes a estabelecerem conexões com o mundo em que vivem.

A obra procura trazer atividades que possibilitam a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Elas procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões com mais de uma solução ou cuja solução não existe. Da mesma maneira, há exercícios que estimulam a ação mental, promovendo o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir e desenvolver os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos o auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas, diagramas e fluxogramas que auxiliam a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

Objetivos gerais da coleção

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao estudante o domínio de conteúdos matemáticos que lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social, oportunizando o desenvolvimento do letramento matemático[1].
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas competências e habilidades cognitivas do estudante, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente, garantindo uma formação integral e inclusiva.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

Esses objetivos se justificam à medida que compreendemos que a Matemática desempenha um importante papel no desenvolvimento dos estudantes, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, com aplicações no mundo do trabalho, e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Possibilita, ainda, o trabalho e o relacionamento com as diferentes linguagens, explorando suas estruturas e raciocínios, além de propiciar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e desenvolver hábitos relacionados ao cotidiano escolar.

Fundamentos teórico-metodológicos

Vamos apresentar alguns temas relativos ao ensino de Matemática que norteiam as escolhas curriculares da coleção e se alinham às proposições da BNCC, documento que foi elaborado após ampla consulta a especialistas e à população e que é a referência para a construção dos currículos de toda a rede de ensino, municipal, estadual e federal, em todo o país. Ela traz o conteúdo mínimo a ser desenvolvido em cada etapa da Educação Básica e, para preservar a autonomia das escolas e dos professores, deve ser complementada com a inclusão das especificidades regionais e locais.

A BNCC traz o conjunto das aprendizagens consideradas essenciais que todo estudante deve desenvolver ao longo de sua trajetória escolar no ensino básico. Essas aprendizagens estão apresentadas em forma de competências gerais, competências específicas e habilidades segundo os componentes curriculares ou as áreas do conhecimento para cada etapa do ensino.

A importância de aprender Matemática

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem capaz de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano, o que contribui para a formação integral do estudante.

> O conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p. 265).
>
> Atualmente, é indiscutível a importância da Matemática na formação humana, especialmente por vivermos em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia. Diversas profissões [...] exigem conhecimentos matemáticos e competências básicas para lidar com as mesmas. Além disso, exige-se do cidadão do século XXI habilidades matemáticas essenciais tais como compreensão de gráficos, capacidade de fazer estimativas, de organização do pensamento, tomada consciente de decisões, entre outras, de modo que ele seja capaz de fazer uma leitura de mundo, de encarar desafios e resolver problemas, levantando hipóteses e buscando soluções, além de emitir opinião sobre fatos e fenômenos que emergem da realidade na qual está inserido (PERNAMBUCO, 2019, p. 65).

A palavra **matemática** vem do grego *mathematike*. Em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava "tudo o que se aprende", enquanto **matemático**, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém "disposto a aprender". O verbo **aprender** era originalmente, em grego, *manthanein*; mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação e daí talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

> […] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos […] (NUNES; BRYANT; 1997, p. 105).

A Matemática, portanto, é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio social, promovendo uma formação inclusiva.

---

[1] Segundo a Matriz de Avaliação de Matemática do Pisa 2012 (disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf; acesso em: 2 maio 2022): Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e na validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

Ao construir sua história, o ser humano tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos **conhecimentos matemáticos**, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso. Há, ainda, outros que estão sendo incorporados em razão das necessidades decorrentes das ações cotidianas, como é o caso da Educação Financeira. As novas práticas solicitam a ampliação e o aprofundamento desses conhecimentos.

Até algumas décadas atrás, "saber" Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais, as diretrizes pedagógicas oficiais e, em especial, a BNCC apontam para a necessidade de que em todos os anos da Educação Básica a escola trabalhe conteúdos organizados nas cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**, tendo como referência o desenvolvimento das competências e habilidades descritas pela BNCC.

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. E é responsabilidade também da educação escolar levar o estudante a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversidade e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a maneira de apresentá-los aos estudantes exigem bom preparo didático e pedagógico e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a "validade" dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; nesse caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana, propiciando o desenvolvimento das competências e habilidades para ele exercer a cidadania plena e atuar no mundo.

O pensador Henri Jules Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante.

Diante disso, a coleção procura harmonizar o uso da língua materna com a linguagem matemática, promovendo uma leitura acessível e adequada aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

A Matemática como componente curricular do Ensino Fundamental

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indica a BNCC, decorre também da contribuição que a área representa na formação do cidadão.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos estudantes reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática (BRASIL, 2018, p. 266).

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa área do conhecimento. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e a seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

> Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância (PONTE, 2002).

O fato de a função de promover modos de pensar estar explicitada no currículo e nos programas não é suficiente, contudo, para concretizar essa função.

> O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais. (PONTE, 2002).

Ao discorrer sobre esses papéis, Ponte (2002) analisa em particular a função de filtro social e afirma que "a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática". Isso se dá porque os estudantes passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. O pesquisador enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos estudantes em Matemática. Para ele, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática;
- insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o estudante;
- questões ligadas à formação dos professores.

Em contrapartida, de acordo com a BNCC, podemos destacar que:

> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela tem atravessado um grato momento de revitalização:

> Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade (D'AMBROSIO, 2000).

A BNCC preconiza a inclusão e a discussão de temas contemporâneos, como é o caso dos "direitos da criança e do adolescente" e "educação em direitos humanos":

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas dessa natureza traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais. Esses temas também podem ser abordados de acordo com a necessidade dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio do trabalho com esses temas, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, consequentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância desse trabalho, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Objetivos da formação básica para o Ensino Fundamental

Segundo o Parecer 11/2010 do Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Básica[2] sobre Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos, os objetivos para a formação básica relativos ao Ensino Infantil e Ensino Fundamental são:

> - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
> - a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, das artes, da tecnologia e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
> - a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores como instrumentos para uma visão crítica do mundo;
> - o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os estudantes pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Na organização desta coleção, os conceitos e as atividades foram concebidos e dispostos em uma sequência que garanta a abordagem dos conhecimentos matemáticos relativos aos Anos Finais do Ensino Fundamental, visando à ampliação dos conhecimentos básicos tratados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentando-os em capítulos específicos e, depois, retomando-os e ampliando-os em volumes posteriores. Assim, os estudantes podem resgatar os conhecimentos trabalhados anteriormente, ampliar os conceitos ao longo de seus estudos em Matemática do 6º ao 9º anos e preparar-se para a continuidade no Ensino Médio.

As orientações deste *Manual* pretendem esclarecer intenções, objetivos e concepções das atividades que podem auxiliar o trabalho pedagógico do professor em seus encaminhamentos, intervenções e na ampliação e no enriquecimento de seus conhecimentos matemáticos.

Competências socioemocionais

Nas últimas décadas, a Educação passou a enfatizar abordagens que incluíam outras dimensões do desenvolvimento humano, como a afetiva, a social para além da tradicional ênfase no cognitivo e na aquisição de conhecimento. A educação socioemocional sempre esteve presente no ambiente escolar de diferentes formas, seja na própria cultura escolar ou como suporte para projetos de comportamento positivo. A nova proposta é que essas competências sejam ensinadas propositadamente permitindo aos estudantes oportunidades para praticá-las.

Solidariedade, amizade, responsabilidade, colaboração, empatia, organização, ética, cidadania e honestidade são valores (ou características) que deverão ser ensinados, praticados ou estimulados nas escolas, segundo as diretrizes da BNCC. Esse documento valoriza os estudantes em sua singularidade e diversidade, afirmando que toda criança, jovem ou adolescente deve ter oportunidades para saber ser criativo, analítico-crítico, colaborativo, resiliente, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, entre outras características.

> Compreender o conceito de competências socioemocionais envolve o estudo das emoções. Ao longo da história, as emoções foram abordadas de diferentes perspectivas: da neuropsicologia, da biologia, dos padrões das espécies, da psicopedagogia, da cultura etc. Dentre todas essas abordagens, aquelas voltadas para as competências socioemocionais no contexto escolar são as de interesse nesse texto por abordarem diretamente as novas diretrizes propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a proposta de Educação para o século 21 (proposta pela Unesco) e o ensino integral.

---

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CEB nº11/2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf. Acesso em: 27 maio 2022.

> Na BNCC, as competências socioemocionais estão presentes em todas as 10 competências gerais. Portanto, no Brasil, até 2020, todas as escolas deverão contemplar as competências socioemocionais em seus currículos (BASE, 2022).

Nesta coleção, trabalhamos com essas competências em diferentes momentos, na forma de atividades ou de orientações para o desenvolvimento do trabalho. Ao longo deste *Manual*, você encontrará diferentes orientações que colaboram para esse trabalho. Para ampliar o trabalho com as competências socioemocionais, temos como apropriado considerar os aspectos que caracterizam a adolescência, a diversidade e as culturas juvenis. Com base nesses aspectos, é importante compreender as situações que podem ser recorrentes na escola, como o *bullying*, e, assim, trabalhar temas e contextos que possibilitem promover a saúde mental dos estudantes e a cultura de paz. De maneira geral, discutiremos esses aspectos a seguir e, mais especificamente, retomaremos esses assuntos no decorrer do *Manual* de cada volume da coleção, quando o contexto apresentado for conveniente para se trabalharem esses temas.

Caracterização da adolescência

Segundo o Estatuto da Criança e do Adolescente – Lei nº 8.069/1990: "Considera-se criança, para os efeitos desta Lei, a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade.".

De acordo com a BNCC:

> Os estudantes dessa fase inserem-se em uma faixa etária que corresponde à transição entre infância e adolescência, marcada por intensas mudanças decorrentes de transformações biológicas, psicológicas, sociais e emocionais. [...] ampliam-se os vínculos sociais e os laços afetivos, as possibilidades intelectuais e a capacidade de raciocínios mais abstratos. Os estudantes tornam-se mais capazes de ver e avaliar os fatos pelo ponto de vista do outro, exercendo a capacidade de descentração, "importante na construção da autonomia e na aquisição de valores morais e éticos" (BRASIL, 2010); (BRASIL, 2018, p. 60).

Esta coleção procura uma aproximação com os estudantes dessa fase, seja na linguagem utilizada, seja na escolha de assuntos que possam despertar seu interesse. Um desses momentos pode ser observado nas aberturas dos capítulos, nas quais são apresentadas situações que buscam aguçar a curiosidade dos estudantes para o tema a ser tratado. Além disso, a coleção busca também facilitar a passagem de um ano para outro no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, retomando conceitos, revisitando conhecimentos – como as quatro operações fundamentais e o estudo das figuras geométricas –, ampliando e aprofundando conteúdos com novos aspectos, a fim de que os estudantes se apropriem dos conceitos com a compreensão dos processos neles envolvidos, caso da ampliação do campo numérico (dos números naturais aos números reais).

Diversidade e culturas juvenis

No mundo contemporâneo, um dos principais desafios é aprender a conviver em um ambiente de diversidade, já que muitas vezes as diferenças entre as pessoas não são vistas como algo positivo, dando lugar à discriminação, ao preconceito ou ao reforço de desigualdades.

É importante considerar que os jovens são diferentes em muitos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre tantos outros.

Assim, a escola deve ser o espaço em que essas diversas culturas juvenis se manifestem, se relacionem e se organizem em busca de um objetivo comum. Segundo a BNCC,

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar **uma escola que acolha as diversidades**, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser **protagonistas** de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida** [...] (BRASIL, 2018, p. 463).

A diversidade não pode ser considerada um obstáculo para a convivência, mas o contrário: deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e grupos que formam a sociedade.

> Conforme afirmado na Declaração Universal dos Direitos Humanos, em seu artigo 1º, "Todos os seres humanos nascem livres e iguais em dignidade e em direitos. [...]" (ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS, 1948).

A escola é um espaço formado por uma diversidade de pessoas e deve promover a reflexão sobre diferentes temáticas de modo a desconstruir preconceitos.

Para trabalhar a diversidade, apresente ao estudante o trecho a seguir, da palestra **O perigo de uma história única**, do livro de mesmo nome, da escritora nigeriana Chimamanda Ngozi Adichie. A autora explica em detalhes os problemas causados quando contamos com apenas uma fonte de informações para conhecer a história e a identidade de um povo, enfatizando a necessidade de pesquisar diferentes fontes para compreender outras culturas.

> Anos depois, pensei nisso quando saí da Nigéria para fazer faculdade nos Estados Unidos. Eu tinha dezenove anos. Minha colega de quarto americana ficou chocada comigo. Ela perguntou onde eu tinha aprendido a falar inglês tão bem e ficou confusa quando respondi que a língua oficial da Nigéria era o inglês. Também perguntou se podia ouvir o que chamou de minha "música tribal", e ficou muito decepcionada quando mostrei minha fita da Mariah Carey. Ela também presumiu que eu não sabia como usar um fogão.
>
> O que me impressionou foi: ela já sentia pena de mim antes de me conhecer. Sua postura preestabelecida em relação a mim, como africana, era uma espécie de pena condescendente e bem-intencionada. Minha colega de quarto tinha uma história única da África: uma história única de catástrofe. Naquela história única não havia possibilidade de africanos serem parecidos com ela de nenhuma maneira; não havia possibilidade de qualquer sentimento mais complexo que pena; não havia possibilidade de uma conexão entre dois seres humanos iguais. (ADICHIE, 2009)

Após a apresentação, inicie uma conversa sobre a situação descrita e sobre os fatos serem analisados em uma perspectiva diversa, fundamentada em diversas fontes. Converse sobre o fato de a colega ter uma versão estereotipada da autora e como muitas vezes um grupo de pessoas é julgado como se fosse composto por uma única identidade.

Esse será um momento importante para conversarem sobre a diversidade do grupo e sobre a importância de se respeitarem sem julgamentos prévios. Se considerar adequado, apresente a palestra para os estudantes ou sugira a leitura do livro.

Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes, expressam aspectos das culturas juvenis e possibilitam o convívio com o diferente. Observar os grupos com os quais eles se identificam, ou dos quais fazem parte, contribui para a compreensão de seus modos de agir e, ainda, de seu processo de formação.

Enfim, para construir uma escola inclusiva, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é necessário estabelecer redes de cooperação em que as interações sociais estejam baseadas no respeito mútuo, no companheirismo, na solidariedade e no compartilhamento de experiências e de saberes. O papel do professor na organização dessa rede é fundamental, como mediador desse processo de construção do conhecimento, da identidade, da autonomia e dos projetos de vida, e deve ser desempenhado nas diferentes atividades propostas para serem realizadas em grupos. Ao longo da coleção, os estudantes são instigados a realizar tarefas em grupo ou trocar saberes, momento que pode ser oportuno para trabalhar a diversidade juvenil e propor reflexões sobre cooperação e respeito, promovendo a desconstrução de preconceitos.

● *Bullying*

O termo *bullying* designa um tipo de violência física ou psicológica e tem sido amplamente utilizado em ambientes escolares, para se referir às atitudes hostis, agressivas e mesmo violentas que ocorrem persistentemente nas relações interpessoais de estudantes. A palavra *bullying* tem origem no inglês *bully*, que significa "valentão", "brigão" ou "tirano", e é usada para nomear ações de agressão, intimidação, maus-tratos e ataques ao outro, pautadas em uma relação desigual de poder, para que a vítima se sinta inferiorizada, além de ser muitas vezes excluída socialmente de ambientes aos quais pertence.

Como forma de prevenção, em primeiro lugar os professores devem observar com atenção mudanças apresentadas pelos estudantes, como retraimento excessivo, falta de interesse nas tarefas escolares, ausência frequente às aulas, demonstração de tristeza ou ansiedade, isolamento do grupo, impaciência, baixa autoestima. É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, possibilitem um ambiente acolhedor e estreitem vínculos com os jovens, para que eles possam sentir segurança e recorram a esses adultos quando algo não estiver bem.

Atividades propostas para serem realizadas em grupo podem ser um bom momento para desenvolver o conceito de **empatia** por meio da prática de uma escuta atenta e respeitosa, na qual os estudantes podem falar e ser escutados, e ideias são compartilhadas e podem ser validadas, possibilitando a eles considerar novas maneiras de atuação, fundamentadas na compreensão do ponto de vista do outro.

Sugerimos a seguir uma atividade inicial para trabalhar com o conceito de empatia.

Apresente aos estudantes a definição da palavra *empatia*, conforme consta em dois dicionários:

> **Empatia**
>
> 1. PSICOL Habilidade de imaginar-se no lugar de outra pessoa.
>
> 2. PSICOL Compreensão dos sentimentos, desejos, ideias e ações de outrem.
>
> 3. Qualquer ato de envolvimento emocional em relação a uma pessoa, a um grupo e a uma cultura.
>
> [...]

Fonte: EMPATIA. *In*: MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

> **Empatia**
>
> 1. Psi. Experiência pela qual uma pessoa se identifica com outra, tendendo a compreender o que ela pensa e a sentir o que ela sente, ainda que nenhum dos dois o expressem de modo explícito ou objetivo.
>
> 2. Capacidade de compreensão emocional e estética de um objeto, ger. de arte (um quadro, livro, filme, p. ex.).
>
> 3. Nas inter-relações pessoais e sociais, capacidade de alguém de se ver como os outros o veem, de ver outrem como os outros o veem e também como ele mesmo se vê.

Fonte: EMPATIA. *In*: AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Em seguida, solicite aos estudantes que expressem, verbalmente ou por escrito, situações em que colocamos em prática a empatia. Se possível, peça que deem exemplos de situações em que alguém foi empático com eles ou em que eles aplicaram empatia. Dê oportunidades para que todos possam se manifestar e, do mesmo modo, respeite aqueles que não quiserem falar. Após a conversa, organize a sala em grupos e solicite que cada grupo escreva cinco atitudes que viabilizam a prática de empatia na escola. Depois, com a participação de todos, escolham dez atitudes que consideram mais importantes e confeccionem cartazes sobre o tema para serem anexados em alguns pontos da escola.

● Saúde mental dos estudantes

É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, observem os diferentes sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros.

Muitos desses sinais poderão se manifestar ao longo deste e dos próximos anos como decorrência do impacto da pandemia de Covid-19 na saúde emocional dos estudantes.

Um estudo publicado em 1º de abril de 2022, realizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e pelo Instituto Ayrton Senna[3], revelou que dois de cada três estudantes do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio da rede estadual relatam sintomas de depressão e ansiedade. De acordo com esse estudo:

---

[3] INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

> A avaliação mergulha nos danos severos à educação causados pela pandemia e reforça o desenvolvimento socioemocional como mola propulsora para a aprendizagem e outras conquistas ao longo da vida. A análise dos dados ainda revela a importância direta das competências socioemocionais para o aprendizado e o seu impacto em outros aspectos que afetam a aprendizagem indiretamente, como saúde mental, violência e estratégias de aprendizagem [...].

Prejuízos no desenvolvimento dessas competências podem impactar diversos resultados ao longo da vida dos estudantes. O estudo revelou que características como autogestão, que inclui foco, determinação, organização, persistência e responsabilidade, e amabilidade, que reúne empatia, respeito e confiança, foram afetadas durante a pandemia.

Desenvolver habilidades de autoconhecimento, como o reconhecimento das próprias emoções, para administrar metas e objetivos de maneira mais eficiente, pode ser um recurso valioso nestas situações. O autoconhecimento faz parte das competências socioemocionais e, quando desenvolvido, possibilita ao jovem criar estratégias eficazes para o manejo das emoções nos diferentes contextos sociais dos quais participa.

É possível trabalhar o autoconhecimento em diferentes situações do cotidiano escolar, trabalhando com os estudantes o reconhecimento das próprias emoções, pensamentos, desejos, medos, frustrações, dificuldades e assim por diante. Uma atividade que pode ser praticada em alguns momentos é sugerir aos estudantes que se perguntem "o porquê".

- Por que estou brigando com esse colega?
- Por que esta tarefa me incomoda?
- Por que não gosto deste professor ou deste colega?
- Por que tenho medo de responder oralmente a uma pergunta feita pelo professor?

Ao identificarem as causas de determinados sentimentos ou ações, poderão refletir sobre suas atitudes e, assim, administrar situações futuras que possam prejudicá-los em momentos diversos, na escola ou no convívio social fora dela.

Para ampliar o conhecimento sobre si mesmo, destacam-se as práticas meditativas, em especial o *mindfulness*, ou atenção plena. Trata-se de um exercício compreendido por Leahy como "estado mental particular e intencional que une atenção focada no presente, consciência aberta e memória de si mesmo". Praticado constantemente, auxilia na redução do estresse e da ansiedade, possibilitando maior criatividade, aumento do autocontrole e da resistência emocional, além de maior satisfação ao realizar as atividades do cotidiano.

Cultura de paz

A cultura de paz está relacionada à compreensão dos princípios de liberdade, justiça, democracia, igualdade e solidariedade, proposta em 1999 pela Organização das Nações Unidas (ONU). Envolve um modo de agir e de se posicionar, com base na prática da não violência, por meio da educação, do diálogo e da cooperação.

> Mais do que teoria e prática, a não violência deve ser uma atitude que permeia toda a prática de ensino, envolvendo todos os profissionais de educação e os estudantes da escola, os pais e a comunidade, em um desafio comum e compartilhado. Assim, a não violência integrada confere ao professor outra visão do seu trabalho pedagógico. A escola deve dar lugar ao diálogo e ao compartilhamento, tornando-se um centro para a vida cívica na comunidade.
>
> Para obter um impacto real, a educação sem violência deve ser um projeto de toda a escola, o qual deve ser planejado, integrado em todos os aspectos do currículo escolar, na pedagogia e nas atividades, envolvendo todos os professores e profissionais da escola, assim como toda a estrutura organizacional da equipe de tomada das decisões educacionais. As práticas de não violência devem ser coerentes e devem estar refletidas nas regras e na utilização das instalações da escola.
>
> Vista pelo ângulo da não violência, a educação ajuda a:
>
> - aprender sobre as nossas responsabilidades e obrigações, bem como os nossos direitos;
> - aprender a viver juntos, respeitando as nossas diferenças e similaridades;
> - desenvolver o aprendizado com base na cooperação, no diálogo e na compreensão intercultural;
> - ajudar as crianças a encontrar soluções não violentas para resolverem seus conflitos, experimentarem conflitos utilizando maneiras construtivas de mediação e estratégias de resolução;
> - promover valores e atitudes de não violência – autonomia, responsabilidade, cooperação, criatividade e solidariedade;
> - capacitar estudantes a construírem juntos, com seus colegas, os seus próprios ideais de paz.
>
> (UNESCO, [entre 2017 e 2022]).

Considerada um espaço privilegiado para a convivência com a diversidade e a promoção do diálogo, diante de tudo que foi apresentado, destacamos que a escola precisa oferecer um ambiente de confiança entre os estudantes, professores e gestores. Para tanto, é preciso formar crianças e jovens que atuem com base em princípios éticos e solidários, além de combater as violências que fazem parte de qualquer sociedade. Pautado em valores humanos, o trabalho com as competências socioemocionais precisa ser exercitado diariamente para que se transforme em uma ação concreta. Ao experimentar uma troca possibilitada por meio do diálogo legítimo, em que o estudante pode ouvir os pares e ser escutado, intercambiando pontos de vista e construindo argumentos consistentes e bem fundamentados, ele irá adquirir e vivenciar habilidades essenciais que farão a diferença em sua profissionalização e em sua vida futura.

BNCC e currículos

A BNCC e os currículos estão em concordância com os princípios e valores que norteiam a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Com base nesses documentos, relacionam-se algumas ações que visam adequar suas proposições à realidade dos sistemas ou redes de ensino e das instituições escolares, considerando o contexto e as características dos estudantes:

> - contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
> - decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência

pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

- selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de estudantes, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os estudantes nas aprendizagens;
- construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes;
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;
- manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino.

(BRASIL, 2018, p. 16-7).

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe o desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois, como expusemos anteriormente, é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 **competências gerais** para a Educação Básica e 8 **competências específicas** para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

COMPETÊNCIAS GERAIS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. **2.** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural. **4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. **5.** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. **6.** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. **7.** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. **8.** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. **10.** Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	**1.** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. **2.** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. **3.** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. **4.** Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. **5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. **6.** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). **7.** Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. **8.** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Ao longo dos conteúdos, são oferecidas diferentes oportunidades para o estudante interpretar, refletir, analisar, discutir, elaborar hipóteses, argumentar, concluir e expor resultados de diversas maneiras, contribuindo para o desenvolvimento das competências. Esse trabalho é realizado em vários momentos da coleção, como nas seções **Diversificando** e **Trabalhando a informação**.

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, **Unidades Temáticas** organizam diferentes **objetos de conhecimento** que, por sua vez, propõem um conjunto de **habilidades** a serem trabalhadas com os estudantes.

Unidades Temáticas

De acordo com a BNCC:

> Ao longo do **Ensino Fundamental – Anos Finais**, os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, **retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas**, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes. Nesse sentido, também é importante **fortalecer a autonomia** desses adolescentes, oferecendo-lhes condições e ferramentas para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação (BRASIL, 2018, p. 60).

A BNCC propõe cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**. Dessa forma, procura garantir o trabalho com a variedade de conhecimentos matemáticos ao longo do ano e orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: **equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação**. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268).

A proposta presente nesta coleção, aliada ao trabalho do professor em sala de aula, propicia a articulação das diferentes Unidades Temáticas, estabelecendo conexões entre elas e as outras áreas do conhecimento. Faremos a indicação dessas articulações ao longo deste *Manual*.

Apresentamos, a seguir, as principais ideias relacionadas a cada Unidade Temática que nortearam a organização da coleção, destacando alguns pontos em que contribuímos para o desenvolvimento das competências específicas da Matemática. Ressaltamos que os pontos apresentados são exemplos de trabalho, mas, ao longo de toda a coleção, contemplamos as 8 competências específicas de modo a favorecer o desenvolvimento dos estudantes no estudo da Matemática.

Números

As noções matemáticas fundamentais vinculadas a essa Unidade Temática são as ideias de número, operações, aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem.

Nos anos finais do Ensino Fundamental são trabalhados diferentes campos numéricos, de modo que os estudantes resolvam problemas com números naturais, números inteiros e números racionais, envolvendo as operações e fazendo uso de estratégias diversas, reconheçam a necessidade dos números irracionais e tomem contato com os números reais, comparando, ordenando e relacionando esses números com pontos na reta numérica, envolvendo a valorização do raciocínio estruturado de modo a favorecer o desenvolvimento da **competência específica 2**.

Também recorremos à história da Matemática em diferentes momentos, como no trabalho com os diferentes sistemas de numeração ou com números irracionais, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica 1**, que está relacionada com o processo de reconhecer a Matemática como uma ciência viva, relacionada a diferentes culturas e a diferentes momentos históricos. Espera-se também que os estudantes dominem cálculos com porcentagens, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**, que propõe o uso de diferentes ferramentas, entre elas os recursos tecnológicos. O pensamento numérico se completa, é ampliado e aprofundado com a discussão de situações que envolvem conteúdos das demais Unidades Temáticas, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, que propõe aos estudantes a compreensão entre as relações dos conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática.

Outro aspecto que se quer desenvolver nessa Unidade Temática é o estudo de conceitos ligados à educação financeira dos estudantes, como conceitos básicos de economia e finanças, temáticas que estão diretamente ligadas à **competência específica 7**, pois permitem compreender diferentes questões relacionadas ao contexto social.

Álgebra

O foco dessa Unidade Temática é o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial na compreensão, na representação e na análise da variação de grandezas e também no estudo das estruturas matemáticas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 2**, que propõe o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos, habilidades que estão intimamente ligadas ao estudo da Álgebra. Nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam a identificação de regularidades e padrões em sequências (numéricas ou não) e o estabelecimento de leis matemáticas que expressem a interdependência entre grandezas e generalizações. Espera-se que os estudantes criem, interpretem e transitem entre as diversas representações gráficas e simbólicas para resolver equações e inequações, desenvolvidas para representar e solucionar algum tipo de problema, o que contribui para o desenvolvimento das **competências específicas 5 e 6**. É necessário que o estudante estabeleça conexões entre variável e função e entre incógnita e equação.

As ideias matemáticas fundamentais que os estudantes precisam desenvolver nessa Unidade Temática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. O raciocínio proporcional envolve diferentes processos mentais, como analisar, estabelecer relações e comparação entre grandezas e quantidades, proporcionando uma melhor compreensão das relações multiplicativas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 3**.

Além disso, a aprendizagem da Álgebra, assim como as de outros campos da Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se, assim, a importância da presença de algoritmos e fluxogramas como objetos de estudo nas aulas de Matemática nessa fase do aprendizado.

Geometria

O desenvolvimento do pensamento geométrico, necessário para avançar nas habilidades de investigação de propriedades, elaboração de conjecturas e produção de argumentos geométricos convincentes, está ligado ao estudo da posição e dos deslocamentos no espaço, das formas de figuras geométricas e relação entre seus elementos, temas dessa Unidade Temática, que contribuem para o desenvolvimento da **competência específica 2**. Além disso, o aspecto funcional também deve estar presente por meio do estudo das transformações geométricas, em especial a simetria, com ou sem o recurso de *softwares* de Geometria dinâmica, favorecendo o trabalho com a **competência específica 5**.

Estão associadas a essa Unidade Temática as seguintes ideias matemáticas fundamentais: construção, representação e interdependência.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria deve consolidar e ampliar os conhecimentos construídos anteriormente – enfatizando-se a análise e a produção de transformações, ampliações e reduções de figuras geométricas – para o desenvolvimento dos conceitos de congruência e semelhança. O raciocínio hipotético-dedutivo é outro ponto importante a se destacar; a realização de demonstrações simples pode contribuir para a construção desse tipo de raciocínio. Além disso, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, a articulação da Geometria com a Álgebra também deve ser ampliada com propostas que envolvam o plano cartesiano, objeto de estudo da Geometria analítica.

Grandezas e medidas

O estudo das medidas e das relações entre elas é o foco dessa Unidade Temática. Os anos finais do Ensino Fundamental devem retomar, aprofundar e ampliar as aprendizagens já realizadas. O estudo das relações métricas favorece a integração da Matemática com diversas áreas do conhecimento, assim como a articulação com as demais Unidades Temáticas, consolidando e ampliando a noção de número e promovendo a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico, favorecendo o trabalho com a **competência específica 3**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes reconheçam comprimento, área e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas, resolvam problemas com essas grandezas e obtenham grandezas derivadas, como densidade e velocidade. Além disso, deve-se introduzir medidas de capacidade de armazenamento de computadores ligadas a demandas da sociedade moderna, ressaltando-se o caráter não decimal das relações entre elas. Trabalhando com essas grandezas é possível trabalhar o uso da Matemática em diferentes contextos sociais, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Probabilidade e estatística

O intuito dessa Unidade Temática é desenvolver habilidades necessárias para o exercício pleno da cidadania: coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados; descrever, explicar e predizer fenômenos com base em conceitos e representações. Desse modo, esse trabalho favorece o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, em Estatística espera-se que cada estudante seja capaz de planejar e elaborar relatórios com base em pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central, construir tabelas e tipos variados de gráfico, o que favorece o trabalho com a **competência específica 4**.

Quanto ao estudo de Probabilidade, deve ser ampliado e aprofundado. Espera-se que os estudantes façam experimentos aleatórios e simulações para aplicar ou comparar resultados obtidos com o cálculo de probabilidades.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino – que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens a atuar de forma positiva na sociedade – alinhadas à proposta da coleção e auxiliadoras do trabalho em sala de aula.

Conhecimentos prévios

Ao passar de um ano para outro de escolaridade, o estudante traz experiências pessoais, interpretações e conhecimentos acumulados sobre os conteúdos e temas tratados no ano anterior. Torna-se relevante considerar essa bagagem no processo de aprendizagem de modo a fazer com que o estudante seja protagonista no processo de aprendizagem. Há algum tempo, pesquisas na área da educação reforçam a importância de considerar os conhecimentos prévios como forma de tornar a aprendizagem mais significativa.

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos estudantes, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 298).
>
> Esses conhecimentos, embora pouco elaborados cientificamente, são construídos pelos estudantes a partir do nascimento, acompanhando-os na vida escolar, onde os conceitos científicos são inseridos sistematicamente em sala de aula. Ausubel (2003) refere-se aos conhecimentos prévios como sendo aquelas ideias, percepções ou explicações funcionais para os objetos e fenômenos, muitas vezes pouco elaborados, diferentemente dos saberes científicos apresentados pela escola. Freire (1996) evidencia os conhecimentos prévios como a base inicial para progressão, sendo as interpretações e representações do senso comum, motores da curiosidade ingênua que poderá vir a ser curiosidade gnosiológica e base de sustentação e progressão para o conhecimento apurado, científico.
>
> Embora a ideia sobre identificar os conhecimentos prévios dos estudantes possa parecer simples, as suas implicações são complexas. O que um ser humano sabe pertence a sua estrutura cognitiva e é de natureza idiossincrática. Isso significa que não é um processo simples, o de descobrir as percepções do estudante

> e aproveitá-las. No entanto, é possível encontrar indícios. Para isso, faz-se necessário buscar o conhecimento prévio em forma de linguagem falada, escrita ou por meio de símbolos. O fato é que subestimar as experiências pessoais dos estudantes seria um erro por parte dos professores, uma vez que a educação ocorre a partir e através da sua própria experiência (UJIIE, 2017).

Em diferentes momentos desta coleção, é possível criar oportunidades para este levantamento, como nas aberturas de cada capítulo, em que, por meio da análise do texto e da imagem e da resolução das questões, é possível fazer com que os estudantes compartilhem suas experiências pessoais e conhecimentos relacionados ao conteúdo que será estudado, tornando a aprendizagem significativa.

Resolução de problemas e compreensão leitora

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o problema matemático deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao estudante. Ele possibilita a mobilização dos conteúdos estudados em busca de soluções e, sobretudo, abre espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

Um problema matemático é visto como uma situação desafiadora que tem significado para o estudante e se define como tal não por sua forma, mas sim por sua relação com os saberes e o nível de conhecimento do estudante que deve pensar sobre ele.

Na resolução de problemas, é importante que o estudante:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros estudantes;
- valide seus procedimentos.

Nas aulas de Matemática, também é necessário fazer um trabalho voltado para a linguagem matemática e suas especificidades, muito além da aprendizagem de leitura dos enunciados dos problemas propostos. Para isso, deve-se estabelecer um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática, solicitando aos estudantes que, além de explicarem oralmente a resolução, escrevam sobre o percurso mental que realizaram para chegar a ela. Em seguida, em duplas, um estudante lê o texto do outro e ambos sugerem propostas para melhorá-los.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, elaboração de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura e verbalizar com a turma todo esse percurso.

Nesta coleção, procuramos diversificar as atividades e propor problemas variados, distribuídos entre os capítulos e, em especial, nas seções **Pense mais um pouco...** e **Diversificando**.

Uso de tecnologias

Os estudantes estão inseridos na era digital e fazem uso frequente de tecnologia. Assim, a escola não pode ignorar esses importantes recursos e precisa trazê-los para a educação escolar. Para isso, o professor precisa se apropriar dessas ferramentas de modo que possa identificar tipos de *software* e formas de utilizá-los com os estudantes. Vamos destacar a calculadora e o uso de *softwares* e aplicativos, entre as diversas possibilidades.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo a contribuir para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

O uso da calculadora é sugerido na coleção como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é, sem dúvida, uma das mais simples e de menor custo. Ela pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- é um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses;
- é um facilitador da verificação e da análise de resultados e procedimentos;
- sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o professor verifique o conhecimento que os estudantes têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada estudante, pode-se trabalhar em duplas ou de outra forma a critério do professor.

As atividades sugeridas pressupõem um uso simples da calculadora, o que poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e os interesses de cada turma.

Outra possibilidade de aprofundar os conhecimentos matemáticos com o auxílio de tecnologia é o uso de *softwares* e aplicativos, conforme a disponibilidade da escola. Por exemplo, no campo geométrico, *softwares* de geometria dinâmica permitem a construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, a investigação e a verificação de propriedades geométricas, entre outras possibilidades.

O uso consciente da internet também deve fazer parte da educação escolar. É importante que os estudantes saibam fazer pesquisas em ambientes confiáveis como também se proteger de notícias falsas ou de outros perigos presentes nos ambientes virtuais. Cabe aos professores e à comunidade escolar fazer com que a inclusão digital desempenhe um papel significativo no processo de aprendizagem, pois ela procura formar cidadãos com capacidade de interagir com outros e compartilhar decisões/informações que propiciem a lógica da informação a serviço da interatividade.

Pensamento computacional

A BNCC propõe trabalhar o pensamento computacional por meio da Álgebra. Quando os estudantes interpretam e elaboram algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, eles podem desenvolvê-los, ao ser "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos".

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir:

- **Decomposição:** consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- **Reconhecimento de padrões:** ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- **Abstração:** no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- **Algoritmo:** a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante destacar que nem todos os pilares precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar pensamento computacional sem fazer uso de um computador.

Trabalho em grupo e o convívio social

Quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento de competências que visam à interação e à participação sociais, o trabalho em grupo auxilia no desenvolvimento de competências que dependem do confronto e da partilha de ideias, pois oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento da evolução de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, o qual apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho desenvolvido de maneira coletiva, pela interação entre diferentes formas de pensar.

> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras (COHEN; LOTAN, 2017).

De qualquer modo, reforçamos que o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitados os diferentes tipos de aprendiz. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

A organização da turma é parte essencial para o sucesso do desenvolvimento do trabalho com os estudantes. Para cada proposta pedagógica, haverá alguma escolha metodológica mais adequada e, junto a essa escolha, a necessidade de organização dos estudantes em sala de aula: trabalhos individuais, em duplas, em pequenos grupos ou em estações de trabalho, por exemplo. Consideramos apropriado descartar a ideia de que uma boa aula é aquela em que os estudantes devem permanecer sentados enfileirados, sem conversas entre os integrantes de uma mesma turma, com uma fala expositiva por parte do professor. Hoje, sabemos que esse tipo de organização constante acaba por dificultar a relação do estudante com os conceitos apresentados e não promove a interação, a busca por diálogo na aprendizagem, muito menos as trocas entre pares possíveis, tão essenciais para desenvolverem competências que visam à empatia e à cooperação, por exemplo.

É necessário considerarmos que a compreensão dos conceitos por parte da turma passa pela observação da dinâmica de aprendizagem em sala; alguns estudantes assimilam melhor em momentos em que escutam sobre determinado tema, outros em situações que proporcionem debates com os colegas sobre o que estão estudando ou, ainda, outros que precisam de uma boa visualização, em esquemas, dos conteúdos ou resoluções dos problemas apresentados. Tornar a sala de aula um ambiente plural e dinâmico, para que todos os estudantes de diferentes perfis possam vivenciar experiências diversas, torna-se crucial para o desenvolvimento da turma como um todo.

Outro fator importante para favorecer a aprendizagem é a promoção da autonomia do estudante no processo de aprendizagem. Essa é uma perspectiva que a BNCC salienta e que está destacada nas competências gerais, principalmente naquelas em que se preza pelo desenvolvimento da autonomia, empatia e cooperação. São elementos que, quando favorecidos no desenvolvimento, proporcionam ganhos na aprendizagem de toda a turma.

Sabendo que cada estudante desenvolve competências e habilidades com mais facilidade usando estratégias diferentes, uma proposta que favorece essa construção é o chamado **painel de soluções**, em que o professor promove um momento de socialização das estratégias de resolução utilizadas pela turma, para que todos possam discutir suas vantagens e desvantagens, verificando similaridades e diferenças, identificando possíveis erros e aprendendo com eles, já que esse é um movimento de grande auxílio para o desenvolvimento autônomo dos estudantes. Para que a turma seja encorajada a construir essa postura, é importante que as tarefas propostas sejam analisadas e discutidas constantemente, problematizando o que é relevante para a aprendizagem.

Para o desenvolvimento de atividades, o professor pode optar por trabalhar com a turma organizada em duplas predefinidas, por exemplo, para que os estudantes com diferentes graus de compreensão sobre determinado assunto possam se ajudar ao trabalharem juntos para resolver as atividades propostas. Quando há auxílio entre pares, a compreensão do que é estudado ganha uma conotação diferente do que quando o professor intervém no processo de aprendizagem. A proximidade de linguagem entre os colegas de turma favorece a construção da aprendizagem nesta faixa etária.

Seguindo a ideia da troca entre pares, o professor pode organizar a turma em grupos, criando dinâmicas de trabalho que favoreçam a autonomia dos estudantes, ao mesmo tempo que haja a necessidade de colaborar uns com os outros para resolver problemas, formular hipóteses, construir e trocar estratégias de resolução, pensando juntos sobre possibilidades de ação. Os grupos de trabalho podem ser organizados para a resolução de problemas, criando sistemas *gamificados* de pontuação, ranqueando a turma ou ainda pensando em trabalhos por estações, em que os grupos se revezam no desenvolvimento de diferentes atividades. Nessa última proposta, é importante promover um momento de discussão entre os estudantes sobre as dificuldades encontradas, as estratégias de resolução e as aprendizagens, que, quando compartilhadas, ampliam o leque de possibilidades de caminhos para a solução de problemas para toda a turma. Essas estratégias de trabalho em grupos podem favorecer, ainda, o desenvolvimento das atividades em turmas com um número grande de alunos.

Trabalhar em grupo demanda socialização, parte importante do desenvolvimento dos estudantes em relação à vida em sociedade. Conviver é um ato constante, principalmente no ambiente escolar, e, por mais que a individualidade seja respeitada, respeitar regras se torna uma ação que permite que a vida em sociedade possa se tornar mais organizada. Assim, o propósito das ações em grupo é o aprendizado, tornando o envolvimento e o papel de cada participante deste trabalho parte integrante e articulada com os demais para que as habilidades envolvidas sejam desenvolvidas por todos. Delegar funções para os estudantes nos seus respectivos grupos, deixando cada um responsável por uma ação (distribuidor de tarefas, controlador do tempo, redator etc.), revezando as funções de um momento para o outro. Quando os estudantes estão próximos uns dos outros, damos a oportunidade para que as trocas aconteçam.

A interdisciplinaridade e os Temas Contemporâneos Transversais

Para o desenvolvimento da **competência geral 2**, que propõe exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, com base nos conhecimentos das diferentes áreas, é necessário propor, em diferentes momentos da vida escolar, um trabalho interdisciplinar. A interdisciplinaridade propicia aos estudantes que realizem conexões entre as áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares, bem como demonstrem criatividade, ampliem a atenção a problemas do entorno e outros, despertando a atenção e levando a uma maior compreensão dos objetos de conhecimento.

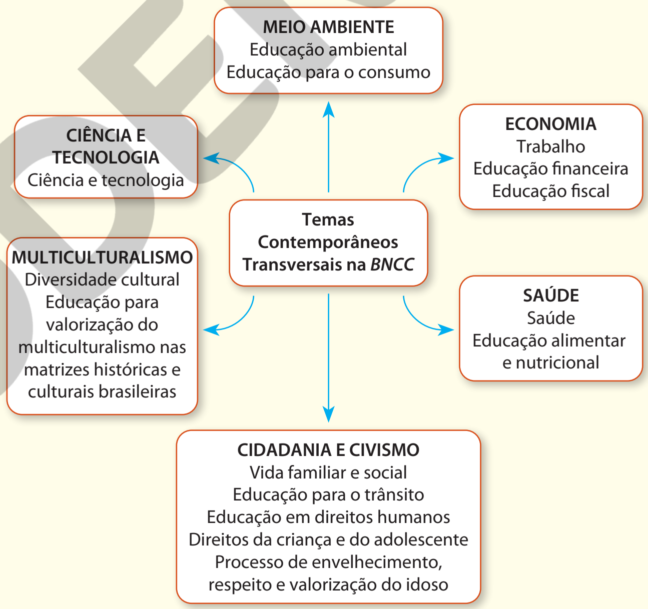
O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais,

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...] (BRASIL, 2013).

Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos. A BNCC destaca a sua importância quando afirma que:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação* selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Avaliação

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão sobre metodologias e práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos trouxe à tona pontos vitais para o surgimento de novas formas de pensar a educação: as concepções de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Pavanello e Nogueira:

> Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus estudantes está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao estudante, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.
>
> […] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 36-7).

As divergências, contudo, têm início quando se pretende redefinir a avaliação escolar e os modos e graus de exigência desse processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da Educação Matemática, o que vigorou foi a chamada avaliação informativa:

> Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do "certo ou errado" (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36).

Alguns autores também concordam que, mesmo na avaliação tradicional, há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do estudante.

> De fato, estudos têm mostrado que uma tarefa de avaliação, assim como uma tarefa de aprendizagem, deve envolver conhecimento significativo de matemática; permitir ser resolvida por vários caminhos; incentivar a comunicação por parte dos estudantes; e solicitar alguma análise crítica. Além disso, o processo de avaliação em matemática deveria evidenciar, pelo menos:
>
> - as escolhas feitas pelo estudante, na busca em lidar com a situação;
> - a capacidade do estudante em se comunicar matematicamente, comprovando sua capacidade em expressar ideias matemáticas, oralmente ou por escrito, presentes no procedimento que utilizou para lidar com a situação proposta;
> - os conhecimentos matemáticos que utilizou;
> - o modo como interpretou sua resolução para dar resposta.
>
> Assim, a avaliação em matemática deixaria para trás a memorização e a repetição para ir em direção a problemas de investigação (BURIASCO, 2002, p. 262-263).

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre **avaliação como processo**, **ação contínua**. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

A BNCC também preconiza uma avaliação formativa:

> [...] construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes; [...] (BRASIL, 2018, p. 17).

Os instrumentos de avaliação (provas, trabalhos, registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da modificação das práticas pedagógicas tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira (2006):

> É preciso reconhecer […] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante […]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p. 155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:
>
> - o interesse com que o estudante se entrega às atividades matemáticas;

> - a confiança que tem em suas possibilidades;
> - sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;
> - se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;
> - se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;
> - se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;
> - se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e
> - se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.
>
> No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo estudante, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9).

Afinal, o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, atitudes?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar**, **o que olhar** e **como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversificados instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus estudantes.

Desse modo, as avaliações precisam ser planejadas, assim como qualquer situação de ensino. É fundamental estar sempre atento ao processo de avaliação sem perder de vista os objetivos e as expectativas para cada ano escolar. Portanto, durante o uso de instrumentos avaliativos, é importante considerar as habilidades propostas nos documentos curriculares e nos planos de ensino e os trabalhados na coleção.

Diante das diferentes concepções sobre como avaliar e com base nas ideias que a coleção assume, entendemos que a avaliação deve ser um processo contínuo durante o ano letivo, e não apenas momentos estanques, como ao final de cada bimestre, de modo que o desenvolvimento dos estudantes seja acompanhado pelo professor e por ele próprio, e que intervenções possam ser feitas ao longo do caminho.

A organização da coleção em capítulos e o bloco de **Exercícios complementares**, a seção **Verificando** e a seção **Organizando** podem ser indicativos ou funcionar como ferramentas iniciais para a construção de momentos avaliativos.

Porém, ressalta-se a importância de complementar as atividades do livro com outros instrumentos para acompanhar os estudantes em seu processo de aprendizagem.

Desse modo, destacam-se a seguir elementos a se considerar no processo avaliativo:

- o caráter processual, formativo e participativo da avaliação e sua forma contínua, cumulativa e diagnóstica;
- a avaliação como oportunidade para professor e estudante refletirem e ajustarem o desempenho;
- as diferentes estratégias e oportunidades para avaliação, não deixando de considerá-las também situações de aprendizagem;
- a importância de registros constantes dos avanços e dificuldades de observação e acompanhamento diário;
- diferentes propostas de avaliação de aprendizagem coerentes com visões atuais de avaliação (mediadora e dialógica, diagnóstica e formativa);
- instrumentos para registros, como relatórios, portfólios, tabelas, fichas, entre outros com critérios para avaliação.

Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Ao diversificar os instrumentos de avaliação e autoavaliação, o professor pode produzir momentos de aprendizagem e atender o maior número de estudantes do grupo. Como sugestão, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

Autoavaliação: em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os estudantes a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os estudantes devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.

Prova em grupo seguida de prova individual: nesta modalidade, as questões são resolvidas em grupo, e, em seguida, cada estudante resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o estudante tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.

Testes-relâmpago: os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os estudantes mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Esse recurso, além de manter os estudantes atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.

Testes e/ou provas cumulativas: este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os estudantes percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

Testes em duas fases: este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:

1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;

2ª) os estudantes refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.

O sucesso desse instrumento depende de alguns fatores, como:

- a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;
- o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;
- a consciência, por parte dos estudantes, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.

As questões devem ser de dois tipos:

- as que requerem interpretação ou justificação, e problemas de resolução relativamente breve;
- as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.

Resolução de problemas: chamamos de "problema matemático" aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:

- a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);
- a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);
- a identificação do problema e a seleção e a mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários para sua resolução;
- a avaliação do processo para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;
- a interpretação e a verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e sua validade.

Mapa conceitual: durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos estudantes que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e trabalhado em aula. Este tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.

Trabalho em grupo: para que os estudantes trabalhem de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os estudantes a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.

Diálogos criativos: a proposta é que os estudantes produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.

Histórias em quadrinhos: nesta modalidade, os estudantes criam histórias em quadrinhos para abordar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos estudantes em contextos diversificados.

Seminários e exposições: são atividades que oferecem oportunidade para os estudantes organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos trabalhados em aula, além de promover a desinibição e a autonomia dos estudantes.

Portfólios: são coletâneas dos melhores trabalhos, que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao "erro" nas atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

> Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no estudante um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37).

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Sejam quais forem os instrumentos utilizados, é fundamental que o professor estabeleça critérios de avaliação da aprendizagem matemática dos estudantes para cada ano escolar, tomando como referência as habilidades de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Desse modo, os objetivos de aprendizagem destacados no planejamento do professor precisam ser explicitados para o estudante, para que ele compreenda aonde se quer chegar, tomando o cuidado de usar uma linguagem compatível com o seu entendimento.

Nas **Orientações específicas** de cada volume, indicamos materiais que podem subsidiar o trabalho docente. Para cada ano escolar, serão indicadas atividades comentadas relacionadas às habilidades do ano anterior e que podem compor avaliações diagnósticas. Essas atividades estão organizadas na seção **Avaliação diagnóstica**.

Além disso, sugerimos que os exercícios das seções **Verificando** de cada capítulo sejam utilizados com a finalidade de preparar os estudantes para avaliações e exames externos, de larga escala.

Uma prática de avaliação formativa também deve ser realizada com a participação dos estudantes em relação ao próprio desempenho. A autorreflexão leva ao compartilhamento, com os professores e demais envolvidos no processo educacional, da responsabilidade pela própria aprendizagem. Analisar rotineiramente aspectos como avanços e fragilidades no desempenho leva à superação de dificuldades e ao compromisso com decisões futuras para aprimoramentos. Todos os itens devem ser previamente combinados com os estudantes e, posteriormente, discutidos em entrevista pessoal. Dessa maneira, sugerimos que uma das utilizações das questões da seção **Organizando**, disponibilizada ao final de cada capítulo, seja utilizada como uma maneira de possibilitar a autoavaliação dos estudantes em relação aos conteúdos de cada capítulo. Também indicamos, a seguir, um modelo de autoavaliação que poderá ser adaptado pelo professor, de acordo com a necessidade de cada etapa do processo de ensino que pretende utilizar, seja no início ou no fim de cada bimestre ou ao final do trabalho com o conteúdo de um capítulo, por exemplo.

AUTOAVALIAÇÃO

Avalie seu desempenho educacional comentando aspectos positivos e negativos relacionados a cada item.

1. DESEMPENHO EM SALA DE AULA

- Em relação ao domínio do conteúdo:
- Interesse e participação:
- Realização das atividades individuais e em grupo:
- Autonomia:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

2. RELACIONAMENTO

- Com os colegas:
- Com o professor:
- Com a equipe técnica e demais funcionários da instituição:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

3. COMPROMISSO E RESPONSABILIDADE

- Assiduidade:
- Pontualidade nas aulas e na entrega dos trabalhos:
- Material didático:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

Autonomia do professor e a prática docente

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o professor sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo. O modo como o professor usará os recursos que compõem esta coleção depende da teoria que embasa a sua prática pedagógica e de sua experiência em salas de aula diversas e heterogêneas.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos estudantes conta com uma gama de recursos didáticos, como: o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou a realização de feiras, gincanas e exposições.

A gestão da sala de aula também faz parte da autonomia do professor e pode ser um meio de estimular os estudantes a desenvolver responsabilidade pessoal e autodisciplina, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo tanto para o professor como para os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor deve refletir sobre o espaço de que dispõe e sobre a melhor maneira de atingir seus objetivos nesse local, com vistas a uma aula o mais inclusiva possível e com a participação de todos os estudantes.

Além disso, o professor deve considerar os perfis variados dos estudantes e das turmas (que podem ser pequenas ou muito grandes). Para dar conta de atender às diferentes necessidades, é necessário que a equipe docente e a de gestão levem em conta tal diversidade, propondo situações diversificadas que respeitem cada indivíduo.

> Uma questão importante a ser considerada quando se resolve debater sobre a heterogeneidade na escola é reconhecer que há diferentes tipos de heterogeneidade e que o modo de tratar cada um deles é bastante específico. A literatura sobre esse tema remete a, pelo menos, três grandes blocos de heterogeneidades a serem abordadas no debate educacional. Um primeiro tipo diz respeito às diferenças socioeconômicas culturais, religiosas, étnico-raciais, de gênero, de orientação sexual, físicas existentes entre as crianças. Um segundo tipo remete às reflexões sobre a inclusão dos estudantes com deficiências físicas e transtornos de aprendizagem. O terceiro diz respeito à heterogeneidade quanto ao nível de escolaridade, idade, conhecimentos (LEAL; SILVA, 2016).

Já destacamos a importância de se respeitar a diversidade, que deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e os grupos que formam a sociedade.

Para a inclusão das crianças com deficiência, entendemos que as dificuldades são muitas. Nesses casos é preciso um investimento pedagógico, por parte da gestão escolar e do professor, em busca de subsídios teóricos sobre como abordar os conteúdos, atendendo às necessidades específicas de cada tipo de deficiência ou transtorno.

Em relação aos níveis de conhecimento, devemos considerar que diferentes fatores sociais ou individuais podem influenciar, demandando diferentes tipos de ações didáticas. Além disso,

> é preciso compreender que: (1) a heterogeneidade é constitutiva do processo pedagógico e, portanto, estará sempre presente, mas as turmas são constituídas por identidades sociais (homogeneidades), que precisam ser respeitadas, valorizadas e conhecidas; (2) o currículo escolar traz recortes não neutros do que se ensina e se aprende e, portanto, precisa ser objeto de debate com as próprias comunidades. Por outro lado, é preciso reconhecer que, em decorrência das trajetórias sociais e individuais, sempre haverá heterogeneidade quanto aos níveis de conhecimento, que precisam ser tratados na escola, possibilitando que, ao mesmo tempo, os diferentes saberes sejam valorizados, mas que conteúdos fundamentais sejam garantidos a todos, em condições favoráveis de aprendizagem (LEAL; SILVA, 2016).

Uma das ações para se trabalhar com a heterogeneidade em relação ao nível de conhecimento seria mapear os níveis de conhecimentos dos estudantes em relação aos diversos assuntos. Para isso, pode-se propor uma avaliação diagnóstica no início do ano ou no início de cada etapa. Ações desse tipo podem auxiliar a diagnosticar as facilidades e as fragilidades em relação a cada componente curricular ou ao conteúdo a ser trabalhado.

Uma outra proposta é rever o planejamento a cada etapa do ano, seja bimestral ou trimestralmente. Ao fazer essa revisão é possível fazer ajustes que atendam aos diferentes perfis dos estudantes. Planejar, executar, avaliar e replanejar devem ser ações constantes no trabalho escolar. Com as estratégias de planejamento adequadas, pode-se manter o grupo envolvido e organizado, propiciando um trabalho apropriado a todos.

• Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: "O que ensinar?", "Por que ensinar?", "Como ensinar?"…

O desenvolvimento profissional do professor deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como estudante e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários, grupos de estudos, reuniões e encontros com colegas na própria escola.

Para ampliar essa proposta, indicamos algumas de suas publicações, livros e trabalhos científicos que possam contribuir para um aprofundamento do conhecimento do professor e auxiliá-lo na ampliação das atividades propostas no livro.

Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- **Bolema** (Boletim de Educação Matemática) – publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/1050. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Boletins do Gepem** – publicados pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/issue/view/127. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Educação Matemática em Revista** – publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista Brasileira de História da Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática – publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (UFSC). Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Educação e Matemática** e Revista **Quadrante** – publicadas pela Associação de Professores de Matemática de Portugal. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista de História da Educação Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista do Professor de Matemática** (RPM) – publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Zetetiké** – publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Unicamp). Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike. Acesso em: 14 maio 2022.

Referências bibliográficas

ADICHIE, C. N. **O perigo de uma história única**, 2009. Disponível em: <https://www.ted.com/talks/chimamanda_ngozi_adichie_the_danger_of_a_single_story?language=pt-br>. Acesso em: 30 jun. 2022.

Inicialmente divulgada no TED Talk e depois publicada em livro, a palestra relata as experiências da autora nos Estados Unidos e alerta para os riscos de uma visão estreita e estereotipada de mundo.

AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos**: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

David Ausubel apresenta nesse livro uma visão atualizada da sua teoria da aprendizagem, conhecida como **Teoria da Assimilação**. Ausubel defende que o principal processo de aprendizagem significativa é por recepção, e não por descoberta. E, contrariamente a muitos outros autores, argumenta que a aprendizagem significativa por recepção não é um processo passivo. Pelo contrário, é, necessariamente, um processo ativo, que exige ação e reflexão do aprendiz e que é facilitada pela organização cuidadosa das matérias e das experiências de ensino.

BASE Nacional Comum Curricular: educação é a base. **Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao *bullying***. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre como o trabalho com as competências socioemocionais pode servir como um fator de prevenção ao *bullying*, apresentando uma atividade como proposta de trabalho.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CBE nº 11/2010.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental de 9 anos em todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

Documento do Ministério da Educação, em 1998, com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangiam tanto a rede pública, como a rede privada de ensino, conforme o nível de escolaridade dos estudantes.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BURIASCO, R. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista** (UFMG), Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

O artigo é dedicado à apresentação de considerações e reflexões quanto às práticas avaliativas usuais das escolas, às avaliações em larga escala, à avaliação na perspectiva da resolução de Problemas, às diferentes funções da avaliação, à linha de pesquisa da análise de erros e à diretriz para a avaliação, que possam contribuir de fato para uma educação matemática de melhor qualidade.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

O livro explica como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa com base em pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, além de mostrar como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2000.

A proposta dessa obra é a adoção de uma nova postura educacional. Após fazer considerações de caráter geral, abordando aspectos da cognição, da natureza da matemática e questões teóricas da educação, o autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre a matemática.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

O autor aprofunda sua teoria-ética de uma vida voltada para a liberdade, a verdade e a autenticidade dos sujeitos. Reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e educandos.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Ao refletir sobre a possível formatividade da avaliação, o autor pretende permitir aos professores e a todos aqueles que estão envolvidos com a avaliação escolar que vejam o que significa colocar a avaliação a serviço das aprendizagens e como isso pode ser concretamente feito.

INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

O artigo apresenta o resultado de uma pesquisa realizada em 2021 pela Secretaria da Educação e o Instituto Ayrton Senna que revelou os efeitos da pandemia de Covid-19 na saúde mental e socioemocional dos estudantes do estado de São Paulo.

LEAL, T. F.; SÁ, C. F.; SILVA, E. C. N. (org.). **Heterogeneidade, educação e linguagem em contextos do campo e da cidade**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2016.

As autoras fazem uma síntese de diferentes conceitos de heterogeneidade e seus impactos para a educação, com foco na reflexão sobre as escolas do campo e da zona urbana.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2015.

O livro oferece subsídios para ampliar a compreensão sobre o ato de avaliar a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, orientar uma prática mais adequada às suas finalidades. No decorrer de suas páginas, há um movimento constante entre a denúncia de uma situação inadequada e o anúncio de novas possibilidades, uma dialética entre a desconstrução e a reconstrução de conceitos e modos de agir.

MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, 2003.

Nesse artigo, argumenta-se no sentido de mostrar que o processo de constituição da matemática escolar ultrapassa tanto a ideia de transposição didática, regulada pela matemática científica e pelas ciências da educação, quanto a de uma construção totalmente endógena à escola.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

Nesse livro os autores apresentam textos que contribuem para a compreensão a respeito do modo como as crianças trabalham com problemas matemáticos.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**, 10 dez. 1948.

Documento aprovado em 1948, na Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU), é a base da luta universal contra a opressão e a discriminação, defendendo a igualdade e a dignidade das pessoas e reconhecendo que os direitos humanos e as liberdades fundamentais devem ser aplicados a cada cidadão do planeta.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

O objetivo desse texto é discutir a trajetória a ser considerada quando se pensa na avaliação em matemática. Assim, os autores partem da constatação de que há diferentes modos de conceber a matemática, paradigmas que se filiam a sistemas filosóficos existentes desde a Antiguidade. Esses paradigmas, por sua vez, influenciam o fazer matemática, o fazer pedagógico em matemática e, por conseguinte, a avaliação.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino fundamental – área de matemática. Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2019. p. 65.

Documento oficial da Secretaria de Educação e Esportes do estado de Pernambuco que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o estado.

PONTE, J. P. **O ensino da Matemática em Portugal**: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário “O Ensino da Matemática: situação e perspectivas”. Lisboa: CNE, 2002.

O autor revê alguns dos marcos mais salientes do percurso do ensino da Matemática em Portugal, analisando os elementos fundamentais que caracterizam o ensino dessa disciplina como fenômeno social. Também identifica os fatores que, na sua perspectiva, contribuem para a crise no ensino da Matemática e indica caminhos para a sua resolução.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. **Anais**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo.

O presente trabalho discute a utilização do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem.

SÃO PAULO (Município). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade**: ensino fundamental – componente curricular matemática. 2. ed. São Paulo: SME/COPED, 2019. p. 25.

Documento oficial da Secretaria Municipal de Educação do município de São Paulo que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o município.

UJIIE. N. T. *et al*. Os Conhecimentos Prévios de Matemática de Estudantes do Ensino Fundamental: O que é Matemática? De Onde Ela Veio? Como Seria um Mundo sem Matemática? *In*: **ALEXANDRIA**: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 57-73, maio 2017.

Nesse artigo, os autores apresentam os resultados de uma investigação com abordagem quali-quantitativa, realizada com 22 estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Tijucas, Santa Catarina, acerca do tema matemática.

UNESCO. **Cultura de paz no Brasil** [entre 2017 e 2022]. Disponível em: https://pt.unesco.org/fieldoffice/brasilia/expertise/culture-peace. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre a cultura de paz no Brasil, destacando que é fundamental promover e disseminar valores, atitudes e comportamentos que conduzam ao diálogo, à não violência e à aproximação das culturas.

Referências bibliográficas complementares

- BELLEMAIN, P. M. B.; BIBIANO, M. F. A.; SOUZA, C. F. Estudar grandezas e medidas na educação básica. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. vol. 9, n. 1, 2018.

  Esse texto problematiza o ensino de grandezas e medidas na matemática da educação básica e na interface entre matemática e física. Discutem-se o porquê de ensinar grandezas e medidas, as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores no estudo desse campo e alguns caminhos que podem contribuir para a superação dessas dificuldades.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores apresentam exemplos do uso de informática com estudantes e professores para, então, debaterem desde temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa até questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. 2. ed. Itabuna/Ilhéus: Via Litterarum, 2009.

  Esse livro apresenta quatro sequências didáticas para trabalhar de forma objetiva e acessível os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, de acordo com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, da Educação Básica.

- KALEFF, A. M. M. R.; PEREIRA, P. C. (org.). **Educação Matemática**: diferentes olhares e práticas. Curitiba: Appris, 2020.

  Nessa obra os autores tratam de diferentes temáticas, como o ensino de geometria, laboratório de ensino, recursos virtuais, Educação Inclusiva, Etnomatemática, Educação Escolar Indígena, temas que permitem reconhecer ações e a diversidade dos estudantes na sala de aula.

- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores oferecem aos leitores reflexões sobre aspectos da Modelagem e suas relações com a Educação Matemática. Apresentam a trajetória histórica da Modelagem e provocam discussões sobre suas relações, possibilidades e perspectivas em sala de aula, sobre diversos paradigmas educacionais e sobre a formação de professores.

- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores abordam temáticas da História da Matemática, História da Educação Matemática e como essas duas regiões de inquérito podem se relacionar com a Educação Matemática.

- NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Escritas e leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Os autores apresentam diferentes discussões sobre o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática, tais como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados.

- NACARATO, A. M.; GOMES, A. A. M.; GRANDO, R. C. (org.). **Experiências com Geometria na escola básica**: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

  O livro traz narrativas de professores da escola básica, participantes de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, localizado institucionalmente na Universidade São Francisco. O livro traz as experiências de seus participantes, bem como discussões epistemológicas do pensamento geométrico.

- PEREIRA, C. A.; SANDMANN, A. Dificuldades do ensino da álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**. Curitiba: UTFPR, v. 8, n. 17, 2017.

  Nesse artigo os autores apresentam referenciais teóricos que possibilitam uma reflexão acerca das dificuldades existentes no ensino-aprendizagem da Álgebra.

- RODRIGUES, R. S. **Um estudo sobre os efeitos do pensamento computacional na educação**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2017. Campina Grande, 2017.

  O objetivo geral desse trabalho é analisar de forma quantitativa o efeito do Pensamento Computacional desenvolvido pela programação de computadores na capacidade de resolução de problemas e no desempenho de estudantes no ensino básico.

- ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância**: pesquisas contemporâneas. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

  Nessa obra os autores apresentam investigações recentes no campo da Educação Matemática em relação às tecnologias digitais e Educação a Distância, de forma a contribuir com professores de matemática e pesquisadores em Educação Matemática.
- SANTOS, J. G.; MONDINI, F. Um estudo sobre o tratamento formal dos números racionais. **ACTIO**: Docência em Ciências. Curitiba: UTFPR, v. 5, n. 2, 2020.

  O artigo tem por objetivo apresentar um estudo sobre o tratamento formal para alguns conceitos referentes aos números racionais, discutidos a partir de demonstrações. A escolha do tema justifica-se também por sua importância, visto que são as demonstrações matemáticas que fundamentam as teorias desta ciência, garantindo sua validade ou não.
- SILVA, G. T. F.; DÍAZ-URDANETA, S. C. **Ensino da Matemática na Educação Especial**: discussões e propostas. Curitiba: Intersaberes, 2021. (Série Pressupostos da Educação Especial).

  Nessa obra, os autores focam no ensino da Matemática na educação especial, principalmente no que se refere à formação do professor, objetivando apresentar alternativas úteis em sala de aula, como estratégias pedagógicas para o ensino de números, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística na educação especial.
- SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática).

  Nesse livro, o autor aborda uma gama de conceitos cruciais no campo da educação matemática crítica, cenários para investigação e matemática em ação.
- SOUZA, F. C. **Números inteiros e suas operações**: uma proposta de estudo para estudantes do 6º ano com o auxílio de tecnologia. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

  Esse trabalho tem como objetivo verificar como os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, que não tiveram contato formal com os números inteiros e suas operações, mobilizam seus conhecimentos prévios para resolver situações que envolvam esse objeto matemático e se eles poderiam se desenvolver de forma autônoma para a sua compreensão.
- VILLAS BOAS, B. M. F.; SOARES, E. R. M. (org.). **Avaliação das aprendizagens, para as aprendizagens e como aprendizagem**: obra pedagógica do professor. Campinas: Papirus, 2022.

  O livro discorre sobre as três funções da avaliação: formativa, diagnóstica e somativa, destacando a formativa, pelo fato de desenvolver-se ao longo do trabalho pedagógico. Esse processo exige a presença do *feedback*, da avaliação informal encorajadora, o envolvimento dos pais/responsáveis, além de recursos avaliativos variados, como o portfólio, a autoavaliação, a avaliação por colegas e outros.
- WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016.

  Esse artigo, "*Computational Thinking*", de Jeannette Wing, foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico ***Communications of the ACM***, em março de 2006. Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem conhecer para atuar na sociedade moderna.

Apresentação da coleção

Estrutura da obra

A coleção é composta de quatro livros do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do Professor* de cada ano reúne o livro do estudante, as Orientações Gerais, comum a cada um dos volumes da coleção, as Orientações específicas de cada volume e orientações do conteúdo, disponibilizadas página a página. Além disso, contém a resposta de todos os exercícios e atividades.

Cada livro do estudante é organizado em 12 capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos que compõem os objetos de conhecimento descritos na BNCC.

Os capítulos de cada volume são compostos de:

- **Desenvolvimento teórico**

  O desenvolvimento dos conteúdos propostos é acompanhado de diversificação de estratégias. Apresenta-se intercalado com atividades e seções especiais que ampliam e enriquecem o tema estudado.
- **Blocos de exercícios**

  Os exercícios presentes na coleção – distribuídos entre Exercícios propostos, Exercícios complementares e atividades diferenciadas nas seções especiais – possibilitam o trabalho com as Unidades Temáticas e permitem integrações entre elas. Têm o intuito de estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas, além de propor temáticas atuais relevantes à faixa etária.
- **Seções especiais**

Distribuídas ao longo do capítulo, as seções de variados tipos complementam, ampliam e enriquecem o tema tratado e desafiam os estudantes por meio das atividades propostas. Há pelo menos um tipo dessas seções em cada capítulo.

A seguir, apresentamos os principais elementos que compõem os capítulos e descrevemos as seções especiais que aparecem ao longo de cada volume da coleção.

- **Abertura de capítulo**: compreendida por um conjunto de questões, uma imagem e pequeno texto motivadores do tema do capítulo.

- **Exercícios propostos**: aparecem ao longo do desenvolvimento teórico, trabalham aspectos importantes de cada conteúdo de maneira variada. Por exemplo, nos exercícios com indicação **Hora de criar**, os estudantes são convidados a usar criatividade, imaginação, capacidade de argumentação e colaboração trabalhando em duplas ou em grupos.

- **Exercícios complementares**: podem ser trabalhados de diversas maneiras pelo professor, de acordo com suas necessidades didáticas. Podem servir de base para uma discussão em duplas ou em grupos, sintetizar o tema abordado ou ainda ser aproveitados como tarefa extraclasse ou como fonte de exercícios para uma recuperação paralela, entre outras aplicações.
- **Verificando**: ao final de cada capítulo, apresenta um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As questões apresentadas no tópico **Organizando** têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem e reflitam sobre os conceitos estudados.
- Seção **Pense mais um pouco...**: atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos no capítulo, que solicitam do estudante um pensamento mais elaborado, exigindo a criação de estratégias pessoais de resolução.
- Seção **Para saber mais**: conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber ou aos diferentes campos dela própria, como a História da Matemática. Geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, que traz uma proposta de questões relacionadas ao tema exposto.
- Seção **Trabalhando a informação**: são trabalhados conteúdos de Probabilidade e Estatística, como interpretação e construção de tabelas e gráficos e cálculo de probabilidades.
- Seção **Diversificando**: atividades que relacionam o conteúdo trabalhado no capítulo a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

Essa estrutura pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se um entrave para estudantes e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os estudantes, mas permitem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do professor no momento em que ele precisar fazer as adaptações necessárias a cada turma.

Organização geral da obra

No quadro a seguir apresentamos a configuração dos 12 capítulos em cada volume desta coleção:

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1	Números	Números inteiros	Potências e raízes	Números reais
Capítulo 2	Operações com números naturais	Números racionais	Construções geométricas e lugares geométricos	Operações com números reais
Capítulo 3	Estudando figuras geométricas	Operações com números racionais	Estatística e probabilidade	Grandezas proporcionais
Capítulo 4	Divisibilidade	Ângulos	Cálculo algébrico	Proporcionalidade em Geometria
Capítulo 5	Um pouco de Álgebra	Equações	Polinômios e frações algébricas	Semelhança
Capítulo 6	Um pouco de Geometria plana	Inequações	Produtos notáveis e fatoração	Um pouco mais sobre Estatística
Capítulo 7	Números racionais na forma de fração	Sistemas de equações	Estudo dos triângulos	Equações do 2º grau
Capítulo 8	Operações com números racionais na forma de fração	Simetria e ângulos	A Geometria demonstrativa	Triângulo retângulo
Capítulo 9	Números racionais na forma decimal e operações	Razões, proporções e porcentagem	Estudo dos quadriláteros	Razões trigonométricas nos triângulos retângulos
Capítulo 10	Polígonos e poliedros	Estudo dos polígonos	Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	Estudo das funções
Capítulo 11	Comprimentos e áreas	Sobre áreas e volumes	Área de regiões poligonais	Circunferência, arcos e relações métricas
Capítulo 12	Outras unidades de medida	Estudo da circunferência e do círculo	Geometria e grandezas	Polígonos regulares e áreas

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

O livro do 9º ano é composto de doze capítulos em que se desenvolvem as cinco Unidades Temáticas propostas pela BNCC: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística, intercaladas e, sempre que possível, integradas, exploradas no corpo do texto explicativo e nas atividades.

A seguir, apresentamos sugestões de cronogramas para trabalhar com esses conteúdos em bimestre, trimestre e semestre com base nas organizações dos capítulos.

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
1º semestre	1º trimestre	1º bimestre	Capítulo 1 – Números reais	• Números racionais, números irracionais e números reais; • Localização de números irracionais na reta real; • Sequência de Fibonacci e número áureo; • Reconhecimento de que, uma vez escolhida uma unidade de medida de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional; • Aplicação do teorema de Pitágoras na localização de números irracionais na reta real; • Números quadrados perfeitos e o cálculo de raiz quadrada; • Cálculo de raiz quadrada por aproximação; • Resolução e elaboração de problemas envolvendo números reais; • Construção da espiral de Teodoro, Pitágoras ou Einstein; • Verificação experimental do teorema de Pitágoras.	Habilidades: (EF09MA01) (EF09MA02) (EF09MA03) (EF09MA04) (EF09MA21) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 2 – Operações com números reais	• Cálculo com potências de expoentes naturais e inteiros negativos; • Determinação de potências com expoente fracionário; • Cálculo com radicais; • Propriedades de radicais; • Operações envolvendo radicais; • Resolução de problemas envolvendo radicais; • Reconhecimento e emprego de unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas; • Emprego de unidades de medida utilizadas na informática; • Construção e interpretação de gráfico de linha.	Habilidades: (EF09MA01) (EF09MA02) (EF09MA03) (EF09MA04) (EF09MA18) (EF09MA22) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 3 – Grandezas proporcionais	• Determinação da razão entre duas grandezas de espécies diferentes; • Resolução de problemas envolvendo razões entre grandezas de espécies diferentes; • Cálculo de razões na comparação de gráficos de barras; • Reconhecimento de relações de proporcionalidade entre duas grandezas; • Resolução e elaboração de problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais; • Resolução e elaboração de problemas por meio da regra de três; • Aplicação da relação de proporcionalidade na obtenção da medida de arcos de circunferência; • Construção de gráficos de barras e de colunas;	Habilidades: (EF09MA07) (EF09MA08) (EF09MA11) (EF09MA22) Competências gerais: **2**, **3**, **4**, **6**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **6**, **7** e **8**
		2º bimestre	Capítulo 4 – Proporcionalidade em Geometria	• Determinação da razão entre dois segmentos de reta; • Reconhecimento e construção de retângulos áureos; • Resolução de problemas envolvendo segmentos proporcionais; • Demonstração e aplicação de relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal; • Aplicação do teorema de Tales e de propriedades que decorrem desse teorema; • Resolução e elaboração de problemas que aplicam as relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes; • Resolução de problemas envolvendo porcentagens e análise de cartograma.	Habilidades: (EF09MA01) (EF09MA10) (EF09MA14) (EF09MA22) Competências gerais: **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **3**, **4**, **6**, **7** e **8**

1º semestre	2º trimestre	2º bimestre	Capítulo 5 – Semelhança	• Resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade, ampliação e redução de figuras; • Resolução de problemas envolvendo porcentagens; • Determinação da razão de semelhança entre dois polígonos; • Aplicação de relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal; • Reconhecimento de polígonos semelhantes; • Construção de figuras semelhantes por homotetia; • Definição de semelhança de triângulos; • Estudo e aplicação dos casos de semelhança de triângulos; • Interpretação de pirâmides etárias.	Habilidades: (EF09MA05) (EF09MA08) (EF09MA10) (EF09MA12) (EF09MA22) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**
2º semestre			Capítulo 6 – Um pouco mais sobre Estatística	• Escolha do gráfico mais adequado para apresentar determinado conjunto de dados, destacando a análise de medidas estatísticas de tendência central; • Reconhecimento e determinação de medidas estatísticas; • Análise de tabelas e gráfico pictórico; • Resolução e elaboração de problemas envolvendo medidas estatísticas; • Cálculos de porcentagens no contexto de juros compostos; • Resolução de problemas envolvendo cálculo de probabilidade.	Habilidades: (EF09MA05) (EF09MA20) (EF09MA22) (EF09MA23) Competências gerais: **2**, **4**, **5**, **6**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**
		3º bimestre	Capítulo 7 – Equações do 2º grau	• Resolução de problemas que envolvem relações de proporcionalidade que podem ser representados por uma equação polinomial do 2º grau; • Resolução de equações do 2º grau; • Resolução e elaboração de problemas que podem ser representados por equações polinomiais do 2º grau; • Cálculo de porcentagens na leitura e na análise de mapas.	Habilidades: (EF09MA01) (EF09MA04) (EF09MA08) (EF09MA09) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **4**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 8 – Triângulo retângulo	• Resolução de problemas que envolvam semelhança de triângulos e triângulos retângulos; • Reconhecimento dos elementos de um triângulo retângulo; • Demonstração das relações métricas do triângulo retângulo; • Demonstração e aplicação do teorema de Pitágoras; • Determinação da distância entre dois pontos no plano cartesiano e das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; • Representação gráfica de um relevo.	Habilidades: (EF09MA13) (EF09MA14) (EF09MA16) (EF09MA17) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **6** e **8**
	3º trimestre		Capítulo 9 – Razões trigonométricas nos triângulos retângulos	• Aplicação da semelhança de triângulos para obtenção das razões trigonométricas em um triângulo retângulo; • Resolução de problemas que envolvem semelhança de triângulos e razões trigonométricas no triângulo retângulo; • Utilização da tabela de razões trigonométricas e calculadora; • Aplicação do teorema de Pitágoras na determinação das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°; • Análises de gráficos com distorção.	Habilidades: (EF09MA12) (EF09MA14) (EF09MA21) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **5**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**

2º semestre	3º trimestre	4º bimestre	Capítulo 10 – Estudo das funções	• Conceituação e reconhecimento de função como relação de dependência unívoca entre duas grandezas; • Determinação da lei de formação de uma função e obtenção de valores que uma função assume; • Representação gráfica de uma função; • Estudo das funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau; • Identificação das relações de proporcionalidades em funções; • Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais do 2º grau no cálculo dos zeros de uma função quadrática; • Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações polinomiais do 2º grau.	Habilidades: (EF09MA05) (EF09MA06) (EF09MA08) (EF09MA09) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **5**, **6**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **5**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 11 – Circunferência, arcos e relações métricas	• Reconhecimento e determinação do número irracional π; • Resolução de problemas envolvendo a razão entre duas grandezas; • Resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade no cálculo da medida de arcos; • Determinação do comprimento de uma circunferência; • Relação entre arcos de circunferência e ângulos centrais; • Determinação do comprimento de arcos de circunferência e de sua medida angular; • Reconhecimento e aplicação das propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência e das relações métricas em uma circunferência; • Resolução de problemas envolvendo porcentagens e determinação de ângulos de setores circulares; • Análise de gráfico com semicoroa circular; • Comunicação de resultados de pesquisa por meio de tabela e gráfico.	Habilidades: (EF09MA11) (EF09MA23) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 12 – Polígonos regulares e áreas	• Resolução de problemas envolvendo números reais em cálculo de medida de áreas e volume; • Resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade no cálculo da área de um setor circular; • Relação entre arcos de uma circunferência e ângulos centrais de polígonos regulares inscritos nessa circunferência; • Aplicação do teorema de Pitágoras na determinação de elementos de polígonos regulares inscritos em uma circunferência; • Resolução e elaboração de problemas de aplicação do teorema de Pitágoras envolvendo polígonos regulares; • Descrição de algoritmo por escrito e por meio de fluxograma para construção de um polígono regular; • Cálculo de áreas e volumes; • Análise de gráficos com elementos que induzem a erros de leitura e interpretação.	Habilidades: (EF09MA11) (EF09MA14) (EF09MA15) (EF09MA17) (EF09MA19) (EF09MA21) Competências gerais: **2**, **3**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5** e **8**

Considerações iniciais

Cada capítulo aborda objetos de conhecimento, entendidos como conteúdos, conceitos, processos, com a intenção de desenvolver as habilidades relacionadas a eles. Esses conhecimentos são articulados, retomados e ampliados a fim de proporcionar sua apropriação pelos estudantes, considerando a aprendizagem um processo contínuo e integrado.

Os conteúdos matemáticos são desenvolvidos de modo que as habilidades, as Unidades Temáticas, as competências e outras áreas do conhecimento se articulem e se relacionem, e são tratados na perspectiva das aprendizagens dos anos anteriores e posteriores. Assim, no livro do 9º ano do Ensino Fundamental, levamos em conta os objetivos de aprendizagem para o 8º ano, conforme proposto na BNCC, visando preparar os estudantes para se apropriar dos conhecimentos previstos para o Ensino Médio.

A seguir, são feitas orientações didáticas sobre cada capítulo e o que se pretende que os estudantes desenvolvam neles.

Capítulo 1 – Números reais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Retomar os números racionais e reconhecer a ampliação dos conjuntos numéricos.
- Identificar e determinar dízimas periódicas.
- Identificar números quadrados perfeitos.
- Calcular raiz quadrada exata de um número racional não negativo.
- Calcular raiz quadrada com aproximação decimal.
- Reconhecer números irracionais e números reais.
- Verificar experimentalmente o teorema de Pitágoras.
- Localizar números irracionais na reta real.
- Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo números reais.
- Calcular porcentagens sucessivas.
- Analisar dados de pesquisa amostral.

A ampliação do trabalho com conjuntos numéricos tem como objetivo fazer com que os estudantes desenvolvam o pensamento numérico, compreendendo as características dos números pertencentes a cada conjunto numérico. O trabalho com as outras Unidades Temáticas se faz necessário para que esse pensamento seja ampliado e aprofundado. Assim, contribui-se para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3** e **5**.

O trabalho com o cálculo de raiz quadrada de números perfeitos e por aproximação contribui para a compreensão de diferentes conteúdos que serão estudados, como o cálculo da raiz quadrada de equações do 2º grau. O uso da calculadora é uma importante ferramenta para esse processo. Desse modo, é favorecido o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **4** e **5** e das **competências específicas 2**, **3** e **5**.

Na seção *Para Saber Mais*, exploramos a sequência de Fibonacci e o número de ouro, que também é trabalhado na página de Abertura, relacionado a outras áreas de conhecimento. Assim, é favorecido o trabalho com as **competências gerais 1** e **3** e as **competências específicas 1** e **6**.

Na seção *Trabalhando a informação* exploramos dados estatísticos sobre a violência contra a mulher. A escola, como centro de convívio e de formação cidadã, tem responsabilidade nas propostas de mudança, visando uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva. Esse trabalho está alinhado e favorece o desenvolvimento das **competências gerais 8**, **9** e **10** e das **competências específicas 4**, **7** e **8**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

Neste capítulo, são desenvolvidos objetos de conhecimento da Unidade Temática **Números**. Nos conteúdos e nas atividades propostos, foram consideradas as aprendizagens dos anos anteriores, em especial do 8º ano (EF08MA03), relativas aos conjuntos numéricos estudados.

Esse é um momento de ampliação dos conhecimentos desenvolvidos sobre números para apresentar os números irracionais e o conjunto dos números reais, na perspectiva de que a continuidade desse processo leve os estudantes à apropriação da noção de número real. Para isso, apresentam-se conceitos e atividades que os conduzem nessa aprendizagem, favorecendo o trabalho com as habilidades (EF09MA02) e (EF09MA04).

Ao ampliar os conhecimentos que eles já têm sobre os números, espera-se prepará-los para a apropriação de outros tipos de número e para a ampliação dos conjuntos numéricos que serão estudados no Ensino Médio, como os números complexos.

Ainda na Unidade Temática **Números**, desenvolvem-se atividades que envolvem cálculos com radiciação, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA03).

Promove-se a articulação com a Unidade Temática **Geometria** ao apresentar uma verificação experimental do teorema de Pitágoras e aplicando esse teorema na localização de números irracionais dados por raízes quadradas não exatas na reta real e na construção da espiral de Teodoro, Pitágoras ou Einstein, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF09MA01).

A conexão com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística** ocorre em atividade na qual se explora as informações relacionadas a uma pesquisa estatística amostral com margem de erro, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA21).

Comentários e resoluções

Apresentamos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. **a)** É possível, $3 + 7 = 10$; 10 é um número natural.

1. **b)** Não é possível realizar essa operação apenas com números naturais, pois 235 é maior que 5. Desse modo, o resultado dessa operação é um número inteiro não natural.

1. c) É possível, $0 - 0 = 0$; 0 é um número natural.

1. d) É possível, pois $7 - 0 = 7$, que é um número natural.

1. e) Como 3 é menor que 7, a divisão de 3 por 7 é um número racional menor que um inteiro. Portanto, não é um número natural.

1. f) É possível, pois $3 \cdot 7 = 21$, que é um número natural.

1. g) A divisão de 8 por 3 não é exata. Portanto, o resultado não é um número natural.

1. h) Como 10 é maior que 7, a divisão de 7 por 10 é um número racional menor que um inteiro. Portanto, não é um número natural.

12. a) $9 : 66 = 0{,}13636...$ A calculadora pode ter arredondado o último algarismo visível para 4.

12. b) $9 : 66 = \frac{9}{66} = \frac{9 : 3}{66 : 3} = \frac{3}{22}$

13. $0{,}36 = \frac{36}{100} = \frac{36 : 4}{100 : 4} = \frac{9}{25}$

$0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{4 : 4}{100 : 4} = \frac{1}{25}$

$0{,}36 + 0{,}04 = \frac{9}{25} + \frac{1}{25} = \frac{9 + 1}{25} = \frac{10}{25} = \frac{10 : 5}{25 : 5} = \frac{2}{5}$

14. a) $x = 3{,}444... \Rightarrow 10x = 34{,}444...$

Assim:

$10x - x = 34{,}444... - 3{,}444... \Rightarrow 9x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{9}$

14. b) $x = -\,12{,}555... \Rightarrow 10x = -125{,}555...$

Assim:

$10x - x = -125{,}555... - (-\,12{,}555...) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = -\,113 \Rightarrow x = -\frac{113}{9}$

14. c) $x = 0{,}454545... \Rightarrow 100x = 45{,}454545...$

Assim:

$100x - x = 45{,}454545... - 0{,}454545... \Rightarrow 99x = 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{45}{99} = \frac{45 : 9}{99 : 9} \Rightarrow x = \frac{5}{11}$

14. d) $x = -0{,}31222... \Rightarrow 100x = -\,31{,}222... \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,000x = -312{,}222...$

Assim:

$\Rightarrow 1\,000x - 100x = -312{,}222... - (-31{,}222...) \Rightarrow$

$\Rightarrow 900x = -281 \Rightarrow x = -\frac{281}{900}$

15. a) $x = 0{,}333... \Rightarrow 10x = 3{,}333...$

Assim:

$10x - x = 3{,}333... - 0{,}333... \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3}{9} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Portanto, $0{,}333... = \frac{1}{3}$.

Como $0{,}2 = \frac{2}{10}$, temos:

$0{,}2 + 0{,}333... = \frac{2}{10} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{30} = \frac{6 + 10}{30} =$

$= \frac{16}{30} = \frac{16 : 2}{30 : 2} = \frac{8}{15}$

15. b) $x = 0{,}277... \Rightarrow 10x = 2{,}777...$

Assim:

$10x - x = 2{,}777... - 0{,}277... \Rightarrow 9x = 2{,}5$

Como $2{,}5 = \frac{25}{10}$, temos:

$9x = 2{,}5 \Rightarrow 9x = \frac{25}{10} \Rightarrow x = \frac{25}{10 \cdot 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{25}{90} \Rightarrow x = \frac{25 : 5}{90 : 5} \Rightarrow x = \frac{5}{18}$

Portanto, $0{,}277... = \frac{5}{18}$.

$y = 2{,}333... \Rightarrow 10y = 23{,}333...$

Assim:

$10y - y = 23{,}333... - 2{,}333... \Rightarrow 9y = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{21}{9} \Rightarrow y = \frac{21 : 3}{9 : 3} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

Portanto, $2{,}333... = \frac{7}{3}$. Logo:

$0{,}277 + 2{,}333... =$

$= \frac{5}{18} + \frac{7}{3} = \frac{5}{18} + \frac{7 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{5}{18} + \frac{42}{18} = \frac{47}{18}$

15. c) $x = 0{,}388... \Rightarrow 10x = 3{,}888...$

Assim:

$10x - x = 3{,}888... - 0{,}388... \Rightarrow 9x = 3{,}5$

Como $3{,}5 = \frac{35}{10}$, temos:

$9x = 3{,}5 \Rightarrow 9x = \frac{35}{10} \Rightarrow x = \frac{35}{10 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{35}{90}$

Portanto, $0{,}388... = \frac{35}{90}$.

$y = 1{,}4555... \Rightarrow 100y = 145{,}555... \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,000y = 1\,455{,}555...$

Assim:

$1\,000y - 100y = 1\,455{,}555... - 145{,}555... \Rightarrow$

$\Rightarrow 900y = 1\,310 \Rightarrow y = \frac{1310}{900} \Rightarrow y = \frac{131}{90}$

Portanto, $1{,}4555... = \frac{131}{90}$. Logo:

$0{,}388 + 1{,}4555... = \frac{35}{90} + \frac{131}{90} = \frac{166}{90} = \frac{166 : 2}{90 : 2} = \frac{83}{45}$

15. d) $x = 1{,}888... \Rightarrow 10x = 18{,}888...$

Assim:

$10x - x = 18{,}888... - 1{,}888... \Rightarrow 9x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{9}$

Portanto, $1{,}888... = \frac{17}{9}$.

Assim:

$1{,}888... \cdot \frac{2}{17} = \frac{17}{9} \cdot \frac{2}{17} = \frac{2}{9}$

17. Para cada item desse exercício há diversas respostas possíveis. Incentive os estudantes a compartilhar suas respostas e organize-as na lousa para que eles percebam as diferentes possibilidades.

18. a) Como Márcio retirou os números 6, 4 e 2, nessa ordem, o número formado é 6,42.

$$6{,}42 = \frac{642}{100} = \frac{321}{50}$$

18. b) Como sobraram as bolas com os números 1, 3, 5 e 7, o maior número a ser formado é 7,53. E o menor número é 1,35.

20. a) A decomposição é $225 = 3^2 \cdot 5^2$; 225 é um quadrado perfeito, pois $225 = (3 \cdot 5)^2$.

225	5
45	5
9	3
3	3
1	

20. b) A decomposição é $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; então, 360 não é um quadrado perfeito.

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

20. c) A decomposição é $441 = 3^2 \cdot 7^2$; 441 é um quadrado perfeito, pois $441 = (3 \cdot 7)^2$.

441	3
147	3
49	7
7	7
1	

20. d) A decomposição é $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$; então, 480 não é um quadrado perfeito.

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

20. e) A decomposição é $576 = 2^6 \cdot 3^2$; 576 é um quadrado perfeito, pois $576 = (2^3 \cdot 3)^2$.

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

20. f) A decomposição é $784 = 2^4 \cdot 7^2$; 784 é um quadrado perfeito, pois $784 = (2^2 \cdot 7)^2$.

784	2
392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

21. Como $144 = 2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 12^2$; então, em cada linha do novo quadrado há 12 quadradinhos.

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

25. a) $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, pois:

$$\sqrt{0{,}64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{8^2}{10^2}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$0{,}8^2 = 0{,}\ 64$

25. b) $\sqrt{2^{10} \cdot 3^2} = 2^5 \cdot 3$, pois:

$(2^5 \cdot 3)^2 = (2^5)^2 \cdot 3^2 = 2^{10} \cdot 3^2$

26. a) $256 = 2^8 = (2^4)^2 = 16^2$; então, $\sqrt{256} = 16$.

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

26. b) $196 = 2^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 7)^2 = 14^2$; então, $\sqrt{196} = 14$.

196	2
98	2
49	7
7	7
1	

26. c) $484 = 2^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 11)^2 = 22^2$; então, $\sqrt{484} = 22$.

484	2
242	2
121	11
11	11
1	

26. d) $729 = 3^6 = (3^3)^2 = 27^2$; então, $\sqrt{729} = 27$.

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

26. e) $1\,600 = 2^6 \cdot 5^2 = (2^3)^2 \cdot 5^2 = (2^3 \cdot 5)^2 = 40^2$; então, $\sqrt{1600} =$ $= 40$.

1 600	2
800	2
400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

26. f) $1\,024 = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$; então, $\sqrt{1024} = 32$.

1 024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

28. Seja h a medida da altura desse sólido. Então, a medida da área lateral total é dada por: $4 \cdot (a \cdot h) = 4ah = 162$.

A medida da área de todas as faces é dada por:

$2 \cdot (a \cdot a) + 4ah = 2a^2 + 4ah = 202{,}5$

Assim, para determinar a medida a, vamos construir um sistema de equações.

$$\begin{cases} h = \dfrac{162}{4a} \\ 2a^2 + 4ah = 202{,}5 \end{cases}$$

Substituindo h por $\dfrac{162}{4a}$ na segunda equação, temos:

$$2a^2 + 4a \cdot \frac{162}{4a} = 202{,}5 \Rightarrow 2a^2 + 162 = 202{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 202{,}5 - 162 \Rightarrow 2a^2 = 40{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{40{,}5}{2} = \frac{40{,}5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{81}{4}$$

Como $81 = 9^2$ e $4 = 2^2$, então: $a^2 = \dfrac{81}{4} = \dfrac{9^2}{2^2} \Rightarrow a = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

Portanto, a medida do lado da base é 4,5 cm.

Outra maneira de resolver é considerar que a diferença entre a medida da área total e a medida da área lateral é a medida da área das bases (superior e inferior), ou seja, $2 \cdot (a^2) = 202{,}5 - 162$. Portanto:

$$2a^2 = 40{,}5 \Rightarrow a^2 = \frac{40{,}5}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

29. a) Como $25 = 5^2$ e $576 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 24^2$; então:

$$\sqrt{\frac{25}{576}} = \sqrt{\frac{5^2}{24^2}} = \frac{5}{24}$$

25	5
5	5
1	

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

29. b) Como $0{,}01 = \dfrac{1}{100}$ e $100 = 2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2$; então:

$$\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{1^2}{10^2}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

29. c) Como $64 = 2^6 = (2^3)^2 = 8^2$ e $1\,225 = 5^2 \cdot 7^2 = (5 \cdot 7)^2 = 35^2$; então: $\sqrt{\dfrac{64}{1225}} = \sqrt{\dfrac{8^2}{35^2}} = \dfrac{8}{35}$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

1 225	5
245	5
49	7
7	7
1	

29. d) Como $19{,}36 = \dfrac{1936}{100}$ e $1\,936 = 2^4 \cdot 11^2 = (2^2)^2 \cdot 11^2 =$ $= (4 \cdot 11)^2 = 44^2$; então:

$$\sqrt{19{,}36} = \sqrt{\frac{1936}{100}} = \sqrt{\frac{44^2}{10^2}} = \frac{44}{10} = 4{,}4$$

1 936	2
968	2
484	2
242	2
121	11
11	11
1	

30. A área total dos retângulos de papel vermelho mede $1\,200\ cm^2$, pois $2 \cdot (20 \cdot 30) = 1\,200$. Então, a área total da pipa mede $6\,400\ cm^2$, pois:

$2\,500 + 3 \cdot 900 + 1\,200 = 2\,500 + 2\,700 + 1\,200 = 6\,400$

Como $6\,400 = 2^8 \cdot 5^2 = (2^4)^2 \cdot 5^2 = (2^4 \cdot 5)^2$, então o lado da pipa mede 80 cm.

$$\sqrt{6\,400} = \sqrt{(2^4 \cdot 5)^2} = 2^4 \cdot 5 = 80$$

31. a) A medida da área de cada lajota é $1\,200\ cm^2$ $(40 \cdot 30 = 1\,200)$. Como são 10 800 lajotas, a área total que elas ocupam, que corresponde à área do salão, tem medida $1\,296\ m^2$.

$10\,800 \cdot 1\,200 = 12\,960\,000$

$12\,960\,000\ cm^2 = (12\,960\,000 : 10\,000)\ m^2 = 1\,296\ m^2$

31. b) Como é um salão quadrado de área medindo $1\,296\ m^2$, seu lado mede 36 m.

$\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

33. O número 640 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 625 e 676.

$625 < 640 < 676$

Assim, para obter o número quadrado perfeito 625, devemos subtrair 15 de 640 $(640 - 15 = 625)$.

Desse modo, $\sqrt{640}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{625}$ e $\sqrt{676}$.

$\sqrt{625} < \sqrt{640} < \sqrt{676}$

Como $\sqrt{625} = 25$ e $\sqrt{676} = 26$, temos:

$25 < \sqrt{640} < 26$

Portanto, 25 é a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade, do número 640.

34. Alguns anos quadrados perfeitos foram 1600 $(40^2 = 1\,600)$ e 1849 $(43^2 = 1\,849)$. O século XX compreende os anos entre 1901 e 2000, sendo o único quadrado perfeito nesse intervalo o número 1936 $(44^2 = 1\,936)$. O século XXI compreende os anos entre 2001 e 2100, assim, o único número quadrado perfeito nesse intervalo é 2 025 $(45^2 = 2\,025)$. O próximo número quadrado perfeito é 2 116 $(46^2 = 2\,116)$. O ano 2116 estará no século XXII.

36. O número 3 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 1 e 4 $(1 < 3 < 4)$.

Desse modo, $\sqrt{3}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{4}$.

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

Como $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{4} = 2$, temos: $1 < \sqrt{3} < 2$

Como $1{,}7^2 = 2{,}89$ e $1{,}8^2 = 3{,}24$; então:

$2{,}89 < 3 < 3{,}24 \Rightarrow \sqrt{2{,}89} < \sqrt{3} < \sqrt{3{,}24} \Rightarrow 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$

Portanto, 1,7 pode ser considerado uma raiz quadrada aproximada do número 3.

37. Como $3{,}87^2 = 14{,}9769$ e $3{,}88^2 = 15{,}0544$; então:

$14{,}9769 < 15 < 15{,}0544 \Rightarrow \sqrt{14{,}9769} < \sqrt{15} < \sqrt{15{,}0544} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3{,}87^2} < \sqrt{15} < \sqrt{3{,}88^2} \Rightarrow 3{,}87 < \sqrt{15} < 3{,}88$

Portanto, 3,87 se aproxima mais de $\sqrt{15}$.

38. Como $16^2 = 256$ e $17^2 = 289$, então:

$256 < 265 < 289 \Rightarrow 16 < \sqrt{265} < 17$

Para uma aproximação mais precisa, um número com uma casa decimal, vamos começar testando 16,2.

$(16{,}2)^2 = 262{,}44 < 265$

Então, vamos testar o próximo número, 16,3.

$(16{,}3)^2 = 265{,}69 > 265$. Assim, a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 265 é 16,2 $(\sqrt{265} \simeq 16{,}2)$.

39. a) $\sqrt{572} \simeq 23{,}9$

Como $23^2 = 529$ e $24^2 = 576$, então:

$529 < 572 < 576 \Rightarrow 23 < \sqrt{572} < 24$

Para uma aproximação mais precisa, um número com uma casa decimal, vamos começar testando 23,9.

$(23{,}9)^2 = 571{,}21 < 572$

Então: $571{,}21 < 572 < 576 \Rightarrow 23{,}9 < \sqrt{572} < 24$

39. b) $\sqrt{28{,}19} \simeq 5{,}3$

Como $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$, então:

$25 < 28{,}19 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{28{,}19} < 6$

Para uma aproximação que seja um número com uma casa decimal, vamos começar testando 5,3.

$(5{,}3)^2 = 28,\ 09 < 28{,}19$

Então, vamos testar o próximo número, 5,4.

$(5{,}4)^2 = 29{,}16 > 28{,}19$

Assim, a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 28,19 é 5,3 $(\sqrt{28{,}19} \simeq 5{,}3)$.

39. c) $\sqrt{42{,}55} \simeq 6{,}5$

Como $6^2 = 36$ e $7^2 = 49$, então: $36 < 42{,}55 < 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 < \sqrt{42{,}55} < 7$

Para uma aproximação que seja um número com uma casa decimal, vamos começar testando 6,5.

$(6{,}5)^2 = 42{,}25 < 42{,}55$

Então, vamos testar o próximo número, 6,6.

$(6{,}6)^2 = 43{,}56 > 42{,}55$

Assim, a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 42,55 é 6,5 $(\sqrt{42{,}55} \simeq 6{,}5)$.

39. d) $\sqrt{12{,}6} \simeq 3{,}5$

Como $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$, então:

$9 < 12{,}6 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{12{,}6} < 4$

Para uma aproximação que seja um número com uma casa decimal, vamos começar testando 3,5.

$(3{,}5)^2 = 12{,}25 < 12{,}6$

Então, vamos testar o próximo número, 3,6.

$(3{,}6)^2 = 12{,}96 > 12{,}6$

Assim, a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 12,6 é 3,5 $(\sqrt{12{,}6} \simeq 3{,}5)$.

40. a) $\sqrt{88} \simeq 9{,}38$

40. b) $\sqrt{8800} \simeq 93{,}81$

40. c) $\sqrt{6000000} \simeq 2\,449{,}49$

40. d) $\sqrt{6} \simeq 2{,}45$

40. e) $\sqrt{1000} \simeq 31{,}62$

40. f) $\sqrt{100000} \simeq 316{,}23$

41. a) Como $20^2 = 400$ e $21^2 = 441$, então $400 < 410 < 441$. Logo, $20 < \sqrt{410} < 21$.

Como queremos encontrar a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, vamos continuar testando 20,2.

$(20{,}2)^2 = 408{,}04 < 410$

Então, vamos testar o próximo número, 20,3.

$(20{,}3)^2 = 412{,}09 > 410$

Com duas casas decimais, agora vamos testar 20,25.

$(20{,}25)^2 = 410{,}0625 > 410$

Então, vamos testar o número 20,24.

$(20{,}24)^2 = 409{,}6576 < 410$

Assim, a raiz quadrada aproximada do número 410, com duas casas decimais, é 20,24.

41. b) Como 412 = 1681 e 422 = 1764, então:

$1681 < 1715 < 1764$

Logo, $41 < \sqrt{1715} < 42$.

Como queremos encontrar a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, vamos continuar testando 41,4.

$(41{,}4)^2 = 1713{,}96 < 1715$

Então, vamos testar o próximo número, 41,5.

$(41{,}5)^2 = 1722{,}25 > 1715$

Com duas casas decimais, agora vamos testar 41,41.

$(41{,}41)^2 = 1714{,}7881 < 1715$

Então, vamos testar o número 41,42.

$(41{,}42)^2 = 1715{,}6164 > 1715$

Assim, a raiz quadrada aproximada do número 1715, com duas casas decimais, é 41,41.

41. c) Como $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$, então:

$1936 < 1999 < 2025$

Logo, $44 < \sqrt{1999} < 45$.

Como queremos encontrar a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, vamos continuar testando 44,7.

$(44{,}7)^2 = 1998{,}09 < 1999$

Então, vamos testar o próximo número, 44,8.

$(44{,}8)^2 = 2007{,}04 > 1999$

Com duas casas decimais, agora vamos testar 44,71.

$(44{,}71)^2 = 1998{,}9841 < 1999$

Então, vamos testar o número 44,72.

$(44{,}72)^2 = 1999{,}8784 > 1999$

Assim, a raiz quadrada aproximada do número 1999, com duas casas decimais, é 44,71.

41. d) Como $59^2 = 3481$ e $60^2 = 3600$, então:

$3481 < 3500 < 3600$

Logo, $59 < \sqrt{3500} < 60$.

Como queremos encontrar a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais, vamos continuar testando 59,1.

$(59{,}1)^2 = 3492{,}81 < 3500$

Então, vamos testar o próximo número, 59,2.

$(59{,}2)^2 = 3504{,}64 > 3500$

Com duas casas decimais, agora vamos testar 59,16.

$(59{,}16)^2 = 3499{,}9056 < 3500$

Então, vamos testar o número 59,17.

$(59{,}17)^2 = 3501{,}0889 > 3500$

Assim, a raiz quadrada aproximada do número 3500, com duas casas decimais, é 59,16.

42. a) $\sqrt{410} \simeq 20{,}24845673$

42. b) $\sqrt{1715} \simeq 41{,}41255848$

42. c) $\sqrt{1999} \simeq 44{,}71017781$

42. d) $\sqrt{3500} \simeq 59{,}16079783$

43. Como o triângulo da figura tem catetos medindo 1, sua hipotenusa mede $a = \sqrt{2}$, pois:

$a^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Como m está à esquerda da origem, então: $m = -a = -\sqrt{2}$

45. a) As medidas dos catetos são 1 e 4; então, pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 1^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17}$

45. b) Como não existe nenhum número racional x tal que $x^2 = 17$, então $\sqrt{17}$ é um número irracional.

45. c) Como $\sqrt{17}$ é um número irracional, ele tem infinitas casas decimais em sua representação decimal; porém, usando uma calculadora, aparecerá no visor um número limitado de casas decimais, conforme o espaço disponível. Representando esse número na forma decimal aproximada, com duas casas decimais, temos 4,12 ($\sqrt{17} \simeq 4{,}12$).

46. O triângulo *OAB* é retângulo com catetos medindo 3 e 1; portanto, sua hipotenusa $\overline{AO}$ mede *h*.

$h^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow h = \sqrt{10}$

47. a) O lado de medida *x* corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 2 m e 3 m. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$

Portanto, a medida do comprimento da rampa do escorregador é $\sqrt{13}$ m.

47. b) Utilizando uma calculadora ou um método de aproximação, é possível obter $\sqrt{13} \simeq 3{,}61$, ou $\sqrt{13} \simeq 3{,}6$.

Portanto:

$3{,}61 \text{ m} = (3{,}61 \cdot 100) \text{ cm} = 361 \text{ cm}$

Ou $3{,}6 \text{ m} = 360 \text{ cm}$.

Assim, a medida do comprimento do escorregador pode ser aproximada para 361 cm ou para 360 cm.

Pense mais um pouco...

Página 13

a)

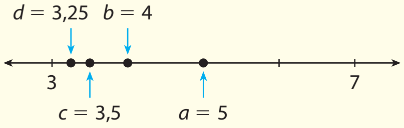
$$a = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$b = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$c = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$d = \frac{3+3{,}5}{2} = \frac{6{,}5}{2} = 3{,}25$$

b)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

c) Sim, pois, $3 < 4 < 5 < 7$; 3,5 está entre 3 e 4; 3,25 está entre 3 e 3,5.

d) Sim, observe os primeiros casos:

$$e = \frac{3+3{,}25}{2} = \frac{6{,}25}{2} = 3{,}125$$

$$f = \frac{3 + 3{,}125}{2} = \frac{6{,}125}{2} = 3{,}0625$$

$$g = \frac{3 + 3{,}0625}{2} = \frac{6{,}0625}{2} = 3{,}03125$$

$$h = \frac{3 + 3{,}03125}{2} = \frac{6{,}03125}{2} = 3{,}015625$$

Espera-se que os estudantes percebam que é possível continuar essa sequência de divisão infinitamente.

e) Espera-se que os estudantes respondam que existem infinitos números racionais entre 3 e 7, assim como existem também infinitos números racionais entre dois números racionais distintos quaisquer.

Página 17

a) $1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

c) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$

Seguindo o padrão, a quarta expressão é:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{8+5}{8} = \frac{13}{8}$$

Para saber mais

Página 18

1. 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5; 3 + 5 = 8; 5 + 8 = 13

Ao efetuar essas adições, espera-se que os estudantes percebam que a soma de dois números consecutivos é igual ao próximo número da sequência.

2. 8 + 13 = 21; 13 + 21 = 34; 21 + 34 = 55; 34 + 55 = 89

Os próximos números da sequência são 21, 34, 55 e 89.

3. $\frac{1}{1} \simeq 1{,}000$; $\frac{2}{1} \simeq 2{,}000$; $\frac{3}{2} \simeq 1{,}500$;

$\frac{5}{3} \simeq 1{,}667$; $\frac{8}{5} \simeq 1{,}600$; $\frac{13}{8} \simeq 1{,}625$;

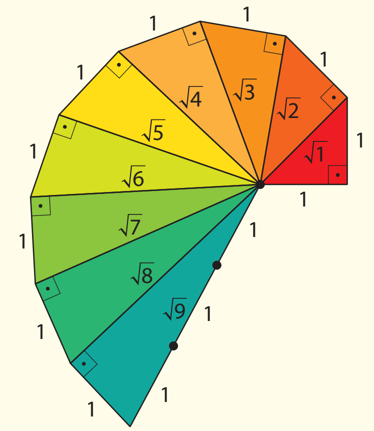
$\frac{21}{13} \simeq 1{,}615$; $\frac{34}{21} \simeq 1{,}619$; $\frac{55}{34} \simeq 1{,}618$;

$\frac{89}{55} \simeq 1{,}6\overline{18}$

Espera-se que os estudantes percebam que essas razões se aproximam do número áureo.

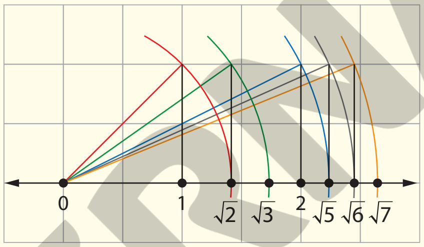
Páginas 34 e 35

1. Com a construção da espiral é possível perceber que, de fato, $\sqrt{9} = 3$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2. Espera-se que os estudantes transportem as medidas encontradas na **atividade 1** para localizar na reta numérica os números pedidos.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

1. a) Falsa, –1 não é natural.

1. b) Falsa, $\frac{1}{2}$ não é um número inteiro.

1. c) Verdadeira.

1. d) Verdadeira.

2. $x = 1{,}\overline{4} \Rightarrow 10x = 14{,}\overline{4}$

Assim: $10x - x = 14{,}\overline{4} - 1{,}\overline{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{9}$

$y = 0{,}\overline{7} \Rightarrow 10y = 7{,}\overline{7}$

Assim: $10y - y = 7{,}\overline{7} - 0{,}\overline{7} \Rightarrow 9y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{9}$

Então:

$$A = \frac{2}{3} - 1{,}\overline{4} = \frac{2}{3} - \frac{13}{9} = \frac{6}{9} - \frac{13}{9} = -\frac{7}{9}$$

Portanto:

$$A : B = -\frac{7}{9} : \left(-0{,}\overline{7}\right) = -\frac{7}{9} : -\frac{7}{9} = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{7} = 1$$

Então, $A : B = 1$.

3. a) $2{,}555... + 0{,}\ 222... = 2 + (0{,}555... + 0{,}222...) =$
$= 2 + 0{,}777... = 2{,}777... = 2{,}\overline{7}$

3. b) Primeiro vamos determinar as frações equivalentes às dízimas periódicas 2,555... e 0,222... .

$x = 2{,}555... \Rightarrow 10x = 25{,}555...$

Assim:

$10x - x = 25{,}555... - 2{,}555... \Rightarrow 9x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{9}$

$y = 0{,}222... \Rightarrow 10y = 2{,}222...$

Assim:

$10y - y = 2{,}222\ldots - 0{,}222\ldots \Rightarrow 9y = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{9}$

Portanto:

$(2{,}555\ldots) \cdot (0{,}222\ldots) = \dfrac{23}{9} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{23 \cdot 2}{9 \cdot 9} = \dfrac{46}{81}$

4. Como $(2{,}2)^2 = 2{,}2 \cdot 2{,}2 = 4{,}84$; então:
$\sqrt{4{,}84} = 2{,}2$

5. Como $x = 2^8 \cdot 5^2 = (2^4)^2 \cdot 5^2 = (2^4 \cdot 5)^2$; então:
$\sqrt{x} = \sqrt{(2^4 \cdot 5)^2} = 2^4 \cdot 5 = 16 \cdot 5 = 80$

6. $2^5 \cdot 34 \cdot 5^3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 5^3 \cdot 7 = 2^6 \cdot 17 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= (2^3)^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = \underbrace{(2^3 \cdot 5)^2}_{\text{é quadrado perfeito}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 7 \cdot 17)}_{\text{não é quadrado perfeito}}$

Então, multiplicar por 595, ou seja, $5 \cdot 7 \cdot 17$, é o menor número possível que, multiplicado por $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$, resulta em um número natural que é quadrado perfeito.
$(2^3 \cdot 5)^2 \cdot (5 \cdot 7 \cdot 17) \cdot (5 \cdot 7 \cdot 17) = (2^3 \cdot 5)^2 \cdot (5 \cdot 7 \cdot 17)^2 =$
$= (2^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^2 = \underbrace{(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17)^2}_{\text{é quadrado perfeito}}$

7. $A \cdot B = (3^3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 9 \cdot 5 \cdot 7 = 315$

8. Como a medida da área é 231,04 m² e o terreno tem formato de um quadrado, seu lado mede 15,2 m.
$A = \ell^2 = 231{,}04 \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell = \sqrt{231{,}04} = 15{,}2$
$4 \cdot \ell = 4 \cdot 15{,}2 = 60{,}8$
Então, a medida do perímetro é 60,8 m.

9. $x = 5{,}888\ldots \Rightarrow 10x = 58{,}888\ldots$
Assim:
$10x - x = 58{,}888\ldots - 5{,}888\ldots \Rightarrow 9x = 53 \Rightarrow x = \dfrac{53}{9}$
Portanto:
$\sqrt{5{,}888\ldots} \simeq \sqrt{\dfrac{(7{,}2801)^2}{3^2}} \simeq \dfrac{7{,}2801}{3} \simeq 2{,}4267$
Considerando as opções do enunciado, temos:
$\sqrt{5{,}888\ldots} \simeq 2{,}4333\ldots$
Alternativa **b**.

10. a) Pelo teorema de Pitágoras, sendo h a medida da hipotenusa:
$h^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow h = \sqrt{169} = 13$
A hipotenusa mede 13 cm.

10. b) A medida é um número natural; portanto, também é racional.

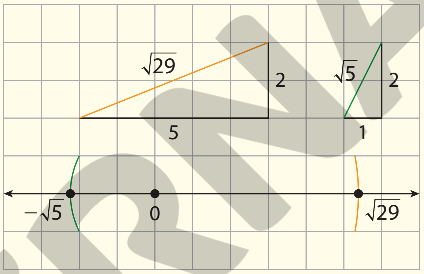
11. a) Pelo teorema de Pitágoras, se h é a medida da hipotenusa do triângulo, temos:
$h^2 = 6^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow h = \sqrt{40}$
A hipotenusa mede $\sqrt{40}$ cm.

11. b) É irracional, pois não existe nenhum número racional x, tal que $x^2 = 40$.

11. c) Como $6^2 = 36$ e $7^2 = 49$, então:
$36 < 40 < 49 \Rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7$
Para uma aproximação com uma casa decimal, considerando que $6{,}3^2 = 39{,}69$ e $6{,}4^2 = 40{,}96$, então:
$39{,}69 < 40 < 40{,}96$
$6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$
Portanto, $\sqrt{40} \simeq 6{,}3$.
A medida da hipotenusa é aproximadamente 6,3 cm.

12. O valor de a é o mesmo da medida da hipotenusa do triângulo, com catetos de medidas 5 e 1. Portanto:
$a^2 = 5^2 + 1^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 1 = 26 \Rightarrow a = \sqrt{26}$

13. Como $29 = 25 + 4 \Rightarrow \left(\sqrt{29}\right)^2 = 5^2 + 2^2$, então $\sqrt{29}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 5 e 2.
Como $5 = 1 + 4 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 + 2^2$, então $\sqrt{5}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1 e 2.
Transpondo as medidas das hipotenusas para a reta numérica, temos:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

14. A altura do poste é um cateto de um triângulo retângulo com o outro cateto medindo 3 m e a hipotenusa medindo 6 m. Portanto, se c é a medida do cateto desconhecido, temos:
$c^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow c^2 + 9 = 36 \Rightarrow c^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow c = \sqrt{27}$
Como $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$, então: $25 < 27 < 36 \Rightarrow 5 < \sqrt{27} < 6$
Como $(5{,}1)^2 = 26{,}01$ e $(5{,}2)^2 = 27{,}04$, temos:
$26{,}01 < 27 < 27{,}04 \Rightarrow 5{,}1 < \sqrt{27} < 5{,}2$
Utilizando uma calculadora, verificamos que:
$\sqrt{27} \simeq 5{,}19615 \simeq 5{,}2$

Verificando

1. a) 350 : 8 = 43,75; 43,75 não é um número natural, pois tem parte decimal. Então, 350 : 8 + 34 também não tem como resultado um número natural
(350 : 8 + 34 = 77,75).

1. b) 352 : 8 – 90 : 2 = 44 – 45 = – 1
–1 não é um número natural.

1. c) 456 : 5 + 88 : 10 = 91,2 + 8,8 = 100
100 é um número natural; portanto, esta é a alternativa correta.

1. d) 456 : 6 – 88 = 57 – 88 = – 31
–31 não é um número natural.

2. $x = 15{,}\overline{623} \Rightarrow 1\,000x = 15623{,}\overline{623}$
Assim:
$1\,000x - x = 15623{,}\overline{623} - 15{,}\overline{623} \Rightarrow$
$\Rightarrow 999x = 15\,608 \Rightarrow x = \dfrac{15608}{999}$
Alternativa **b**.

3. **a)** Incorreta. –3, por exemplo, é um número inteiro, mas não é natural.

3. **b)** Correta. Se um número é racional, ele não pode ser irracional, e vice-versa.

3. **c)** Incorreta. Todo número inteiro é racional $\left(x = \frac{x}{1}\right)$.

3. **d)** Incorreta. $\sqrt{2}$, por exemplo, é um número real, mas não é racional.

4. **a)** $1\,764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^2$ (quadrado perfeito).

4. **b)** $1\,225 = 5^2 \cdot 7^2 = (5 \cdot 7)^2$ (quadrado perfeito).

4. **c)** $882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (3 \cdot 7)^2 \cdot 2$ (não é quadrado perfeito).

4. **d)** $1\,296 = 2^4 \cdot 3^4 = (2^2 \cdot 3^2)^2$ (quadrado perfeito).

5. Vamos determinar um valor com uma casa decimal para $\sqrt{42}$.
Como $36 = 6^2$ e $49 = 7^2$, então:
$36 < 42 < 49 \Rightarrow 6 < \sqrt{42} < 7$
Como $40{,}96 = 6{,}4^2$ e $42{,}25 = 6{,}5^2$, então:
$40{,}96 < 42 < 42{,}25 \Rightarrow 6{,}4 < \sqrt{42} < 6{,}5$
Alternativa **a**.

6. Como $34^2 = 1\,156$ e $35^2 = 1\,225$, então:
$1\,156 < 1\,185 < 1\,225 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{1156} < \sqrt{1185} < \sqrt{1225} \Rightarrow 34 < \sqrt{1185} < 35$
Alternativa **b**.

7. Como a área mede 18,49 m², o lado do quadrado mede 4,3 m, pois $\sqrt{18{,}49} = 4{,}3$. Assim, o perímetro mede 17,2 m, pois $4{,}3 \cdot 4 = 17{,}2$.
Alternativa **b**.

8. A diagonal do retângulo é equivalente à hipotenusa de um triângulo cujos catetos são a base e a altura do retângulo. Assim, pelo teorema de Pitágoras, sendo H a medida da diagonal, temos:
$H^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow H^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow H = \sqrt{52}$
Portanto, a diagonal desse retângulo mede $\sqrt{52}$ cm. O número $\sqrt{52}$ é irracional.
Alternativa **d**.

9. No triângulo retângulo:
$\left(\sqrt{23}\right)^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow 23 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 23 - 1 = 22 \Rightarrow x = \sqrt{22}$
Alternativa **c**.

10. Pelo teorema de Pitágoras, a medida h da hipotenusa é tal que:
$h^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow h = \sqrt{100} = 10$
Portanto, a hipotenusa mede 10 cm.
Alternativa **b**.

Capítulo 2 – Operações com números reais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Compreender o surgimento dos números irracionais, reconhecê-los e utilizá-los na resolução de problemas.
- Representar geometricamente números irracionais usando régua e compasso.
- Explorar potências de 10 e a notação científica.
- Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas.
- Empregar unidades de medida utilizadas na informática.
- Resolver problemas envolvendo cálculos com potências de expoentes inteiros.
- Determinar potências com expoente fracionário.
- Efetuar cálculos com números reais.
- Estudar e aplicar as propriedades de radicais.
- Simplificar radicais.
- Efetuar operações envolvendo radicais.
- Racionalizar expressões contendo radicais no denominador.
- Resolver e elaborar problemas com números reais envolvendo diferentes operações.
- Construir e interpretar gráfico de linha.

Neste capítulo, ampliamos o trabalho com números reais com o foco nas operações de potenciação e radiciação. Inicialmente, exploramos as potências de 10 e a notação científica, com situações que envolvem medidas muito grandes ou muito pequenas, além das unidades de medida relacionadas à informática. A compreensão do conceito de número irracional é favorecida por meio de situações variadas que ampliam o conhecimento já construído sobre números irracionais e, assim, consolidam a aprendizagem dos números reais. Assim, contribui-se para a compreensão numérica e o letramento matemático dos estudantes, além do desenvolvimento das **competências gerais 1**, **2** e **4** e das **competências específicas 1**, **2**, **3** e **6**.

O trabalho com as operações de potenciação e radiciação mobilizam aspectos das **competências específicas 2**, **3** e **5**, pois contribuem para o desenvolvimento de ferramentas matemáticas na resolução de problemas das diferentes Unidades Temáticas.

Na seção *Trabalhando a informação* os estudantes devem analisar dados em um gráfico de linhas, o que contribui para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 4**, **6** e **7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

Neste capítulo, serão aprofundados os conhecimentos acerca das operações com os conjuntos numéricos, ampliando-as para o cálculo com radicais, com foco na Unidade Temática **Números**, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF09MA01), (EF09MA02) e (EF09MA03). Esse trabalho amplia e consolida conhecimentos construídos ao longo dos anos anteriores, em especial no 8º ano (EF08MA01 e EF08MA02). Espera-se que as situações envolvendo tais conhecimentos possam subsidiar os que serão explorados no Ensino Médio, entre eles a história dos números irracionais e as propriedades de radicais.

O capítulo apresenta também articulação com temas das Unidades Temáticas **Grandezas e medidas**, no reconhecimento e no emprego de unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, além das unidades de medidas relacionadas à informática, o que favorece o desenvolvimento das habilidades (EF09MA04) e (EF09MA18), e **Probabilidade e estatística**, na construção e na interpretação de gráficos de linhas, que está relacionada com a habilidade (EF09MA22).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

a) Resposta pessoal. Uma opção de resposta é os estudantes se lembrarem do surgimento dos números a partir da necessidade de contar objetos e animais em rebanhos ou em contextos de agrimensura, por exemplo.

b) Resposta pessoal. Uma opção de resposta é os estudantes medirem a roda de uma bicicleta encontrando as seguintes medidas aproximadas: contorno 194 cm; diâmetro 61 cm; $\frac{\text{contorno}}{\text{diâmetro}} = \frac{194}{61} \simeq 3{,}18$

Exercícios propostos

2. Como o nanômetro é a unidade de medida de comprimento equivalente à bilionésima parte do metro, temos que 1 nm = 10^{-9} m. Logo:

$$0{,}05 \text{ nm} = (0{,}05 \cdot 10^{-9}) \text{ m} = \left(\frac{5}{100} \cdot 10^{-9}\right) \text{ m} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

3. Considerando que um disco de vidro pode guardar até 360 TB, que 1 TB equivale a 10^{12} B e que 1 MB equivale a 10^6 B, temos:

$$360 \text{ TB} = 360 \cdot 10^{12} \text{ B} = 360 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ B} = 360 \cdot 10^6 \text{ MB} = 3{,}6 \cdot 10^8 \text{ MB}$$

$$1 \text{ MB} = \frac{10^6}{2^{20}} \text{ MiB} = \frac{1000000}{1048576} \text{ MiB} = 0{,}95367431640625 \text{ MiB}$$

Logo:

$$3{,}6 \cdot 10^8 \text{ MB} = 3{,}6 \cdot 10^8 \cdot 0{,}95367431640625 \text{ MiB}$$

$$3{,}6 \cdot 10^8 \text{ MB} = 3{,}4332275390625 \cdot 10^8 \text{ MiB} \simeq 3{,}4 \cdot 10^8 \text{ MiB}$$

4. a) Sabe-se que 1 KiB equivale a 1024 B. Para determinar o erro percentual ao substituir 2^{10} por 10^3, basta calcular:

$$\frac{10^3}{2^{10}} = 0{,}9765625 \simeq 97{,}66\%$$

Portanto, o erro é de aproximadamente 2,34% (100 – 97,66 = 2,34), ou aproximadamente 2,3%.

4. b) Assim como no caso anterior, basta calcular:

$$\frac{10^{24}}{2^{80}} = \left(\frac{10^3}{2^{10}}\right)^8 = \left(\frac{1000}{1024}\right)^8 = 0{,}9765625^8 \simeq 0{,}827 \simeq 82{,}7\%$$

Assim, o erro é de aproximadamente 17,3% (100 – 82,7 = 17,3).

5. Sabe-se que 1 ua $\simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m $= 1{,}5 \cdot 10^8$ km e que 1 ano-luz corresponde a aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{15}$ m $= 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km, o que equivale a aproximadamente 63 241 ua.

Assim, a medida do diâmetro da Via Láctea é cerca de 100 mil anos-luz $= 1 \cdot 10^5$ anos-luz, ou seja, aproximadamente, $9{,}5 \cdot 10^{17}$ km $\simeq 6{,}32 \cdot 10^9$ ua.

A medida do diâmetro da galáxia Andrômeda é de aproximadamente 220 mil anos-luz $= 2{,}2 \cdot 10^5$ anos-luz, $2{,}09 \cdot 10^{18}$ km $\simeq 1{,}39 \cdot 10^{10}$ ua

$(220\,000 \cdot 63\,241)$ ua $= 13\,913\,020\,000$ ua $\simeq 1{,}39 \cdot 10^{10}$ ua $\simeq (1{,}39 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}5 \cdot 10^8)$ km $\simeq 2{,}09 \cdot 10^{18}$ km

Essa galáxia está a uma distância de aproximadamente $2{,}75 \cdot 10^{19}$ km ou $1{,}83 \cdot 10^{11}$ ua.

$2{,}9 \cdot 10^6$ anos-luz $= (2{,}9 \cdot 10^6 \cdot 63\,241)$ ua $= 183\,398{,}9 \cdot 10^6$ ua $\simeq 1{,}83 \cdot 10^{11}$ ua

$(1{,}83 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}5 \cdot 10^8)$ km $\simeq 2{,}75 \cdot 10^{19}$ km

O diâmetro da Grande Nuvem de Magalhães mede aproximadamente 70 mil anos-luz, ou seja, aproximadamente $6{,}6 \cdot 10^{17}$ km $\simeq 4{,}4 \cdot 10^9$ ua.

$(70\,000 \,.\, 63\,241)$ ua $= 4\,426\,870\,000$ ua $\simeq (4{,}4 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8)$ km $\simeq 6{,}6 \cdot 10^{17}$ km

Essa galáxia está a uma distância de aproximadamente 200 mil anos-luz, ou seja, aproximadamente $1{,}9 \cdot 10^{18}$ km $\simeq 1{,}26 \cdot 10^{10}$ ua.

$(200\,000 \,.\, 63\,241)$ ua $= 12\,648\,200\,000$ ua $\simeq (12{,}6 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \,.\, 10^8)$ km $\simeq 18{,}9 \cdot 10^{17}$ km $\simeq 1{,}9 \cdot 10^{18}$ km

O diâmetro da Pequena Nuvem de Magalhães mede aproximadamente 14 mil anos-luz, ou seja, aproximadamente $1{,}33 \cdot 10^{17}$ km $= 8{,}8 \cdot 10^8$ ua.

$(14\,000 \cdot 63\,241)$ ua $= 885\,374\,000$ ua $\simeq (8{,}8 \cdot 10^8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8)$ km $\simeq 13{,}28 \cdot 10^{16}$ km $\simeq 1{,}33 \cdot 10^{17}$ km

Essa galáxia está a uma distância de aproximadamente 168 mil anos-luz, ou seja, aproximadamente $1{,}6 \cdot 10^{18}$ km $\simeq 1{,}1 \cdot 10^{10}$ ua.

$(168\,000 \cdot 63\,241)$ ua $\simeq 10\,624\,488\,000$ ua $\simeq (1{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}5 \,.\, 10^8)$ km $\simeq 1{,}6 \cdot 10^{18}$ km

6. Apresentamos um problema como exemplo. Considerando que a medida da distância entre a Terra e a Lua é de 384 400 quilômetros, escreva essa medida de distância em unidade astronômica.

A medida da distância da Terra à Lua é 384 400 km $\simeq 3{,}8 \cdot 10^5$ km, assim, em unidade astronômica (ua), temos:

$$\frac{1\ \text{ua}}{1{,}5 \cdot 10^8\ \text{km}} \simeq \frac{x\ \text{ua}}{3{,}8 \cdot 10^5\ \text{km}} \Rightarrow x \simeq \frac{3{,}8 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^8}\ \text{ua} \simeq$$
$$\simeq 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{ua}$$

7. Apresentamos um problema como exemplo. Considere que um HD externo seja anunciado como tendo capacidade de armazenar 1 TB de dados. Quantas vezes mais informações cabem nesse HD externo do que no HD de um computador com capacidade de armazenamento anunciada como 240 GB?

   Como 1 TB = 1000 GB, temos:

   $1\ \text{TB} = 1000\ \text{GB} \Rightarrow 1\ \text{GB} = \frac{1}{1000}\ \text{TB}$

   Portanto: $\frac{1000}{240} \simeq 4$

   Assim, em um HD de 1 TB cabem cerca de quatro vezes mais informações do que em um HD de 240 GB.

8. a) Aplicando a relação conhecida $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para $a = 8{,}1$; $m = 4$; $n = 5$, temos: $\sqrt[5]{8{,}1^4} = 8{,}1^{\frac{4}{5}}$

8. b) Para $a = \pi$; $m = 3$; $n = 2$, temos: $\sqrt{\pi^3} = \pi^{\frac{3}{2}}$

8. c) Para $a = \frac{1}{7}$; $m = 4$; $n = 6$, temos: $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{7}\right)^4} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{6}}$

8. d) Para $a = \sqrt{8}$; $m = 3$; $n = 3$, temos: $\sqrt[9]{\left(\sqrt{8}\right)^3} = \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{3}{9}} =$
   $= \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

9. a) Aplicando a relação conhecida $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para $a = \pi$; $m = 1$; $n = 2$, temos: $\pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

9. b) Para $a = \phi$; $m = 6$; $n = 5$, temos: $\phi^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{\phi^6}$

9. c) Para $a = \sqrt{3}$; $m = 1$; $n = 2$, temos: $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\sqrt{3}}$

9. d) Sendo $5^{0{,}5} = 5^{\frac{1}{2}}$, para $a = 5$; $m = 1$; $n = 2$, temos:
   $5^{0{,}5} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

10. a) $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{7}{12}}$

10. b) $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{12}}$

10. c) $\left[\left(\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{9}{2}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{9}{6}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{3}{2}}$

10. d) $\pi^{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pi^{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{32}}$

11. a) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}\right)^4 = \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\right)} = 2^{\left(\frac{4}{4}\right)} =$
    $= 2^1 = 2$

11. b) $0{,}512^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}512} = \sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{2^9}{10^3}} = \sqrt[3]{\frac{\left(2^3\right)^3}{10^3}} =$
    $= \frac{2^3}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

11. c) $\sqrt[5]{\pi^{10}} = \pi^{\frac{10}{5}} = \pi^2$

11. d) $\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

12. a) Espera-se que os estudantes percebam que, dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum não nulo, se obtém um radical igual.
    $\sqrt[12]{\pi^6} = \pi^{\frac{6}{12}} = \pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\pi^1} = \sqrt{\pi}$

12. b) $\sqrt[14]{1{,}7^7} = 1{,}7^{\frac{7}{14}} = 1{,}7^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1{,}7^1} = \sqrt{1{,}7}$

12. c) $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{5}\right)^9} = \left(\frac{13}{5}\right)^{\frac{9}{6}} = \left(\frac{13}{5}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{13}{5}\right)^3}$

12. d) $\sqrt[18]{\phi^{12}} = \phi^{\frac{12}{18}} = \phi^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\phi^2}$

12. e) $\sqrt[24]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^8} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{8}{24}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

12. f) $\sqrt[12]{\pi^{18}} = \pi^{\frac{18}{12}} = \pi^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\pi^3}$

14. a) Aplicando a 2ª propriedade dos radicais, temos:
    $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[9:3]{5^{6:3}} = \sqrt[3]{5^2}$

14. b) $\sqrt[15]{3^{20}} = \sqrt[15:5]{3^{20:5}} = \sqrt[3]{3^4}$

14. c) $\sqrt[6]{11^3} = \sqrt[6:3]{11^{3:3}} = \sqrt{11}$

14. d) $\sqrt[18]{7^2} = \sqrt[18:2]{7^{2:2}} = \sqrt[9]{7}$

16. a) Aplicando a 2ª propriedade dos radicais, temos:
    $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6:3]{a^{3:3}} = \sqrt{a}$

16. b) $\sqrt[20]{x^{15}} = \sqrt[20:5]{x^{15:5}} = \sqrt[4]{x^3}$

16. c) $\sqrt[9]{y^6} = \sqrt[9:3]{y^{6:3}} = \sqrt[3]{y^2}$

16. d) $\sqrt[12]{m^{10}} = \sqrt[12:2]{m^{10:2}} = \sqrt[6]{m^5}$

17. a) Aplicando a 3ª propriedade dos radicais, temos:
    $\sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

17. b) $\sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

17. c) $\sqrt[4]{7 \cdot 10} = \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{10}$

18. a) Aplicando a 4ª propriedade dos radicais, temos:
    $\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

18. b) $\sqrt[3]{\frac{18}{5}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}}$

18. c) $\sqrt[5]{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{9}}$

19. a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^1} = 2\sqrt{2}$

19. b) $\sqrt[3]{27 \cdot 5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

19. c) $\sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$

19. d) $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3} \cdot \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{5^4} =$
$= 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot 3\ \sqrt[4]{3} \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt[4]{2^3 \cdot 3} = 30\sqrt[4]{24}$

19. e) $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 3^3} = 3\sqrt[3]{6}$

19. f) $\sqrt[6]{3^3 \cdot 4^{12}} = \sqrt[6:3]{3^{3:3}} \cdot \sqrt[6:3]{4^{12:3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(4^2)^2} = 16\sqrt{3}$

20. a) $2\sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$

20. b) $3\sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$

20. c) $-2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3^3 \cdot 10}$

20. d) $\frac{2}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{3^2}}$

20. e) $0{,}2\sqrt[3]{2} = 0{,}2 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(0{,}2)^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(0{,}2)^3 \cdot 2}$

20. f) $2\sqrt[4]{3} = 2 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3}$

21. a) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81} = \sqrt{5^2} + \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{3^4} = 5 + 3 + 3 = 11$

21. b) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{64} + \sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{(-4)^3} + \sqrt{8^2} + \sqrt[6]{2^6} =$
$= (-4) + 8 + 2 = 6$

21. c) Sendo $4{,}41 = 2{,}1^2$ e $2{,}56 = 1{,}6^2$, então:
$2\sqrt{4{,}41} - 3\sqrt{2{,}56} = 2 \cdot 2{,}1 - 3 \cdot 1{,}6 = 4{,}2 - 4{,}8 = -0{,}6$

21. d) $5\sqrt{1{,}44} + 3\sqrt[3]{0{,}343} = 5\sqrt{1{,}2^2} + 3\sqrt[3]{0{,}7^3} =$
$= 5 \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 0{,}7 = 6 + 2{,}1 = 8{,}1$

22. a) $3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (3 + 1 - 6) \cdot \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

22. b) $4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{3} =$
$= (4 - 2) \cdot \sqrt{2} + (6 + 9) \cdot \sqrt{3} =$
$= 2\sqrt{2} + 15\sqrt{3}$

22. c) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt[5]{3} =$
$= (2 + 3) \cdot \sqrt[5]{3} + (-2 + 3) \cdot \sqrt{3} =$
$= 5\sqrt[5]{3} + \sqrt{3}$

22. d) $3 + \sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} = 10 + (1 - 5) \cdot \sqrt{2} = 10 - 4\sqrt{2}$

23. a) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{3^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

23. b) $4\sqrt{63} - \sqrt{7} = 4 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 7} - \sqrt{7} = 4 \cdot 3\sqrt{7} - \sqrt{7} =$
$= 12\sqrt{7} - \sqrt{7} = 11\sqrt{7}$

23. c) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} - \sqrt{2 \cdot 6^2} =$
$= 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

23. d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$
$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

24. a) $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
Então, a medida do perímetro é $10\sqrt{3}$.

24. b) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 2^2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot (2^2)^2} =$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
Então, a medida do perímetro é $9\sqrt{2}$.

26. a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{5 \cdot 6} = \sqrt[3]{30}$

26. b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

26. c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

26. d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

26. e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

26. f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}$

27. a) $\sqrt{5} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{5} + 5$

27. b) $\left(3\sqrt{2} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} + 3\right) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 6 =$
$= 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 6 = 6 + 7\sqrt{2} - 6 = 7\sqrt{2}$

27. c) $\left(\sqrt{3} + 2\right) \cdot \left(2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3} =$
$= 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3}$

28. a) A medida do perímetro é dada por:
$\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
A medida da área da figura é dada por:
$\sqrt{3} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{6}$

28. b) A medida do perímetro é dada por:
$2\sqrt{2} + \sqrt{10} + 4\sqrt{2} + \sqrt{10} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
A medida da área da figura é dada por:
$\frac{\left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{8 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2} =$
$= \frac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{2} = 8 + 4 = 12$

29. a) $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3} = \sqrt{4} = 2$

29. b) $\sqrt{50} : \sqrt{2} = \sqrt{50 : 2} = \sqrt{25} = 5$

29. c) $12\sqrt[3]{-6} : 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{(-6) : 2} = 4\sqrt[3]{-3}$

29. d) $\sqrt[3]{6} : \sqrt{3} = \sqrt[6]{6^2} : \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{\frac{36}{27}} = \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

30. a) $\left(\sqrt{18} + \sqrt{98} + \sqrt{200}\right) : \left(2\sqrt{2} + \sqrt{8}\right) =$
$= \left(\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} + \sqrt{2 \cdot 10^2}\right) : \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2^3}\right) =$
$= \left(3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\right) : \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{2} : 4\sqrt{2} = 5$

30. b) $\left(\sqrt{150} - \sqrt{24}\right) : \left(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2}\right) =$
$= \left(\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} - \sqrt{2^3 \cdot 3}\right) : \left(2\sqrt{2^3} - 3\sqrt{2}\right) =$
$= \left(5\sqrt{6} - 2\sqrt{6}\right) : \left(4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right) =$
$= 3\sqrt{6} : \sqrt{2} = 3\sqrt{6 : 2} = 3\sqrt{3}$

30. c) $\left(10\sqrt{27} + 10\sqrt{3}\right) : 10\sqrt{3} = \left(10\sqrt{3^3} + 10\sqrt{3}\right) : \left(10\sqrt{3}\right) =$
$= \left(30\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\right) : 10\sqrt{3} = 40\sqrt{3} : 10\sqrt{3} = 4$

30. d) $\left(20\sqrt{10} + 10\sqrt{18}\right) : 2\sqrt{2} = \left(20\sqrt{10} + 10\sqrt{2 \cdot 3^2}\right) : 2\sqrt{2} =$
$= \left(20\sqrt{10} + 30\sqrt{2}\right) : 2\sqrt{2} = \left(20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + 30\sqrt{2}\right) : 2\sqrt{2} =$
$= 10\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{5} + 3\right) : 2\sqrt{2} = 5 \cdot \left(2\sqrt{5} + 3\right) =$
$= 10\sqrt{5} + 15$

31. $p \cdot q - p = \left(3 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) - \left(3 + \sqrt{2}\right) =$
$= 6 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 - 3 - \sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2}$
Alternativa **a**.

32. $a \cdot b = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$
Alternativa **a**.

33. a) $\left(\sqrt{201} + \sqrt{199}\right) \cdot \left(\sqrt{201} - \sqrt{199}\right) =$
$= \sqrt{201^2} - \sqrt{201} \cdot \sqrt{199} + \sqrt{201} \cdot \sqrt{199} - \sqrt{199^2} =$
$= 201 - 199 = 2$

$\left(\sqrt{31,4} + \sqrt{29,4}\right) \cdot \left(\sqrt{31,4} - \sqrt{29,4}\right) =$
$= \sqrt{31,4^2} - \sqrt{31,4} \cdot \sqrt{29,4} + \sqrt{31,4} \cdot \sqrt{29,4} - \sqrt{29,4^2} =$
$= 31,4 - 29,4 = 2$

$\left(\sqrt{89} + \sqrt{82}\right) \cdot \left(\sqrt{89} - \sqrt{82}\right) =$
$= \sqrt{89^2} - \sqrt{89} \cdot \sqrt{82} + \sqrt{89} \cdot \sqrt{82} - \sqrt{82^2} =$
$= 89 - 82 = 7$

33. b) Para os números 7 e 5, por exemplo, temos:
$\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) = 7 - \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - 5 =$
$= 7 - 5 = 2$

Espera-se que os estudantes concluam que o resultado da operação é sempre a diferença entre os radicandos.

34. a) $\left(\sqrt{15}\right)^2 = \sqrt{15^2} = 15$

34. b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = \sqrt[3]{3^3} = 3$

34. c) $\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 3^2\sqrt{7^2} = 9 \cdot 7 = 63$

34. d) $\left(3\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3^4 \cdot \sqrt[4]{3^4} = 81 \cdot 3 = 243$

34. e) $\left(\sqrt{10}\right)^3 = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$

34. f) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4 = 2^4 \cdot \sqrt[3]{3^4} = 16 \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 16 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 48\sqrt[3]{3}$

35. a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$
$= 7 + 2 \cdot \sqrt{21} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}$

35. b) $\left(3 - \sqrt{7}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{7} + 7 =$
$= 16 - 6\sqrt{7}$

36. $A = \left(-\sqrt{3}\right)^4 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 2 = \sqrt{3^4} + \sqrt{3^2} + 2 =$
$= \sqrt{3^2 \cdot 3^2} + 3 + 2 = 3 \cdot 3 + 3 + 2 = 14$

37. a) $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10} = \sqrt[4]{10}$

37. b) $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3 \cdot 2]{3} = \sqrt[6]{3}$

37. c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2} = \sqrt[8]{2}$

37. d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \sqrt[3 \cdot 3 \cdot 2]{3} = \sqrt[18]{3}$

37. e) $\sqrt[6]{\sqrt{5^3}} = \sqrt[6 \cdot 2]{5^3} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[4]{5}$

37. f) $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2^4}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

37. g) $\sqrt{\sqrt{15^4}} = \sqrt[2 \cdot 2]{15^4} = \sqrt[4]{15^4} = 15$

37. h) $\sqrt[4]{3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\sqrt{3^2 \cdot 5}} = \sqrt[4 \cdot 2]{45} = \sqrt[8]{45}$

38. a) Verdadeira, pois: $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[3 \cdot 2]{11} = \sqrt[6]{11}$

38. b) Falsa, pois: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2} = \sqrt[6]{2}$

38. c) Verdadeira, pois: $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1024}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2^{10}} = \sqrt[8]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^5}$

38. d) Verdadeira, pois: $\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3 \cdot 2]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

39. Para o denominador da expressão $\frac{15}{4\sqrt{3}}$ ser racional, podemos multiplicá-lo por $\sqrt{3}$, pois:

$$\frac{15}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{4\sqrt{3^2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{15\sqrt{3}}{12}$$

40. Os dois termos da expressão podem ser multiplicados por $\sqrt[3]{5^2}$, por exemplo, para obter uma expressão cujo denominador seja um número racional, pois:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{10\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

41. a) $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

41. b) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

41. c) $\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

41. d) $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

41. e) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5} = \sqrt[3]{5^2}$

41. f) $\frac{4}{\sqrt[8]{2^5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{2^5} \cdot \sqrt[8]{2^3}} = \frac{4\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{2^8}} = \frac{4\sqrt[8]{2^3}}{2} = 2\sqrt[8]{2^3}$

42. a) $\frac{3}{\sqrt{5}} \simeq \frac{3}{2,236} \simeq 1,342$

42. b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \simeq \dfrac{3 \cdot 2{,}236}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{6{,}708}{5} \simeq 1{,}342$

43. $\dfrac{2}{\sqrt{10} - 3} \simeq \dfrac{2}{3{,}162 - 3} = \dfrac{2}{0{,}162} \simeq 12{,}346$

44. A medida da área da região retangular, em cm², é dada por:

$$A = 5\sqrt{2} \cdot x \Rightarrow 10 = 5\sqrt{2} \cdot x \Rightarrow \frac{10}{5} = \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow 2 = \sqrt{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Logo, $x = \sqrt{2}$ cm.

Pense mais um pouco...

Página 54

a) Em um cubo, as medidas da largura, da altura e do comprimento são iguais. Se Bruno usar a medida da aresta de dois cubos para as medidas da altura, da largura e do comprimento, usará um total de 8 cubos para formar o cubo maior; se Bruno usar a medida da aresta de três cubos para as medidas da altura, da largura e do comprimento, usará um total de 27 cubos para formar o cubo maior; se Bruno usar a medida da aresta de quatro cubos para as medidas da altura, da largura e do comprimento, usará um total de 64 cubos para formar o cubo maior. Logo, se Bruno tem apenas 30 desses cubos, ele deve usar 27 deles para formar o maior cubo possível.

b) O lado do cubo maior medirá $6\sqrt{7}$ cm, pois $3 \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$. Assim, a medida do volume será $1\,512\sqrt{7}$ cm³, pois:

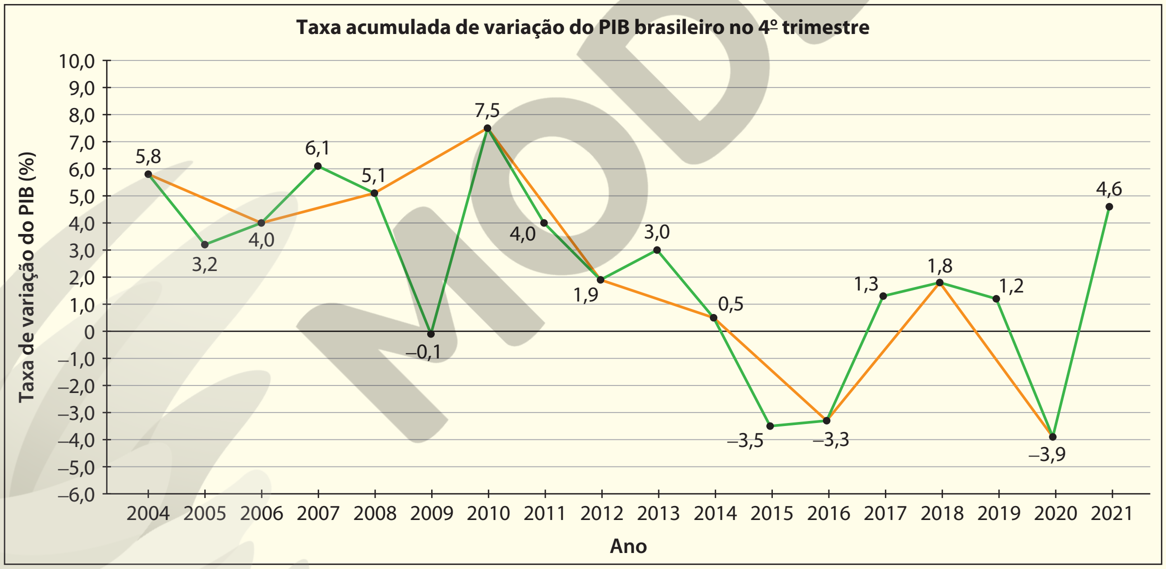
$$\left(6\sqrt{7}\right)^3 = 6\sqrt{7} \cdot 6\sqrt{7} \cdot 6\sqrt{7} = 216 \cdot \sqrt{7^3} = 216 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 7} = 216 \cdot 7 \cdot \sqrt{7} = 1\,512\sqrt{7}$$

Trabalhando a informação

1. a) O índice percentual foi maior em 2010, pois é o ano que apresenta a maior taxa de variação (7,5%). O índice percentual foi menor em 2020, pois é o ano que apresenta a menor taxa de variação (–3,9%).

1. b) Não, de acordo com os dados, a taxa de variação do PIB sempre foi diferente de zero nesse período, ou seja, sempre houve oscilação para mais ou para menos.

1. c)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

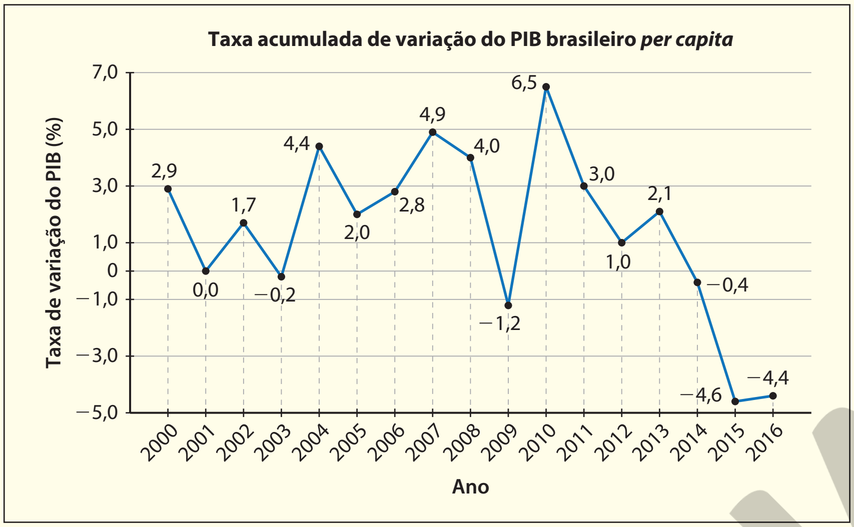
Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/industria/9300-contasnacionais-trimestrais.html?edicao=20920&t=series-historicas. Acesso em: 24 jul. 2022.

Ao comparar os dois gráficos, os estudantes poderão perceber que o gráfico de linha que construíram é diferente do original e que, com a taxa de variação do PIB indicada de dois em dois anos, algumas informações são perdidas. Por exemplo, se analisarmos os anos de 2008 a 2010, observamos um crescimento do PIB de 2,4% (7,5 – 5,1 = 2,4); mas, em 2009, a taxa de variação do PIB foi de –0,1%. Ou seja, entre 2008 e 2009 houve uma queda do PIB de 5,2% (–0,1 – 5,1 = –5,2), havendo recuperação de 2009 a 2010.

2. a) O índice percentual foi maior em 2010, pois nesse ano o PIB apresentou maior taxa de variação (6,5%). O índice percentual foi menor em 2015, pois nesse ano o PIB apresentou menor taxa de variação (– 4,6%).

2. b) Sim, no ano de 2001, a taxa de variação do PIB chegou a zero; portanto, podemos concluir que, nesse ano, o PIB não cresceu nem diminuiu.

2. **c)** Uma sugestão de gráfico é apresentada a seguir.


Taxa acumulada de variação do PIB brasileiro *per capita*

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: IBGE. **Contas Nacionais Trimestrais**. Rio de Janeiro: IBGE, out./dez. 2016. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2121/cnt_2016_4tri.pdf. Acesso em: 26 maio 2022.

Exercícios complementares

1. Como $10^{-3} : 10^{6} = 10^{-9}$, a medida corresponde a 10^{-9} m, que equivale a 1 nanômetro.

2. O diâmetro da Terra na linha do Equador mede aproximadamente 12 756 km ou aproximadamente $1{,}28 \cdot 10^4$ km. O diâmetro do Sol mede aproximadamente $1{,}4 \cdot 10^6$ km.

Assim, 1 centésimo de $1,4 \cdot 10^6$ km corresponde a:

$$\frac{1{,}4 \cdot 10^6}{10^2} = 1{,}4 \cdot 10^{6-2} = 1,4 \cdot 10^4$$

Como $1,4 \cdot 10^4$ km é próximo de $1{,}28 \cdot 10^4$ km, a informação é coerente.

3. **a)** O armazenamento disponível é 1,2 GB. Sabendo que 1 GB = 1 000 MB ⇒

$\Rightarrow 1 \text{ MB} = \dfrac{1}{1000}$ GB, e que 1 MB = 1 000 kB ⇒ $1 \text{ kB} = \dfrac{1}{1000}$ MB, temos:

$$21{,}5 \text{ MB} = \frac{21{,}5}{1000} \text{ GB} = 0{,}0215 \text{ GB}$$

$$33\,450 \text{ kB} = \frac{33450}{1000} \text{ MB} = 33{,}45 \text{ MB} = \frac{33{,}45}{1000} \text{ GB} = 0{,}03345 \text{ GB}$$

$$318 \text{ MB} = \frac{318}{1000} \text{ GB} = 0{,}318 \text{ GB}$$

$$104 \text{ MB} = \frac{104}{1000} \text{ GB} = 0{,}104 \text{ GB}$$

$$43\,500 \text{ kB} = \frac{43500}{1000} \text{ MB} = 43{,}5 \text{ MB} = \frac{43{,}5}{1000} \text{ GB} = 0{,}0435 \text{ GB}$$

$$99{,}5 \text{ MB} = \frac{99{,}5}{1000} \text{ GB} = 0{,}0995 \text{ GB}$$

$$110{,}55 \text{ MB} = \frac{110{,}55}{1000} \text{ GB} = 0{,}11055 \text{ GB}$$

Então, os vídeos enviados por Caio, juntos, tinham 0,7305 GB, pois:
$0{,}0215 + 0{,}03345 + 0{,}318 + 0{,}104 + 0{,}0435 + 0{,}0995 + 0{,}11055 = 0{,}7305$
Portanto, o celular de Andréa tinha capacidade para receber todos os vídeos enviados por Caio.

3. **b)** Poderia receber 0,4695 GB, pois $1{,}2 - 0{,}7305 = 0{,}4695$ e
$0{,}4695 \text{ GB} = (0{,}4695 \cdot 1\,000) \text{ MB} = 469{,}5 \text{ MB}$.

4. Sabemos que 1 ua $\simeq 1{,}5 \cdot 10^8$ km e 1 ano-luz $\simeq 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m.
Assim, as medidas que completam cada linha da tabela são:

- Mercúrio: $6 \cdot 10^7$ km e $5{,}05 \cdot 10^{-10}$ ano-luz.

$0{,}4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^7$

$\dfrac{4{,}8 \cdot 10^3}{9{,}5 \cdot 10^{12}} \simeq 5{,}05 \cdot 10^{-10}$

- Vênus: 0,72 ua e $1{,}26 \cdot 10^{-9}$ ano-luz.

$\dfrac{1{,}08 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^8} = 0{,}72$

$\dfrac{1{,}2 \cdot 10^4}{9{,}5 \cdot 10^{12}} \simeq 1{,}26 \cdot 10^{-9}$

- Terra: $1{,}28 \cdot 10^4$ km

$1{,}35 \cdot 10^{-9} \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} \simeq 1{,}28 \cdot 10^4$

- Marte: $2{,}25 \cdot 10^8$ km e $6{,}8 \cdot 10^3$ km.

$1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 = 2{,}25 \cdot 10^8$

$7{,}16 \cdot 10^{-10} \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} \simeq 6{,}8 \cdot 10^3$

- Júpiter: 5,2 ua e $1{,}51 \cdot 10^{-8}$ ano-luz.

$\dfrac{7{,}8 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^8} = 5{,}2$

$\dfrac{1{,}43 \cdot 10^5}{9{,}5 \cdot 10^{12}} \simeq 1{,}51 \cdot 10^{-8}$

- Saturno: $1{,}43 \cdot 10^9$ km e $1{,}26 \cdot 10^{-8}$ ano-luz.

$9{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8$ km $\simeq 1{,}43 \cdot 10^9$ km

$\dfrac{1{,}2 \cdot 10^5}{9{,}5 \cdot 10^{12}}$ ano-luz $\simeq 1{,}26 \cdot 10^{-8}$ ano-luz

- Urano: $2{,}87 \cdot 10^9$ km e $5{,}37 \cdot 10^{-9}$ ano-luz.

$19{,}1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \simeq 2{,}87 \cdot 10^9$

$\dfrac{5{,}1 \cdot 10^4}{9{,}5 \cdot 10^{12}} \simeq 5{,}37 \cdot 10^{-9}$

- Netuno: 30 ua e $4{,}9 \cdot 10^4$ km.

$\dfrac{4{,}5 \cdot 10^9}{1{,}5 \cdot 10^8} = 30$

$5{,}16 \cdot 10^{-9} \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} \simeq 4{,}9 \cdot 10^4$

7. Para fazer essa representação, basta construir um triângulo retângulo com catetos medindo 4 u e 1 u, em que u indica a unidade de medida de comprimento, sendo 1 u a distância entre 0 e 1 na reta numérica considerada. A hipotenusa desse triângulo medirá $\sqrt{17}$ u, pois $1^2 + 4^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2$. Assim, com uma abertura do compasso igual à medida da hipotenusa desse triângulo, marcamos a posição do número $\sqrt{17}$ na reta numérica.

8. a) A soma das medidas das arestas é $(12 + 12\sqrt{2})$ cm.

$4 \cdot \left(\sqrt{2}\right) + 4 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) + 4 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= 4\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$

8. b) Há dois tipos de face lateral; portanto, a soma das medidas das áreas pode ser dada por:

$2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2$

$A_1 = \sqrt{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{4} = \sqrt{2} + 2$

$A_2 = \sqrt{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{4} = 2\sqrt{2} + 2$

Então, a soma das medidas das áreas das faces laterais é $\left(8 + 6\sqrt{2}\right)$ cm², pois:

$2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 = 2\left(2 + \sqrt{2}\right) + 2\left(2 + 2\sqrt{2}\right) =$

$= 4 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} = \left(8 + 6\sqrt{2}\right)$

8. c) A medida de volume é $\left(6 + 4\sqrt{2}\right)$ cm^3, pois:

$\sqrt{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{4}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 =$

$= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$

9. Primeiro vamos converter a medida da distância a ser percorrida pelo robô de metro (m) para centímetro (cm). Sendo 1 m = 100 cm, temos:

$18{,}5\sqrt{3}$ m $= (18{,}5\sqrt{3} \cdot 100)$ cm $= 1\,850\sqrt{3}$ cm

Portanto, o robô deverá dar 37 passos de $50\sqrt{3}$ cm para percorrer essa distância, pois:

$\dfrac{1850\sqrt{3}}{50\sqrt{3}} = 37$

10. a) $\dfrac{8}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

10. b) $\dfrac{10}{\sqrt{3} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{10\sqrt{3} + 10}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \dfrac{10\sqrt{3} + 10}{3 - 1} =$

$= \dfrac{10\sqrt{3} + 10}{2} = \dfrac{10\left(\sqrt{3} + 1\right)}{2} = 5\left(\sqrt{3} + 1\right)$

10. c) $\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5} + 3\sqrt{25}}{\sqrt{25}} = \dfrac{5\sqrt{5} + 3 \cdot 5}{5} =$

$= \dfrac{5\sqrt{5} + 15}{5} = \dfrac{5\left(\sqrt{5} + 3\right)}{5} = \sqrt{5} + 3$

11. Como $\dfrac{26 \cdot \sqrt{146}}{100} = 0{,}26 \cdot \sqrt{146} \simeq 0{,}26 \cdot 12{,}08304597 \simeq$ $\simeq 3{,}1415919522$, considerando $\pi = 3{,}1415927...$, percebemos que os números são iguais até a quinta casa decimal.

Verificando

1. Como 1 *petabyte* equivale a 10^{15} *bytes*, temos que a capacidade do HD é $120 \cdot 10^{15}$ *bytes*.

Alternativa **c**.

2. $5^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\frac{5}{2}} = 5^{\frac{3}{4}} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}} = 5^{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = 5^{\frac{9 + 10}{12}} =$

$= 5^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{5^{19}}$

Alternativa **a**.

3. $\dfrac{b \cdot \sqrt[9]{a^6}}{\sqrt[6]{c^{14}}} = \dfrac{b^1 \cdot a^{\frac{6:3}{9:3}}}{c^{\frac{14:2}{6:2}}} = \dfrac{b^1 \cdot a^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{7}{3}}} = \dfrac{b^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{7}{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{b^3 \cdot a^2}}{\sqrt[3]{c^7}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{b^3 \cdot a^2}{c^7}}$

Alternativa **d**.

4. A medida do perímetro é dada pela adição das medidas dos lados do quadrilátero.

$$\sqrt{12} + \sqrt{48} + \sqrt{27} + \sqrt{21} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{4^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 3} +$$
$$+ \sqrt{3 \cdot 7} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} =$$
$$= 9\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3}\left(9 + \sqrt{7}\right)$$

Alternativa **c**.

5. $a \cdot b = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[6]{2} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{12}} \cdot 2^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{2^2} =$

$$= \sqrt[12]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[12]{27 \cdot 4} = \sqrt[12]{108}$$

Alternativa **b**.

6. Considerando x a medida da base do retângulo, temos:

$$\sqrt{1550} = x \cdot \sqrt{62} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{1550}}{\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{1550}{62}} = \sqrt{25} = 5$$

Então a base mede 5 cm.

Alternativa **b**.

7. O volume mede 250 cm^3, pois:

$$\left(5\sqrt[6]{4}\right)^3 = 5^3\left(\sqrt[6]{4}\right)^3 = 125 \cdot \sqrt[6]{4^3} = 125 \cdot \sqrt[2]{4} = 125 \cdot 2 = 250$$

Alternativa **c.**

8. $\sqrt{9 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt{9 - \sqrt{34 + 2}} = \sqrt{9 - \sqrt{36}} =$

$$= \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$$

Alternativa **d.**

9. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{60} - \sqrt{36}}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 15} - 6}{5 - 3} =$

$$= \frac{2\sqrt{15} - 6}{2} = \frac{2\left(\sqrt{15} - 3\right)}{2} = \sqrt{15} - 3$$

Alternativa **c.**

Capítulo 3 – Grandezas proporcionais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Determinar a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como: gramatura de papel, velocidade média, densidade demográfica, entre outras.
- Resolver problemas envolvendo razões entre grandezas de espécies diferentes.
- Reconhecer relações de proporcionalidade entre duas grandezas.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais.
- Resolver e elaborar problemas por meio da regra de três.
- Aplicar a relação de proporcionalidade na obtenção da medida de arcos de circunferência.
- Comparar gráficos de barras envolvendo cálculo de razões.
- Construir gráficos de barras e de colunas com base em pesquisa sobre expectativa de vida.

Este capítulo trata do estudo de razões entre grandezas de naturezas diferentes e da proporcionalidade entre grandezas. São apresentadas estratégias de resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, considerando problemas que tenham a mesma estrutura e que envolvam a variação entre duas ou mais grandezas dependentes. Esse trabalho contribui para que os estudantes relacionem aspectos quantitativos em diferentes situações, seja na Matemática ou em diferentes áreas de conhecimento. Nesse aspecto, colabora-se para o desenvolvimento das **competências específicas 2**, **3** e **6** e das **competências gerais 2** e **4**.

Algumas das situações trabalhadas exploram temáticas relacionadas ao mundo do trabalho, como a situação 2 das páginas 68 e 69, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 6** e da **competência específica 7**.

Na seção *Trabalhando a informação* são propostas atividades relacionadas à construção de gráficos com a temática Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 8** e das **competências específicas 4** e **7**.

Na página de *Abertura* é apresentada a imagem que propõe uma conversa sobre a importância do grafite como forma de manifestação cultural e artística, o que contribui para o trabalho com a **competência geral 3**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Os conceitos e as atividades envolvendo o estudo de proporcionalidade entre grandezas são o foco deste capítulo, desenvolvendo a Unidade Temática **Álgebra** com os temas razão entre grandezas de espécies diferentes, grandezas direta ou inversamente proporcionais e regra de três, ampliando os conhecimentos construídos em anos anteriores e em especial no 8º ano (EF08MA12 e EF08MA13) e contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF09MA07) e (EF09MA08).

As articulações são feitas com a Unidade Temática **Números** por meio de cálculos e problemas envolvendo números reais, com a Unidade Temática **Geometria** na seção *Para saber mais*, que trata de medida de arco de uma circunferência, favorecendo o trabalho com a habilidade (EF09MA11). A articulação com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística** está na comparação de gráficos de barras e na análise de texto e construção de gráficos de barras e de colunas, temas das seções *Trabalhando a informação*, ampliando o trabalho feito em anos anteriores e contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF09MA22).

Comentários e resoluções

Apresentamos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas Orientações didáticas que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

b) Com o dobro de artistas igualmente hábeis, eles farão o serviço em metade do tempo, ou seja, 5 dias.

c) São usados 25 L para pintar um mural com área medindo 250 m^2 ($25 \cdot 10 = 250$). O segundo mural tem área medindo 1 000 m^2 ($20 \cdot 50 = 1\,000$), como a área do mural aumentou 4 vezes, então será necessário 4 vezes a quantidade de tinta, ou seja, 100 L ou 100 latas de 1 L pois: $4 \cdot 25 = 100$

Exercícios propostos

1. Considerando a relação:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do tempo gasto}}$$

Então, basta dividir o número de quilômetros pelo número de dias, 155 km/dia, pois $48\,478 : 312 \simeq 155$.

2. Tomando 30 minutos = 0,5 hora, 5 horas e 30 minutos equivalem a 5,5 horas. Então, a medida da velocidade média é $\frac{300 \text{ km}}{5{,}5 \text{ h}} \simeq 55$ km/h.

3. A densidade demográfica é calculada por:

$$\frac{\text{número de habitantes}}{\text{medida da área da região}}$$

Em 2021, a população aproximada era de 11 466 608 habitantes. Tomando n como o número de habitantes, temos:

$$40{,}704 = \frac{n}{281\,707{,}151} \Rightarrow n \simeq 11\,466\,608$$

4. O nível aumentou 80 cm^3 ($1\,080 - 1\,000 = 80$). Para um material, a relação $\frac{\text{medida de massa}}{\text{medida de volume}}$ é constante e indica a densidade absoluta da matéria, que é 10,5 g/cm^3 no caso da prata. Então, para a coroa, fazendo $\frac{\text{medida de massa}}{\text{medida de volume}} = \frac{840}{80} = 10{,}5$; assim, a medida da densidade do material da coroa é a mesma medida de densidade da prata; portanto, a coroa é de prata.

5. Considerando a relação $\frac{\text{medida de massa}}{\text{medida de volume}}$, sendo m a medida da massa, em grama, e o volume dado em centímetro cúbico, temos:

$$2{,}6 = \frac{m}{(12{,}4 \cdot 1000)} \Rightarrow m = 12{,}4 \cdot 2{,}6 \cdot 1\,000 = 32{,}24 \cdot 1\,000$$

Como $(32{,}24 \cdot 1\,000)$g = 32,24 kg, então a massa da pedra de mármore mede 32,24 kg.

6. Vitória gastou 35 L para percorrer 385 km, então o consumo médio será:

$$\frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do volume consumido}} = \frac{385 \text{ km}}{35 \text{ L}} = 11 \text{ km/L}$$

7. a) Em 30 dias o consumo médio foi de 30 m^3, ($5\,973 - 5\,943 = 30$). Como 1 m^3 = 1 000 L, o consumo médio da residência em 30 dias foi de 30 000 L ($30 \cdot 1\,000 = 30\,000$). Assim, o consumo médio nesse período foi de 1 000 L/dia.

$$\frac{\text{medida do volume consumido}}{\text{quantidade de dias}} = \frac{30\,000}{30} = 1\,000$$

7. b) Segundo o recomendado pela OMS, uma residência de 5 moradores deveria consumir 550 L ($5 \cdot 110 = 550$). Logo, 450 L ($1\,000 - 550 = 450$) de água foram consumidos a mais do que o recomendado. Cada pessoa excede em 90 L, pois $450 : 5 = 90$. Ou seja, cada pessoa consome aproximadamente 82% a mais do que o necessário.

$$\frac{110}{100} = \frac{90}{x} \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 100}{110} = \frac{900}{11} \simeq 82$$

8. O volume da piscina mede 150 m^3 ($15 \cdot 5 \cdot 2 = 150$). Como 1 m^3 = 1 000 L, a medida do volume da piscina é igual a 150 000 L ($150 \cdot 1\,000 = 150\,000$).

Como a bomba despeja a água à razão de 2 000 litros por hora, temos:

$$2\,000 = \frac{150\,000}{t} \Rightarrow t = 75$$

Logo, o tempo será de 75 horas.

9. a) Sim, pois a embalagem maior deveria custar R$ 42,75, se seguisse a mesma relação da menor (preço pago por quilograma).

$(11{,}40 : 1{,}2) \cdot 4{,}5 = 42{,}75$

9. b) Na embalagem maior o preço por quilograma é de R$ 9,70 e na embalagem menor o preço por quilograma é de R$ 9,50.

9. c) Não, pois, o preço pago por quilograma seria R$ 11,40, e o da embalagem maior é R$ 9,70.

$43{,}65 : 4{,}5 = 9{,}7$

9. d) Resposta pessoal.

11. a) Inversamente proporcionais. Por exemplo, se a velocidade média é duplicada, o tempo é reduzido pela metade.

11. b) Diretamente proporcionais. Por exemplo, se o volume é duplicado, a massa também é duplicada.

11. c) Não são proporcionais. Por exemplo, se a idade é duplicada, não se pode afirmar que a massa será duplicada.

12. a) De acordo com o quadro, a velocidade é 48 km/h.

12. b) De acordo com o quadro, o tempo é 1,5 h.

12. c) Como ao duplicar a velocidade, o tempo é reduzido pela metade, então essas grandezas são inversamente proporcionais.

12. d) $120 \cdot 1 = 120$; $80 \cdot 1{,}5 = 120$; $60 \cdot 2 = 120$; $48 \cdot 2{,}5 = 120$. Os produtos obtidos têm o mesmo valor numérico, o que confirma que o trajeto percorrido foi o mesmo, de 120 km. Relembre os estudantes que a velocidade média pode ser calculada por $\frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do tempo gasto}}$; portanto, conclui-se que os resultados representam a grandeza distância percorrida.

15. O total de pontos entre os primeiros colocados foi 18 ($10 + 8 = 18$). Como o total dos prêmios foi R$ 3 600,00, então cada ponto corresponde a uma premiação de R$ 200,00 ($3\,600 : 18 = 200$). Assim, os prêmios foram: R$ 2 000,00 para o primeiro colocado ($10 \cdot 200 = 2\,000$) e R$ 1 600,00 para o segundo colocado ($8 \cdot 200 = 1\,600$).

16. $\frac{4}{10} = \frac{8}{b} \Rightarrow 4b = 80 \Rightarrow b = 20$

$\frac{4}{10} = \frac{a}{25} \Rightarrow 10a = 100 \Rightarrow a = 10;$

$\frac{4}{10} = \frac{20}{c} \Rightarrow 4c = 200 \Rightarrow c = 50$

18. a) Considere que as razões são tais que $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = r$.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$x = 3r$; $y = 4r$; $z = 5r$

Pela medida do perímetro, temos:

$x + y + z = 18 \text{ cm} \Rightarrow 3r + 4r + 5r = 18 \text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12r = 18 \text{ cm} \Rightarrow r = 1{,}5 \text{ cm}$

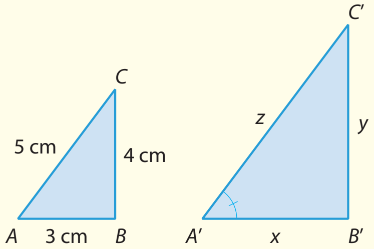
Assim, temos:

$x = 3 \cdot r = 3 \cdot 1{,}5 \text{ cm} = 4{,}5 \text{ cm}$

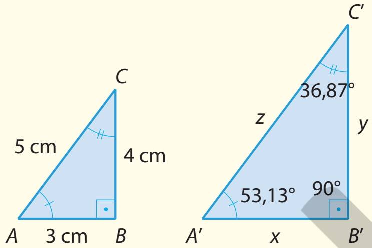
$y = 4 \cdot r = 4 \cdot 1{,}5 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$z = 5 \cdot r = 5 \cdot 1{,}5 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$

18. b)



18. c)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

19. a) Quatro colheres de farinha de trigo é o dobro do indicado originalmente. Logo, será necessário o dobro de ovos: 6 ovos ($2 \cdot 3 = 6$). Ao usar 9 ovos, a quantia de ovos está sendo triplicada, então a quantia de farinha também deverá ser triplicada: 6 colheres de farinha ($2 \cdot 3 = 6$).

19. b) Quadruplicando a receita, serão necessárias 8 colheres de farinha de trigo e 12 ovos, pois $4 \cdot 2 = 8$ e $4 \cdot 3 = 12$.

21. a) Na metade do tempo, ou seja, 14 dias.

21. b) Em $\frac{1}{4}$ do tempo, ou seja, 7 dias.

21. c) As grandezas são inversamente proporcionais.

23. a) Como o número de máquinas e o tempo para produção são grandezas inversamente proporcionais, o produto das duas quantidades deve ser igual ao produto expresso na primeira coluna: $1 \cdot 60 = 60$; Então: $60 = 2 \cdot a \Rightarrow a = 30$; $60 = b \cdot 15 \Rightarrow b = 4$; $60 = c \cdot 6 \Rightarrow c = 10$

23. b) De acordo com os dados apresentados, 1 máquina produz 36 litros de sorvete em 60 minutos, ou 1 hora. Portanto, com apenas 1 máquina, 108 litros de sorvete seriam produzidos em 3 horas.

$108 : 36 = 3$

23. c) Como 1 máquina faz 36 litros em 1 hora, para produzir 72 litros (o dobro) em 30 minutos (metade do tempo) seriam necessárias 4 máquinas.

24. a) $132 : 4 = 44$

24. b) Como $2 + 4 + 6 = 12$, as razões entre as quantidades correspondentes são iguais a $\frac{132}{12} = \frac{11}{1} = 11$. Portanto: $11 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 11 \cdot 2 = 22$; $11 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 44$; $11 = \frac{z}{6} \Rightarrow z = 66$

24. c) Sendo x, y e z as partes procuradas, $x + y + z = 132$, a proporção inversa indica que é possível escrever a relação $2x = 4y = 6z = r$. Por isso, $x = \frac{r}{2}$; $y = \frac{r}{4}$; e $z = \frac{r}{6}$. Portanto, $\frac{r}{2} + \frac{r}{4} + \frac{r}{6} = 132$ e, encontrando o denominador comum: $\frac{6r + 3r + 2r}{12} = \frac{1584}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 11r = 1\,584 \Rightarrow r = 144$

Logo: $x = 144 : 2 = 72$; $y = 144 : 4 = 36$; $z = 144 : 6 = 24$

26. a) O valor final x é diretamente proporcional a quantidade de metros de tecido, então: $\frac{9}{12{,}5} = \frac{117}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 \cdot x = 12{,}5 \cdot 117 \Rightarrow 9x = 1\,462{,}5 \Rightarrow x = 162{,}5$

Portanto, custam R$ 162,50.

26. b) Sendo x a quantidade procurada, temos:

$\frac{9}{x} = \frac{117}{109{,}5} \Rightarrow 117 \cdot x = 109{,}5 \cdot 9 \Rightarrow 117x = 985{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{985{,}5}{117} \simeq 8{,}423$

Portanto, é possível comprar 8,4 metros.

27. A medida total da massa da cana é diretamente proporcional à quantidade de litros de álcool produzidos; assim: $\frac{350}{8750} = \frac{5}{x} \Rightarrow 350 \cdot x = 5 \cdot 8750 \Rightarrow 350x = 43750 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{43750}{350} = 125$

Portanto, 125 toneladas.

28. a) O número de funcionários e o número de dias totais para cumprir o trabalho são inversamente proporcionais, assim: $\frac{45}{60} = \frac{x}{4} \Rightarrow 60 \cdot x = 45 \cdot 4 \Rightarrow 60x = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{180}{60} \Rightarrow x = 3$

Portanto, seriam 3 dias.

28. b) Pesquisa e elaboração pessoal. Em geral, para evitar desastres ambientais, são necessários planos de prevenção e de gestão de riscos, além da intensificação da fiscalização de rotina para garantir o bom funcionamento dos equipamentos de segurança da indústria em questão.

29. a) A quantidade de pães produzidos é diretamente proporcional à quantidade de farinha de trigo utilizada, assim: $\frac{400}{10} = \frac{x}{60} \Rightarrow 10 \cdot x =$

$= 400 \cdot 60 \Rightarrow 10x = 24\,000 \Rightarrow x = 2\,400$

Portanto, produzirá 2 400 pães.

29. b) Das informações do enunciado, temos:

Quantidade de pães	Quantidade de farinha (kg)
400	10
720	x

Portanto: $\frac{10}{x} = \frac{400}{720} \Rightarrow x \cdot 400 = 10 \cdot 720 \Rightarrow 400x =$

$= 7\,200 \Rightarrow x = \frac{7\,200}{400} \Rightarrow x = 18$

Ou seja, 18 kg.

30. Em 10 dias, são produzidas 1 500 rodas ($10 \cdot 150 = 1\,500$). Das informações do enunciado, temos:

Quantidade de rodas	Material perdido (g)
1	30
1 500	x

A quantidade de rodas produzidas é diretamente proporcional à massa de material perdido, assim:

$\frac{1}{1500} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 1\,500 \cdot 30 = 45\,000$

Portanto, a massa de material perdido é:

45 000 g = (45 000 : 1 000) kg = 45 kg.

31. a)

Tempo de viagem (h)	Velocidade (km/h)
4,5	80
x	90

A velocidade média é inversamente proporcional ao tempo gasto na viagem, assim:

$\frac{4{,}5}{x} = \frac{90}{80} \Rightarrow 90 \cdot x = 4{,}5 \cdot 80 \Rightarrow 90x = 360 \Rightarrow x = 4$

Portanto, 4 horas.

31. b)

Tempo de viagem (h)	Velocidade (km/h)
4,5	80
5	x

$\frac{4{,}5}{5} = \frac{x}{80} \Rightarrow 5 \cdot x = 4{,}5 \cdot 80 \Rightarrow 5x = 360 \Rightarrow x = 72$

Portanto, 72 km/h.

32. a)

Quantidade de torneiras	Tempo (min)
1	45
2	x

A quantidade de torneiras ligadas é inversamente proporcional ao tempo que se leva para encher o tanque, então: $\frac{1}{2} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 : 2 = 22{,}5$

Portanto, 22,5 minutos.

33. **a)** Em média, cada ônibus transporta 400 pessoas por dia, pois 240 000 : 600 = 400. Nesse cenário, a retirada de 200 ônibus levaria 80 000 pessoas a utilizar automóveis, pois 400 · 200 = 80 000. Considerando 4 pessoas por automóvel, são 20 000 veículos a mais circulando (80 000 : 4 = 20 000).

35.

Quantidade de fregueses	Quantidade de esfirras	Tempo (dias)
150	3 000	5
200	x	30

As grandezas são todas diretamente proporcionais, então: $\frac{3000}{x} = \frac{150}{200} \cdot \frac{5}{30} \Rightarrow \frac{3000}{x} = \frac{750}{6000} \Rightarrow$

$\Rightarrow 750x = 18\,000\,000 \Rightarrow x = \frac{18\,000\,000}{750} \Rightarrow x = 24\,000$

Portanto, 24 000 esfirras.

36.

Distância (km)	Tempo pedalando (dias)	Tempo por dia (h)
320	10	8
x	8	12

As grandezas são todas diretamente proporcionais, então: $\frac{320}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{320}{x} = \frac{80}{96} \Rightarrow 80x = 30\,720 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{30\,720}{80} \Rightarrow x = 384$

Portanto, 384 km.

37.

Quantidade de máquinas	Quantidade de panfletos	Tempo (h)
5	36 000	2
3	27 000	x

As grandezas quantidade de máquinas e tempo são inversamente proporcionais, e as grandezas quantidade de panfletos e tempo são diretamente proporcionais, então: $\frac{2}{x} = \frac{36\,000}{27\,000} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{108\,000}{135\,000} = \frac{108}{135} \Rightarrow 108x$

$= 270 \Rightarrow x = \frac{270}{108} \Rightarrow x = 2{,}5$

Portanto, 2,5 horas, ou seja, 2 horas e 30 minutos.

38.

Tempo (dias)	Quantidade de refeições por dia	Quantidade de amigos
6	4	9
x	3	12

As grandezas quantidade de refeições e quantidade de amigos são ambas inversamente proporcionais ao número de dias.

Então: $\frac{6}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{36}{36} = 1 \Rightarrow x = 6$

Portanto, 6 dias.

39.

Quantidade de tratores	Tempo (dias)	Número de horas por dia
4	10	8
2	x	10

As grandezas quantidade de tratores e número de horas por dia são ambas inversamente proporcionais ao tempo, por isso: $\frac{10}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{20}{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = 320 \Rightarrow x = 16$

Portanto, 16 dias.

40.

Tempo (h)	Quantidade de pessoas	Quantidade de caixas
4	9	360
3	x	510

A grandeza tempo é inversamente proporcional ao número de pessoas, por sua vez, a quantidade de caixas é diretamente proporcional ao número de pessoas, então:

$\frac{9}{x} = \frac{360}{510} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{1080}{2040} \Rightarrow 108x = 9 \cdot 204 = 1\,836 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1836}{108} \Rightarrow x = 17$

Portanto, 17 pessoas.

Pense mais um pouco...

Página 66

a) Para cada país, PIB *per capita* = $\frac{\text{PIB em dólar}}{\text{número de habitantes}}$.

Então, o PIB *per capita* da Argentina é aproximadamente 8 476 dólares, pois $\frac{383\,067\,000\,000}{45\,195\,777} \simeq 8\,476$. O PIB *per capita* do Brasil é aproximadamente 6 797 dólares, pois $\frac{1\,444\,733\,000\,000}{212\,559\,409} \simeq 6\,797$. O PIB *per capita* do Paraguai é aproximadamente 4 950 dólares, pois $\frac{35\,304\,000\,000}{7\,132\,530} \simeq$ $\simeq 4\,950$. O PIB *per capita* do Uruguai é aproximadamente 15 438 dólares, pois $\frac{53\,629\,000\,000}{3\,473\,727} \simeq 15\,438$. Dessa maneira, Uruguai foi o país com maior desenvolvimento econômico em 2020.

Página 70

a)

Dia	2º dia	4º dia	6º dia	8º dia	10º dia	12º dia	14º dia
Tempo de atraso (min)	4	8	12	16	20	24	28

b) 20 minutos.

c) 28 minutos.

d) Nesse caso, como o dobro de uma grandeza (número de dias) implica o dobro da outra (tempo de atraso), elas são diretamente proporcionais.

e) Nota-se que a relação entre *d* (número de dias) e *t* (tempo de atraso) é $t = 2d$; assim, quando $d = 22$, temos:

$t = 2 \cdot 22 = 44$

Portanto, o relógio ficará atrasado 44 minutos.

f) Como $t = 2 \cdot d$, tomando $d = 60$, então: $60 = 2d \Rightarrow d = 30$

Portanto, 30 dias.

Para saber mais

Páginas 75 e 76

3. a) Como o giro todo tem medida 360°, então a fração procurada é:

$$\frac{20}{360} \Rightarrow \frac{1}{18}$$

3. b) $\frac{45}{360} \Rightarrow \frac{1}{8}$

3. c) $\frac{90}{360} \Rightarrow \frac{1}{4}$

3. d) $\frac{180}{360} \Rightarrow \frac{1}{2}$

3. e) $\frac{135}{360} \Rightarrow \frac{3}{8}$

3. f) $\frac{270}{360} \Rightarrow \frac{3}{4}$

4. a) No relógio 3, $r = 20$ cm, e como 30° corresponde a $\frac{1}{12}$ da circunferência, então $C = \frac{2\pi r}{12} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{12} =$

$= \frac{125{,}6}{12} \simeq 10{,}47$; portanto, aproximadamente 10,47 cm.

4. b) 45° corresponde a $\frac{1}{8}$ da circunferência, então $C = \frac{2\pi r}{12} =$

$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{8} = \frac{125{,}6}{8} = 15{,}7$; portanto, 15,7 cm.

4. c) 90° corresponde a $\frac{1}{4}$ da circunferência, então $C = \frac{2\pi r}{4} =$

$= \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{4} = \frac{125{,}6}{4} = 31{,}4$; portanto, 31,4 cm.

4. d) 270° corresponde a $\frac{3}{4}$ da circunferência, então

$C = \frac{3 \cdot 2\pi r}{4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{4} = \frac{376{,}8}{4} = 94{,}2$;

portanto, 94,2 cm.

4. e) 180° corresponde a $\frac{1}{2}$ da circunferência, então $C = \frac{2\pi r}{2} =$

$= \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{2} = 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8$; portanto, 62,8 cm.

Página 82

1. a) Ficaria como representado a seguir:

: 4 : 5

Massa (kg)	20	5	1
Preço (R$)	32	8	1,6

: 4 : 5

2. a) R$ 2,50, pois:

: 18

Massa de banana (kg)	18	1
Preço (R$)	45	2,5

: 18

2. b) 10 L, pois:

: 2 · 4

Volume de gasolina (L)	4	2	8	8 + 2 = 10
Distância (km)	60	30	120	30 + 120 = 150

: 2 · 4

2. c) 11 760 lugares, pois:

: 50

: 2

Percentual	100	50	2	50 − 2 = 48
Número de lugares ocupados	24 500	12 250	490	12 250 − 490 = 11 760

: 2

: 50

2. **d)** R$ 209,00 pois:

: 5 : 10

Percentual	100	20	2	20 + 20 – 2 = 38
Valor (R$)	550	110	11	110 + 110 – 11 = 209

: 5 : 10

Trabalhando a informação

Páginas 66 e 67

1. Não, pois observando o gráfico, mesmo sem fazer contas, é possível notar que o número de médicos da região Norte é *menor* que o número de médicos do Centro Oeste ao mesmo tempo que o número de habitantes (população) da região Norte é *maior* do que o número de habitantes do Centro Oeste. Então, a densidade de médicos tende a ser menor na região Norte.

2. Basta, em cada caso, obter a razão entre número de médicos e grupos de mil habitantes por região.

$$d = \frac{\text{número de médicos}}{\text{grupos de mil habitantes}}$$

3. O total de médicos é 523 528, pois: 80 278 + 278 325 + + 44 658 + 96 303 + 23 964 = 523 528

A população é 210 855 692, pois: 18 672 591 + 57 374 243 + + 16 504 303 + 89 012 240 + 30 192 315 = 211 755 692

Então: $d = \frac{523528}{211755,692} \simeq 2,5$

Por isso, faltava aproximadamente 0,2 (2,7 – 2,5 = 0,2).

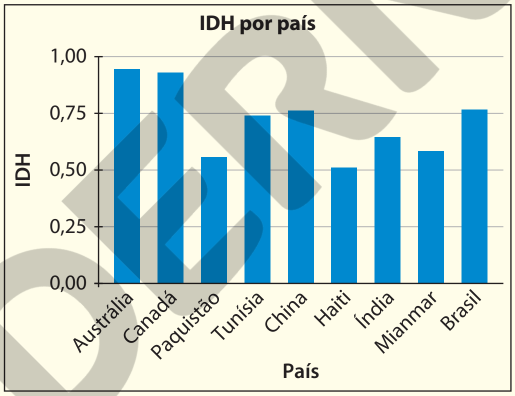
Páginas 83 e 84

1.

País	IDH	Comprimento da barra (cm)
Austrália	0,944	10
Canadá	0,929	$c = 9,8$
China	0,761	$ch = 8,1$
Tunísia	0,740	$t = 7,8$
Índia	0,645	$i = 6,8$
Mianmar	0,583	$m = 6,2$
Paquistão	0,557	$p = 5,9$
Haiti	0,510	$h = 5,4$

Dessa maneira:

- Canadá: $\frac{0,944}{0,929} = \frac{10}{c} \Rightarrow 0,944c = 9,29 \Rightarrow c = \frac{9,29}{0,944} \simeq 9,8;$
- Paquistão: $\frac{0,944}{0,557} = \frac{10}{p} \Rightarrow 0,944p = 5,57 \Rightarrow p = \frac{5,57}{0,944} \simeq 5,9;$
- Tunísia: $\frac{0,944}{0,740} = \frac{10}{t} \Rightarrow 0,944t = 7,4 \Rightarrow t = \frac{7,4}{0,944} \simeq 7,8;$
- China: $\frac{0,944}{0,761} = \frac{10}{ch} \Rightarrow 0,944ch = 7,61 \Rightarrow ch = \frac{7,61}{0,944} \simeq 8,1;$
- Haiti: $\frac{0,944}{0,510} = \frac{10}{h} \Rightarrow 0,944h = 5,1 \Rightarrow h = \frac{5,1}{0,944} \simeq 5,4;$
- Índia: $\frac{0,944}{0,645} = \frac{10}{i} \Rightarrow 0,944i = 6,45 \Rightarrow i = \frac{6,45}{0,944} \simeq 6,8;$
- Mianmar: $\frac{0,944}{0,583} = \frac{10}{m} \Rightarrow 0,944m = 5,83 \Rightarrow m = \frac{5,83}{0,944} \simeq$ $\simeq 6,2$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: HUMAN DEVELOPMENT REPORTS. **HDR 2020 Tables and Dashboards**. Disponível em: https://hdr.undp.org/data-center/documentation-and-downloads. Acesso em: 30 jun. 2022.

2. Utilizando dados referentes ao ano de 2019, divulgados pela ONU em 2020, os três maiores IDH eram da Noruega (IDH 0,957), Suíça (IDH 0,955) e Irlanda (IDH 0,955) e os três menores IDH eram de Chade (IDH 0,398), República Centro-Africana (IDH 0,397) e Níger (IDH 0,394).

País	IDH	Comprimento da barra (cm)
Noruega	0,957	10
Suíça	0,955	$s = 9,98$
Irlanda	0,955	$i = 9,98$
Chade	0,398	$c = 4,16$
República Centro-Africana	0,397	$r = 4,15$
Níger	0,394	$n = 4,12$

- Suíça: $\frac{0,957}{0,955} = \frac{10}{s} \Rightarrow 0,957s = 9,55 \Rightarrow s = \frac{9,55}{0,957} \simeq 9,98$;

- Irlanda: $\frac{0,957}{0,955} = \frac{10}{i} \Rightarrow 0,957s = 9,55 \Rightarrow s = \frac{9,55}{0,957} \simeq 9,98$;

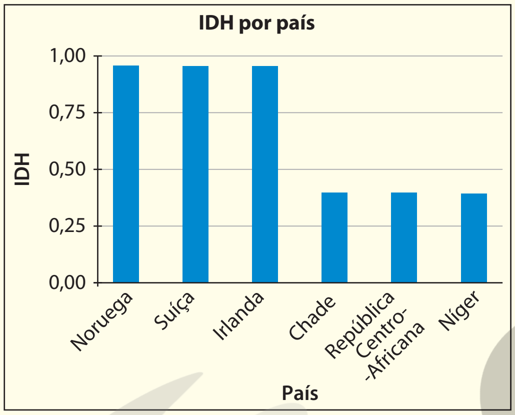
- Chade: $\frac{0,957}{0,398} = \frac{10}{c} \Rightarrow 0,957s = 3,98 \Rightarrow s = \frac{3,98}{0,957} \simeq 4,16$;

- República Centro-Africana: $\frac{0,957}{0,397} = \frac{10}{s} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 0,957s = 3,97 \Rightarrow s = \frac{3,97}{0,957} \simeq 4,15$;

- Níger: $\frac{0,957}{0,394} = \frac{10}{s} \Rightarrow 0,957s = 3,94 \Rightarrow s = \frac{3,94}{0,957} \simeq 4,12$

A seguir, um exemplo de gráfico.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: HUMAN DEVELOPMENT REPORTS. **HDR 2020 Tables and Dashboards**. Disponível em: https://hdr.undp.org/data-center/documentation-and-downloads. Acesso em: 30 jun. 2022.

Exercícios complementares

1. a) Velocidade média $= \frac{225 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 90$ km/h

1. b) $\frac{90 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{270 \text{ km}}{t} \Rightarrow t = 3$ h

1. c) $\frac{259}{14} = 18,5$ Portanto, 18,5 km/L.

2. Como a densidade demográfica é calculada por

$$\frac{\text{número de habitantes}}{\text{medida da área}} = \frac{27000 \cdot 10^3}{844453} \simeq$$

$$\simeq 0,03197 \cdot 10^3 = 31,97 \simeq 32$$

Portanto, aproximadamente 32 hab/km².

3.

Número de frangos	Quantidade de ração (kg)
1200	90
2000	x

As grandezas são diretamente proporcionais, assim:

$$\frac{1200}{2000} = \frac{90}{x} \Rightarrow 1200x = 180000 \Rightarrow 12x = 1800 \Rightarrow x = 150$$

Portanto, 150 kg.

4.

Área (m²)	Tempo (h)
5100	6
11900	x

As grandezas área e tempo são diretamente proporcionais, assim:

$$\frac{5100}{11900} = \frac{6}{x} \Rightarrow 5100x = 71400 \Rightarrow x = \frac{71400}{5100} = 14$$

Portanto, são 14 horas.

5.

Tempo de trabalho por dia (h)	Quantidade de trabalhadores	Tempo (dias)
8	3	15
9	2	x

As grandezas quantidade de trabalhadores e tempo de trabalho por dia são inversamente proporcionais à quantidade de dias necessários para realizar o mesmo serviço (meio muro), assim: $\frac{15}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{15}{x} = \frac{18}{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = 20$

Portanto, o muro foi construído em 35 dias (20 + 15 = 35).

6.

Quantidade de latinhas	Tempo (h)
1	3
x	24

As grandezas são diretamente proporcionais, então:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{24} \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} \Rightarrow x = 8$$

Portanto, 8 latinhas.

7.

Massa de papel (kg)	Quantidade de livros	Quantidade de páginas
6510	5000	280
x	4000	240

As grandezas são diretamente proporcionais, assim:

$$\frac{6510}{x} = \frac{5000}{4000} \cdot \frac{280}{240} \Rightarrow \frac{6510}{x} = \frac{1400000}{960000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1400x = 6249600 \Rightarrow x = \frac{62496}{14} = 4464$$

Portanto, 4464 kg de papel.

8. Chamando as idades do pai de x, do 1º filho de y e do 2º filho de z. Então, pela proporção, $\frac{x}{27} = \frac{y}{14} = \frac{z}{11} = r$; portanto, $x = 27r$, $y = 14r$ e $z = 11r$. Como $x + y + z = 104$, temos:

$$27r + 14r + 11r = 104 \Rightarrow 52r = 104 \Rightarrow r = \frac{104}{52} = 2$$

Desta maneira, com $r = 2$, então: $x = 27r \Rightarrow x = 27 \cdot 2 = 54$, $y = 14r \Rightarrow x = 14 \cdot 2 = 28$ e $z = 11r \Rightarrow x = 11 \cdot 2 = 22$

Alternativa **a**.

9. $\frac{x}{4} = 4y = r$

Sendo $x = 4r$ e $y = \frac{1}{4}r$, como $x + y = 204$, então:

$$4r + \frac{r}{4} = 204$$

Fazendo a adição de frações com denominadores comuns:

$16r + r = 816 \Rightarrow 17r = 816 \Rightarrow r = 48$

Como $x = 4r$, então o menor valor será y, pois:

$$y = \frac{1}{4}r \Rightarrow y = \frac{r}{4} \Rightarrow y = \frac{48}{4} \Rightarrow y = 12$$

Alternativa **b**.

10. Se a proporcionalidade direta se mantém para o total da população, então, temos:

$$\frac{7500}{3000} = \frac{21000}{x} \Rightarrow 75x = 210 \cdot 3\,000 = 630\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{630\,000}{75} \Rightarrow x = 8\,400$$

Portanto, 8 400 pessoas.

11.

Número de campos	Quantidade de pessoas
18	1 000 000
1	x

São grandezas diretamente proporcionais, então:

$$\frac{18}{1} = \frac{1\,000\,000}{x} \Rightarrow 18x = 1\,000\,000 \Rightarrow x = \frac{1\,000\,000}{18} \simeq 55\,556$$

Portanto, aproximadamente 55 556 pessoas.

12.

Quantidade de páginas	Quantidade de linhas	Quantidade de letras por linha
6	45	80
x	30	40

$$\frac{6}{x} = \frac{30}{45} \cdot \frac{40}{80} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{1200}{3600} \Rightarrow 36 \cdot 6 = 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x = 216 \Rightarrow x = 18$$

Portanto, o texto ocupará 18 páginas.

Alternativa **c**.

13.

Massa dos fios (kg)	Comprimento da fazenda (m)	Largura da fazenda (cm)
4	14	80
x	350	120

As grandezas são todas diretamente proporcionais. Então:

$$\frac{4}{x} = \frac{14}{350} \cdot \frac{80}{120} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{1120}{42000} \Rightarrow 112 \cdot x = 4 \cdot 4\,200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 112x = 16\,800 \Rightarrow x = \frac{16\,800}{112} \Rightarrow x = 150$$

Portanto, 150 kg.

Alternativa **b**.

Verificando

4. Os valores são tais que se formam as proporções:

x	9	24
4	6	y

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{6} \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{60} \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{24}{y} = \frac{9}{6} \Rightarrow 9y = 144 \Rightarrow y = \frac{144}{9} \Rightarrow y = 16$$

Alternativa **d**.

5. Como são inversamente proporcionais, então $3A = 2B = r$. Assim, $A = \frac{r}{3}$ e $B = \frac{r}{2}$. Tomando $A + B = 120$, temos: $\frac{r}{3} + \frac{r}{2} = 120$. Colocando em denominador comum e adicionando as frações, obtemos:

$$\frac{2r + 3r}{6} = \frac{720}{6} \Rightarrow 5r = 720 \Rightarrow r = \frac{720}{5} \Rightarrow r = 144$$

Então, $A = \frac{144}{3} = 48$ e $B = \frac{144}{2} = 72$.

Alternativa **a**.

6.

Quantidade de máquinas	Tempo (h)
14	6
24	x

Como são grandezas inversamente proporcionais, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{24}{14} \Rightarrow 24x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{24} \Rightarrow x = 3{,}5$$

Portanto, 3,5 h ou 3 h e 30 min.

Alternativa **b**.

7.

Quantidade de páginas	Tempo (min)
20	45
300	x

Como são grandezas diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{45}{x} = \frac{20}{300} \Rightarrow 20x = 13\,500 \Rightarrow x = \frac{1350}{2} \Rightarrow x = 675$$

O tempo é de 675 min; então, convertendo para horas: 675 : 60 = 11,25

Portanto, 11 horas e $\frac{1}{4}$ de hora, ou seja, 11 h 15 min.

Alternativa **a**.

8.

Quantidade de pintores	Tempo (dias)	Quantidade de corredores
3	2	5
x	5	6

A grandeza quantidade de corredores é diretamente proporcional à quantidade de pintores, porém, o tempo é inversamente proporcional à quantidade de pintores, assim: $\frac{3}{x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{36} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{25}{72} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 25x = 216 \Rightarrow x = \frac{216}{25} \Rightarrow x = 8{,}64$$

Como a quantidade de pintores tem de ser um número natural, será o próximo natural maior que x; portanto, 9 pintores.

Alternativa **c**.

9.

Distância percorrida (km)	Tempo de viagem (dias)	Número de horas pedaladas por dia
450	9	4
x	5	6

Como as grandezas são todas diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{450}{x} = \frac{9}{5} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{450}{x} = \frac{36}{30} \Rightarrow 36x = 13\,500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13500}{36} \Rightarrow x = 375$$

Portanto, 375 km.
Alternativa **d**.

Capítulo 4 – Proporcionalidade em Geometria

Objetivos do capítulo e justificativas

- Determinar a razão entre dois segmentos de reta.
- Resolver problemas envolvendo razões entre duas grandezas.
- Resolver problemas envolvendo cálculos com números reais.
- Reconhecer e construir retângulos áureos.
- Apresentar o teorema de Tales.
- Aplicar o teorema de Tales e propriedades que decorrem dele.
- Resolver problemas envolvendo segmentos proporcionais.
- Demonstrar e aplicar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Resolver e elaborar problemas que aplicam as relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- Resolver problemas envolvendo porcentagens e análise de cartograma.

Neste capítulo, ampliamos as noções de razão e de proporção ligadas à Geometria. As atividades buscam inicialmente familiarizar os estudantes com o assunto e depois aplicar os resultados estudados (por exemplo, o teorema de Tales) em situações contextualizadas. O estudo desse conjunto de conceitos e procedimentos amplia o repertório de ferramentas para a resolução de diferentes problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **4** e das **competências gerais 2** e **4**.

O trabalho com a análise de cartograma explora a temática Índice de Vulnerabilidade Social (IVS). A atividade proposta requer que os estudantes pesquisem e listem os cinco maiores problemas atuais do município em que vivem, que influenciam na qualidade de vida dos munícipes. Desse modo, é favorecido o trabalho com as **competências gerais 9** e **10** e com a **competência específica 8**.

A *Abertura* usa como motivação uma imagem em que é possível fazer uma associação de retas paralelas e transversais em elementos de construções humanas, ressaltando a noção de proporcionalidade. Assim, as **competências específicas 6** e **7** são favorecidas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(**EF09MA01**) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(**EF09MA22**) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

O foco deste capítulo é a Unidade Temática **Geometria**, ampliando-se o trabalho feito com proporcionalidade no capítulo anterior para o campo da Geometria. Esse estudo envolve também demonstrar e aplicar relações simples entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, explorando demonstrações feitas no 8º ano (EF08MA14), e resolução de problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes, favorecendo o desenvolvimento das habilidades (EF09MA1), (EF09M10) e (EF09MA14).

Na articulação com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, utiliza-se a leitura de texto e cartogramas, contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF09MA22), e com a Unidade Temática **Álgebra**, exploram-se situações que envolvem razões e relações de proporcionalidade. Além desses conteúdos, abordam-se em seções especiais cálculos com números reais e porcentagens, articulando-se com a Unidade Temática **Números**.

Comentários e resoluções

Apresentamos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

3. **a)** $AB = \frac{5 \cdot 14}{10} = \frac{70}{10} = 7$

3. **b)** $AB = \frac{18 \cdot 3{,}4}{12} = \frac{61{,}2}{12} = 5{,}1$

3. **c)** $AB = \frac{3{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}5} = \frac{3{,}15}{0{,}5} = 6{,}3$

3. **d)** $AB = \frac{3{,}2 \cdot 1{,}5}{2{,}4} = \frac{4{,}8}{2{,}4} = 2$

4. O segmento $\overline{AB}$ é composto de dois segmentos consecutivos, $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ de forma que $AB = AM + MB = 18$. Desse modo, temos a relação $MB = 18 - AM$.

Como os segmentos respeitam a razão de $\frac{2}{7}$, temos:

$\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{18 - AM} = \frac{2}{7}$

Assim: $7AM = 2 \cdot (18 - AM) \Rightarrow 7AM = 36 - 2AM \Rightarrow$

$\Rightarrow 9AM = 36 \Rightarrow AM = 4$

Logo, $MB = 18 - 4 = 14$.

Alternativa **a**.

5. Sendo x a medida do maior lado da ampliação, temos a relação proporcional $\frac{10}{15} = \frac{13}{x}$; então:

$x = \frac{15 \cdot 13}{10} = \frac{195}{10} = 19{,}5$

Portanto, o lado maior medirá 19,5 cm.

6. Temos a proporção $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$. Como $CD + PQ = 45$, $CD = 45 - PQ$; logo, $\frac{12}{15} = \frac{45 - PQ}{PQ}$. Então:

$12PQ = 15 \cdot (45 - PQ) \Rightarrow 12PQ = 675 - 15PQ \Rightarrow 27PQ = 675 \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = \frac{675}{27} = 25$

Assim: $CD = 45 - PQ = 45 - 25 \Rightarrow CD = 20$

Portanto, a medida de $\overline{PQ}$ é 25 cm e a de $\overline{CD}$ é 20 cm.

7. **a)** Pela proporção, temos:

$\frac{AB}{MN} = \frac{CH}{PG} \Rightarrow \frac{20}{30} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 18}{20} = \frac{540}{20} = 27$

Portanto, $x = 27$ cm.

7. **b)** A medida da área do triângulo MNP pode ser calculada por:

$\frac{AB \cdot x}{2} = \frac{30 \cdot 27}{2} = \frac{810}{2} = 405$

Portanto, a área mede 405 cm^2.

10. **a)** Pelo teorema de Tales:

$\frac{10}{20} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 10}{20} = \frac{150}{20} = \frac{15}{2} \Rightarrow x = 7{,}5$

10. **b)** Pelo teorema de Tales: $\frac{9}{5} = \frac{x}{21 - x} \Rightarrow 5x = 9(21 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 189 - 9x \Rightarrow 14x = 189 \Rightarrow x = \frac{189}{14} \Rightarrow x = 13{,}5$

10. **c)** Pelo teorema de Tales:

$\frac{12}{21} = \frac{8}{x - 8} \Rightarrow 12(x - 8) = 8 \cdot 21 \Rightarrow 12x - 96 = 168 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x = 264 \Rightarrow x = \frac{264}{12} \Rightarrow x = 22$

11. Como $x + y = 26$, tem-se $y = 26 - x$. Pelo teorema de Tales: $\frac{4}{9} = \frac{x}{26 - x} \Rightarrow 9x = 4(26 - x) \Rightarrow 9x = 104 - 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow 13x = 104 \Rightarrow x = \frac{104}{13} \Rightarrow x = 8$

Então, $y = 18$, pois $26 - 8 = 18$.

13. Pelo teorema de Tales: $\frac{x + 5}{x} = \frac{x + 2}{x - 2} \Rightarrow (x + 5)(x - 2) =$

$= x\,(x + 2) \Rightarrow x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 2x \Rightarrow 3x - 10 = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2x = 10 \Rightarrow x = 10$

14. **a)** O terreno para a alameda das Magnólias mede, ao todo, 90 m; portanto, sendo C a medida procurada, temos: $40 + 30 + C = 90 \Rightarrow C = 20$

Portanto, a frente do terreno mede 20 m.

14. **b)** Pelo teorema de Tales, o terreno A mede:

$\frac{90}{40} = \frac{135}{A} \Rightarrow A = \frac{135 \cdot 40}{90} \Rightarrow A = \frac{5400}{90} \Rightarrow A = 60$

O terreno B mede:

$\frac{90}{30} = \frac{135}{B} \Rightarrow B = \frac{135 \cdot 30}{90} = \frac{4050}{90} \Rightarrow B = 45$

O terreno C mede:

$\frac{90}{20} = \frac{135}{C} \Rightarrow C = \frac{135 \cdot 20}{90} = \frac{27000}{90} \Rightarrow C = 30$

Portanto, as medidas das frentes dos terrenos na alameda dos Jasmins são as seguintes: terreno A, 60 m; terreno B, 45 m; terreno C, 30 m.

15. **a)** Pela consequência do teorema de Tales:

$\frac{9}{3} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 3}{9} = \frac{12 \cdot 1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{1} \Rightarrow x = 4$

15. **b)** Pela consequência do teorema de Tales:

$\frac{15}{10} = \frac{x + 3}{x} \Rightarrow 15x = 10(x + 3) \Rightarrow 15x = 10x + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} \Rightarrow x = 6$

16. **a)** Para que o segmento $\overline{NM}$ seja paralelo ao segmento $\overline{GF}$, precisamos verificar a validade da igualdade da consequência do teorema de Tales; portanto:

$\frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} \Rightarrow 3 \cdot 6 = 4 \cdot 4{,}5 \Rightarrow 18 = 18$

É verdade, portanto $\overline{NM} \,//\, \overline{GF}$.

16. **b)** Verificando da mesma maneira do item **a**:

$$\frac{2,4}{2} = \frac{2,7}{1,7} \Rightarrow 2,4 \cdot 1,7 = 2,7 \cdot 2 \Rightarrow 4,08 = 5,4$$

É falso, então, é possível concluir que o segmento $\overline{NM}$ não é paralelo a $\overline{FG}$.

17. Pela consequência do teorema de Tales:

$$\frac{45}{40} = \frac{CE}{48} \Rightarrow CE = \frac{45 \cdot 48}{40} = \frac{2160}{40} \Rightarrow CE = 54$$

O comprimento da ponte mede 54 metros.

18. Como as ruas Pardal, Canário e Colibri são paralelas, pela consequência do teorema de Tales:

$$\frac{60}{64} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \cdot 64}{60} = \frac{4\,800}{60} \Rightarrow x = 80$$

Assim, temos também: $\frac{64}{80} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{64}{80} = \frac{80}{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \frac{80 \cdot 80}{64} = \frac{6\,400}{64} \Rightarrow y = 100$$

Portanto, as medidas procuradas são $x = 80$ m e $y = 100$ m.

19. Podemos observar que a nova fileira é paralela à antiga, a uma distância de 1,5 m (4,5 − 3 = = 1,5). A distância do último menino da direita deve ser menor do que 5,5 metros para que sua imagem não fique prejudicada na foto. Sendo x a distância do menino na nova fileira, pela consequência do teorema de Tales:

$$\frac{3}{1,5} = \frac{3,6}{x} \Rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 1,5}{3} = \frac{5,4}{3} \Rightarrow x = 1,8$$

Logo, a distância até a câmera é de 5,4 m (1,8 + + 3,6 = 5,4); portanto, a imagem não será prejudicada, pois o menino está dentro do limite para uma boa resolução.

20. Note que as vigas que sustentam a rampa são perpendiculares ao chão, portanto são paralelas entre si. Sendo x a distância do início da rampa até a segunda viga, pela consequência do teorema de Tales:

$$\frac{(10 + 60)}{50} = \frac{x}{55} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 55}{50} = \frac{3850}{50} \Rightarrow x = 77$$

Como 77 cm = 0,77 m, a medida total da rampa é 1,32 m, (0,77 + 0,55 = 1,32).

22. **a)** Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{12}{18} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 21}{18} = \frac{252}{18} \Rightarrow x = 14$$

22. **b)** Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{15}{25} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 5}{3} = \frac{60}{3} \Rightarrow x = 20$$

22. **c)** Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{35}{3x} = \frac{42}{4x - 8} \Rightarrow 35 \cdot (4x - 8) = 42 \cdot 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140x - 280 = 126x \Rightarrow 14x = 280 \Rightarrow x = 20$$

23. **a)** Como $x + y = 55 \Rightarrow x = 55 - y$; assim, pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{10}{y} = \frac{12}{x} \Rightarrow \frac{10}{y} = \frac{12}{55 - y} \Rightarrow 12y = 550 - 10y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22\,y = 550 \Rightarrow y = \frac{550}{22} \Rightarrow y = 25$$

Então, $x = 30$, pois $55 - 25 = 30$.

23. **b)** Como $x + y = 14 \Rightarrow x = 14 - y$; assim, pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{14 - y}{12} = \frac{y}{16} \Rightarrow 12y = 16 \cdot (14 - y) = 224 - 16y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28\,y = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{28} \Rightarrow y = 8$$

Então, $x = 14 - 8 = 6$.

23. **c)** Como $x + y = 22 \Rightarrow x = 22 - y$; assim, pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{x}{y} = \frac{15}{18} \Rightarrow 18 \cdot (22 - y) = 15y \Rightarrow 396 - 18y = 15y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33y = 396 \Rightarrow y = 12$$

Então, $x = 22 - 12 = 10$.

25. Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{2,4}{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2,4 \cdot 5}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6$$

Então, $AC = 6$ cm.

Exercícios complementares

1. **a)** Pelo teorema de Tales:

$$\frac{33}{x} = \frac{22}{8} \Rightarrow 8 \cdot (3 \cdot 11) = (11 \cdot 2) \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot 3 = 2 \cdot x \Rightarrow x = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 12$$

Também: $\frac{33}{y} = \frac{22}{14} \Rightarrow 2\,y = 3 \cdot 14 \Rightarrow y = 3 \cdot 7 \Rightarrow y = 21$

1. **b)** Temos que: $\frac{9}{3} = \frac{6}{y}$

Assim, $y = 2$.

Além disso: $\frac{12}{x} = \frac{8}{8}$

Portanto, $x = 12$.

2. O segmento $\overline{BD}$ é composto por $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, ou seja, $BD =$ $= 2,4 + CD$. Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{2,4}{CD} = \frac{2}{3,5} \Rightarrow CD = \frac{2,4 \cdot 3,5}{2} = \frac{8,4}{2} \Rightarrow CD = 4,2$$

Portanto: $BD = 2,4 + 4,2 = 6,6$

3. Os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{HC}$ são transversais aos segmentos paralelos $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$. O segmento $\overline{CH}$ é composto por $\overline{CP}$ e $\overline{PH}$, logo $CH = CP + 6$. Pelo teorema de Tales: $\frac{15}{6} = \frac{CP + 6}{CP} \Rightarrow 15CP = 6(CP + 6) \Rightarrow 9CP = 36 \Rightarrow$

$$\Rightarrow CP = \frac{36}{9} = 4$$

Assim, $CH = 4 + 6 = 10$.

5. O segmento $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ em relação ao lado $\overline{BC}$. O lado $\overline{BC}$ é composto pelos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$; logo, $BC = BD + DC = 26 \Rightarrow DC = 26 - BD$. Pela relação de proporcionalidade: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow 18BD =$
$= 21 \cdot (26 - BD) = 546 - 21BD \Rightarrow 39BD = 546 \Rightarrow BD = 14$
Assim, $DC = 26 - 14 = 12$. Portanto, os segmentos medem 14 cm e 12 cm.

7. O perímetro do triângulo ABC mede 84 cm; portanto: $AC + AB + (20 + 15) = 84 \Rightarrow AC = 49 - AB$
Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow \frac{15}{49 - AB} = \frac{20}{AB} \Rightarrow 15AB = 20(49 - AB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15AB = 980 - 20AB \Rightarrow 35AB = 980 \Rightarrow AB = \frac{980}{35} = 28$$

Logo: $AC = 49 - 28 = 21$
Portanto, $AC = 21$ cm, $AB = 28$ cm e $BC = 35$ cm.

8. O segmento $\overline{AD}$ mede 10 cm. Pelo teorema de Tales: $\frac{AD'}{C'D'} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{13}{C'D'} = \frac{10}{5} \Rightarrow C'D' = \frac{13}{2} = 6{,}5$

Pelo mesmo argumento: $\frac{AD'}{B'C'} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{13}{B'C'} = \frac{10}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{13 \cdot 3}{10} = 1{,}3 \cdot 3 \Rightarrow B'C' = 3{,}9$$

Por fim: $\frac{AD'}{A'B'} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{13}{A'B'} = \frac{10}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A'B' = \frac{13}{5} = \frac{26}{10} \Rightarrow A'B' = 2{,}6$$

Portanto, as medidas são: $C'D' = 6{,}5$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm e $A'B' = 2{,}6$ cm.

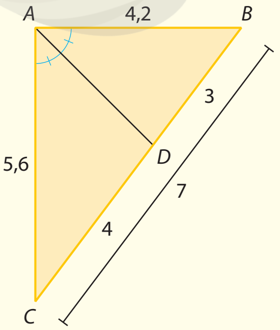
9. Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36$
Como $36 = 6^2$ e $36 = (-6)^2$, então $x = \sqrt{36} = \pm 6$. Por se tratar de medida, então $x = 6$.

10. O segmento $\overline{AD}$ é a bissetriz do triângulo em relação ao ângulo $\hat{A}$ em relação ao lado $\overline{BC}$. O lado $\overline{BC}$ é composto pelos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$; logo, $BC = BD + DC = 7 \Rightarrow DC = 7 - BD$. Pela relação de proporcionalidade, temos:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{4{,}2} = \frac{7 - BD}{5{,}6} \Rightarrow 5{,}6BD = 4{,}2(7 - BD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5{,}6BD = 29{,}4 - 4{,}2BD \Rightarrow 9{,}8BD = 29{,}4 \Rightarrow BD = 3$$

Assim, $DC = 7 - 3 = 4$. Portanto, a medida do segmento $\overline{BD}$ é 3 cm e do $\overline{DC}$ é 4 cm.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando

1. Considere x a medida do maior lado do retângulo e y a medida do menor lado. O perímetro mede 432 cm; logo: $2x + 2y = 432$
Portanto, $y = 216 - x$. Assim, temos:

$$\frac{7}{5} = \frac{x}{216 - x} \Rightarrow 5x = 1512 - 7x \Rightarrow 12x = 1512 \Rightarrow x = 126$$

Portanto: $y = 216 - 126 = 90$
Alternativa **b**.

2. Os triângulos APB e DPC são congruentes pois os segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{DP}$, $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes. Além disso, o ângulo $\hat{P}$ é oposto pelo vértice em ambos os triângulos. Assim, $\overline{AP}$ é congruente a $\overline{PC}$. Portanto, $AC = 2x$.
Alternativa **d**.

3. Pelo teorema de Tales:

$$\frac{9}{15} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{9 \cdot 4}{5} \Rightarrow x = 7{,}2$$

Alternativa **b**.

4. A razão entre a medida da base do triângulo maior e a medida da base do triângulo menor é $\frac{12}{4} = 3$. Sendo x a medida do maior lado do menor triângulo, temos:

$$3 = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

Sendo y a medida do menor lado do triângulo menor, temos: $3 = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$
Assim, a medida do perímetro do triângulo menor é 12 cm, pois $3 + 4 + 5 = 12$.
Alternativa **d**.

5. As retas são paralelas, pois elas são perpendiculares à reta q_2; assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{48}{18} = \frac{32}{a} \Rightarrow a = \frac{18 \cdot 32}{48} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 32}{8} = 3 \cdot 4 \Rightarrow a = 12$$

Portanto, a distância entre as retas r e t mede 44 $(12 + 32 = 44)$.
Alternativa **b**.

6. Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{7}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{7} \Rightarrow x \simeq 2{,}86$$

Então, a medida da distância é dada, em metro, por:
$2{,}86 + 4 = 6{,}86 \simeq 7$
Alternativa **c**.

7. Pela base do triângulo, $14 + y = 42 \Rightarrow y = 28$. Pela relação de proporcionalidade da bissetriz, temos:

$$\frac{14}{x} = \frac{28}{32} \Rightarrow (14 \cdot 2) \cdot x = 32 \cdot 14 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$$

Alternativa **c**.

Capítulo 5 – Semelhança

Objetivos do capítulo e justificativas

- Resolver problemas envolvendo relações de proporcionalidade.
- Identificar e efetuar ampliação e redução de figuras.
- Resolver problemas envolvendo cálculos com números reais.
- Desenvolver a noção de figuras semelhantes.
- Determinar a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes.
- Aplicar as relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Reconhecer polígonos semelhantes, em particular triângulos semelhantes.
- Construir figuras semelhantes por homotetia.
- Definir semelhança entre triângulos.
- Estudar e aplicar os casos de semelhança de triângulos.
- Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.
- Interpretar pirâmides etárias.

Apresentamos neste capítulo o conceito de semelhança entre figuras e, em particular, a semelhança entre polígonos, ampliando o estudo sobre proporcionalidade; são apresentadas atividades em que os estudantes precisam exercitar a curiosidade intelectual, o espírito de investigação, aplicar métodos lógico-dedutivos para demonstrar propriedades e argumentar sobre a validade deles. Assim, promovemos o trabalho com as **competências gerais 2** e **4** e com as **competências específicas 2** e **3**.

O trabalho com triângulos semelhantes é fundamental para o desenvolvimento dos assuntos dos próximos capítulos, como razões métricas e trigonométricas em um triângulo retângulo, favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2** e **3**.

A abertura apresenta como motivação uma amostra da cultura berbere por meio da arte de seus tapetes com motivos geométricos, contribuindo para o trabalho com a **competência geral 3**.

O trabalho com homotetia e com o pantógrafo, propostos na seção *Para saber mais* favorece o desenvolvimento das **competências específicas 5** e **6**.

Na seção *Trabalhando a informação* exploramos a leitura da pirâmide etária. A resolução dos itens **b** e **c** da **atividade 1**, favorecem o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**, com as **competências específicas 7** e **8** e com as **competências gerais 9** e **10**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

Situações que desenvolvem a proporcionalidade são o foco deste capítulo, que trata de semelhança e suas aplicações na Unidade Temática **Geometria** e que amplia e aprofunda os conhecimentos abordados no capítulo anterior. Os conteúdos são desenvolvidos visando a dar suporte e garantir a continuidade dos estudos em Matemática para temas que serão trabalhados no Ensino Médio, como a Trigonometria, favorecendo o desenvolvimento das habilidades (EF09MA08) e (EF09MA10). O trabalho com semelhança de triângulos se relaciona com a habilidade (EF09MA12).

A articulação com as Unidades Temáticas **Números** e **Álgebra** é feita, respectivamente, com a presença de cálculos com números reais e porcentagens e com relações de proporcionalidade.

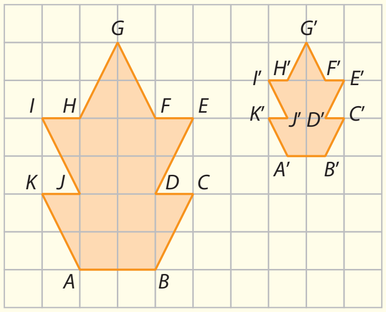
Além disso, promove-se ainda a articulação com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística** na seção *Trabalhando a informação*, que explora pirâmides etárias e promove o desenvolvimento das (EF09MA05) e (EF09MA22), ampliando o trabalho com gráficos dos anos anteriores, em especial o do 8º ano (EF08MA27).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Para determinar a razão de semelhança, primeiro vamos identificar os vértices da figura original e da figura reduzida.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A razão de semelhança é dada por:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'F'}{EF} = \frac{F'G'}{FG} = \frac{G'H'}{GH} =$$

$$= \frac{H'I'}{HI} = \frac{I'J'}{IJ} = \frac{J'L'}{JL} = \frac{L'A'}{LA} = \frac{1}{2}$$

Note que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{E'F'}{EF} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{J'L'}{JL} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

3. Não. Para dois polígonos serem semelhantes, eles devem ter lados correspondentes de medidas de comprimento proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. Como não foi mencionado que os ângulos correspondentes são congruentes, não é possível afirmar que os polígonos são semelhantes.

4. a) Sendo $b_1 = 6$ cm a medida da base do retângulo em verde e $b_2 = 4$ cm a medida da base do retângulo em vermelho, para a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde, temos:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

4. b) Sendo $h_1 = 1{,}5$ cm a medida da altura do retângulo em verde e $h_2 = 1{,}0$ cm a medida da altura do retângulo em vermelho, para a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde, temos:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1{,}0}{1{,}5} = \frac{1{,}0 \cdot 2}{1{,}5 \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

4. c) Sim, os retângulos são semelhantes porque seus lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes. Todos os ângulos medem 90°.

6. Como os polígonos são semelhantes, seus lados correspondentes possuem medidas proporcionais. Assim: $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{12}{x}$. Verificamos que o numerador é o dobro do denominador de cada fração. Portanto, $x = 6$.

7. a) As medidas do comprimento dos lados do triângulo ABC são $AB = 6$ cm; $BC = 3{,}6$ cm; $CA = 4{,}8$ cm.

As medidas do comprimento dos lados do triângulo $A'B'C'$ são $A'B' = 5$ cm; $B'C' = 3$ cm; $C'A' = 4$ cm.

Assim, a razão entre as medidas de dois lados correspondentes é:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{3{,}6}{3} = 1{,}2$$

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{4{,}8}{4} = 1{,}2$$

7. b) A medida da altura relativa a $\overline{AB}$ é $h = 3$ cm. A medida da altura relativa a $\overline{A'B'}$ é $h' = 2{,}5$ cm.

Assim, a razão entre as medidas de duas alturas relativas a lados correspondentes é:

$$\frac{h}{h'} = \frac{3}{2{,}5} = 1{,}2$$

7. c) A medida do perímetro do triângulo ABC é dada pela adição das medidas de seus lados.

$6 + 3{,}6 + 4{,}8 = 14{,}4$

A medida do perímetro do triângulo $A'B'C'$ é dada pela adição das medidas de seus lados.

$5 + 3 + 4 = 12$

Logo, a razão entre as medidas dos perímetros é:

$$\frac{14{,}4}{12} = \frac{14{,}4 : 4}{12 : 4} = \frac{3{,}6 : 3}{3 : 3} = 1{,}2$$

7. d) A medida da área do triângulo ABC é dada por:

$$\frac{AB \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

A medida da área do triângulo $A'B'C'$ é dada por:

$$\frac{A'B' \cdot h'}{2} = \frac{5 \cdot 2{,}5}{2} = \frac{12{,}5}{2} = 6{,}5$$

Logo, a razão entre as medidas das áreas é:

$$\frac{9}{6{,}25} = \frac{9:3}{6{,}25:3} = 1{,}44$$

8. Como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais. Assim, a razão de semelhança entre as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos é dada por:

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

8. b) A razão entre as medidas do perímetro dos triângulos é $\frac{2}{1}$, pois é igual à razão de semelhança.

8. **c)** A área do triângulo de Marcos mede 48 cm².

$$\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

A área do triângulo de Pedro mede 12 cm².

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

Assim, a razão entre a medida da área do triângulo de Marcos e a medida da área do triângulo de Pedro é:

$$\frac{48}{12} = \frac{4}{1}$$

10. Como os triângulos são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Assim, considerando os ângulos correspondentes de medidas iguais, identificamos os lados correspondentes e determinamos os valores de *x* e de *y*.

$$\frac{12}{20} = \frac{y}{15} = \frac{x}{10}$$

Para y, temos:

$$\frac{12}{20} = \frac{y}{15} \Rightarrow 20\ y = 15 \cdot 12 \Rightarrow y = \frac{180}{20} \Rightarrow y = 9$$

Para *x*, temos:

$$\frac{12}{20} = \frac{x}{10} \Rightarrow 20x = 10 \ \cdot 12 \Rightarrow x = \frac{120}{20} \Rightarrow x = 6$$

11. Como os triângulos são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais; portanto, as medidas das medianas $\overline{AR}$ e $\overline{MS}$ também devem ser proporcionais.

$$\frac{15}{MS} = \frac{21}{10{,}5} \Rightarrow 21 \cdot MS = 15 \cdot 10{,}5 \Rightarrow MS = \frac{157{,}5}{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MS = 7{,}5$$

12. Como os triângulos são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais; portanto, as medidas das alturas $\overline{AH}$ e $\overline{MR}$ também devem ser proporcionais.

$$\frac{12}{9} = \frac{AH}{6} \Rightarrow 9 \cdot AH = 12 \cdot 6 \Rightarrow AH = \frac{72}{9} \Rightarrow AH = 8$$

14. **a)** Para determinar a medida do perímetro é necessário calcular as medidas de comprimento dos dois lados desconhecidos do segundo triângulo (*a* e *b*). Como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais. Assim: $\frac{12{,}0}{a} = \frac{18{,}0}{b} = \frac{20{,}4}{15{,}3}$

Para *a*, temos: $\frac{12{,}0}{a} = \frac{20{,}4}{15{,}3} \Rightarrow 20{,}4 \cdot a = 12{,}0 \cdot 15{,}3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{183{,}6}{20{,}4} \Rightarrow a = 9{,}0$$

Para *b*, temos:

$$\frac{18{,}0}{b} = \frac{20{,}4}{15{,}3} \Rightarrow 20{,}4 \cdot b = 18{,}0 \cdot 15{,}3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{275{,}4}{20{,}4} \Rightarrow b = 13{,}5$$

Portanto, o perímetro do segundo triângulo mede 37,8 cm.

$$13{,}5 + 9{,}0 + 15{,}3 = 37{,}8$$

14. **b)** Sabemos que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é *k*, a razão entre as medidas de suas áreas é *k*². Para a razão de semelhança *k*, temos:

$$k = \frac{20{,}4}{15{,}3} \Rightarrow k \simeq 1{,}333333$$

Assim, $k^2 \simeq 1{,}777777$.

Portanto, a área do segundo triângulo mede aproximadamente 60,3 cm², pois:

$$k^2 = \frac{107{,}2}{x} \Rightarrow 1{,}777777 = \frac{107{,}2}{x} \Rightarrow x = \frac{107{,}2}{1{,}777777} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \simeq 60{,}3$$

15. **a)** Aplicando o teorema fundamental da semelhança, considerando os triângulos semelhantes *ABE* e *DCE*, temos:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{7{,}2}{3{,}6} \Rightarrow \frac{AE}{(AE - 4{,}8)} = \frac{7{,}2}{3{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE \cdot 3{,}6 = (AE - 4{,}8) \cdot 7{,}2 \Rightarrow 3{,}6AE = 7{,}2AE - 34,\ 56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7{,}2AE - 3{,}6AE = 34{,}56 \Rightarrow 3{,}6AE = 34{,}56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = \frac{34{,}56}{3{,}6} \Rightarrow AE = 9{,}6$$

15. **b)** Procedendo de maneira análoga, temos:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{7{,}2}{3{,}6} \Rightarrow \frac{(CE + 4{,}2)}{CE} = \frac{7{,}2}{3{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CE + 4{,}2) \cdot 3{,}6 = CE \cdot 7{,}2 \Rightarrow 3{,}6CE + 15{,}12 = 7{,}2CE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7{,}2CE - 3{,}6CE = 15{,}12 \Rightarrow 3{,}6CE = 15{,}12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = \frac{15{,}12}{3{,}6} \Rightarrow CE = 4{,}2$$

17. **a)** $\frac{y}{y+6} = \frac{4}{4+4} \Rightarrow 8 \cdot y = 4 \cdot (y + 6) \Rightarrow 8y = 4y + 24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8y - 4y = 24 \Rightarrow 4y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{4} \Rightarrow y = 6$$

$$\frac{5}{x} = \frac{4}{4+4} \Rightarrow 4x = 8 \cdot 5 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{4} \Rightarrow x = 10$$

17. b) $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{10}{15} \Rightarrow 15x = 10 \cdot (x+4) \Rightarrow 15x = 10x + 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x - 10x = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = \dfrac{40}{5} \Rightarrow x = 8$

$\dfrac{6}{6+y} = \dfrac{10}{15} \Rightarrow 10 \cdot (6+y) = 6 \cdot 15 \Rightarrow 60 + 10y = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10y = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30}{10} \Rightarrow y = 3$

17. c) $\dfrac{12}{12+x} = \dfrac{8}{20} \Rightarrow 8 \cdot (12+x) = 12 \cdot 20 \Rightarrow 96 + 8x = 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 144 \Rightarrow x = \dfrac{144}{8} \Rightarrow x = 18$

$\dfrac{y}{y+21} = \dfrac{8}{20} \Rightarrow 20y = 8 \cdot (y+21) \Rightarrow 20y = 8y + 168 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12y = 168 \Rightarrow y = \dfrac{168}{12} \Rightarrow y = 14$

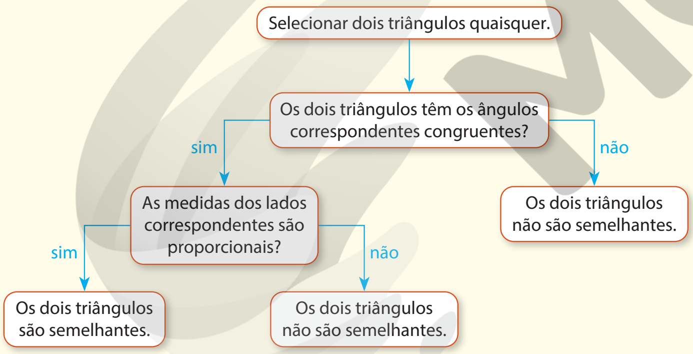
18. a) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{2{,}4}{2{,}4 + 2{,}4} \Rightarrow 4{,}8x = 4 \cdot 2{,}4 \Rightarrow x = \dfrac{9{,}6}{4{,}8} \Rightarrow x = 2$

18. b) Como o segmento de medida x divide os dois lados do triângulo maior ao meio, podemos concluir que os lados do triângulo menor têm metade da medida dos lados correspondentes do triângulo maior, ou seja, os dois triângulos são semelhantes. A razão de semelhança entre o triângulo menor e o triângulo maior é $\dfrac{1}{2}$. Assim:

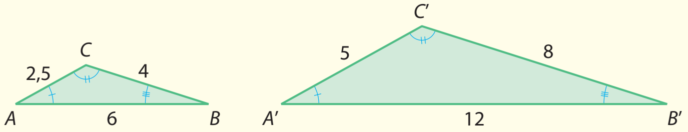
$\dfrac{x}{9{,}0} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = 9{,}0 \Rightarrow x = \dfrac{9{,}0}{2} \Rightarrow x = 4,5$

21. A seguir, apresentamos um exemplo de fluxograma.

Fluxograma: semelhança de triângulos

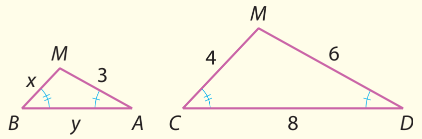


Observe um exemplo de triângulos semelhantes.



Esses triângulos são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

23. a) Vamos refazer o desenho reposicionando os triângulos.



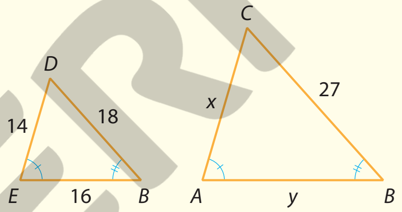
Observe que os triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim, temos:

$\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{BA}{CD} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{y}{8}$

Então: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{3}{6} \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{y}{8} \Rightarrow 6y = 24 \Rightarrow y = 4$

23. b) Vamos refazer o desenho reposicionando os triângulos.



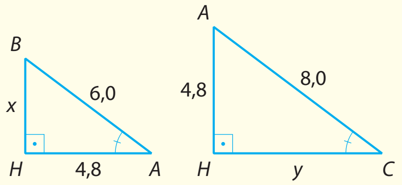
Os triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim, temos:

$\dfrac{AC}{ED} = \dfrac{AB}{EB} = \dfrac{CB}{DB} \Rightarrow \dfrac{x}{14} = \dfrac{y}{16} = \dfrac{27}{18}$

Então: $\dfrac{x}{14} = \dfrac{27}{18} \Rightarrow 18x = 378 \Rightarrow x = 21$

$\dfrac{y}{16} = \dfrac{27}{18} \Rightarrow 18y = 432 \Rightarrow y = 24$

23. c) Vamos refazer o desenho reposicionando os triângulos.



Observe que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim, temos:

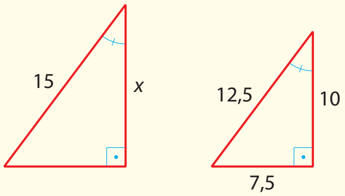
$\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{HA}{HC} \Rightarrow \dfrac{x}{4{,}8} = \dfrac{6{,}0}{8{,}0} = \dfrac{4{,}8}{y}$

Então: $\dfrac{x}{4{,}8} = \dfrac{6{,}0}{8{,}0} \Rightarrow 8{,}0x = 28{,}8 \Rightarrow x = 3{,}6$

$\dfrac{6{,}0}{8{,}0} = \dfrac{4{,}8}{y} \Rightarrow 6{,}0y = 38{,}4 \Rightarrow y = 6{,}4$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

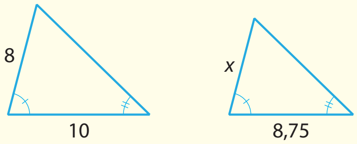
24. a) Vamos refazer o desenho mudando a posição dos triângulos.



Como os triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{15}{12{,}5} = \frac{x}{10} \Rightarrow 12{,}5x = 150 \Rightarrow x = 12$$

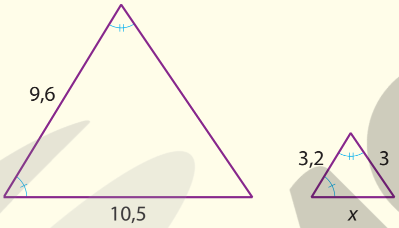
24. b) Vamos refazer o desenho mudando a posição dos triângulos.



Como os triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{8}{x} = \frac{10}{8{,}75} \Rightarrow 10x = 70 \Rightarrow x = 7$$

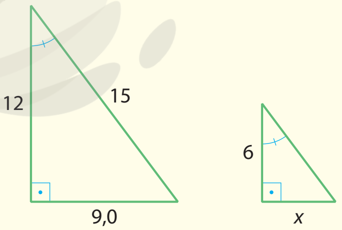
24. c) Vamos refazer o desenho mudando a posição dos triângulos.



Como os triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{9{,}6}{3{,}2} = \frac{10{,}5}{x} \Rightarrow 9{,}6x = 33{,}6 \Rightarrow x = 3{,}5$$

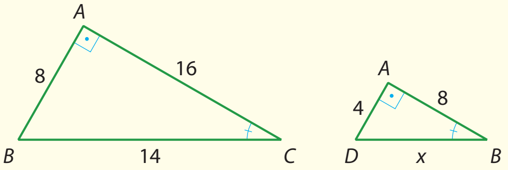
24. d) Vamos refazer o desenho mudando a posição dos triângulos.



Como os triângulos são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{12}{6} = \frac{9}{x} \Rightarrow 12x = 54 \Rightarrow x = 4{,}5$$

25. a) Vamos refazer o desenho separando os dois triângulos.

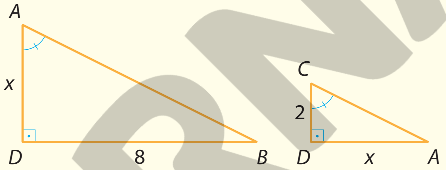


Observe que os dois triângulos têm dois lados correspondentes de medidas de comprimento proporcionais, e que os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes ($\hat{A} = 90°$). Então, pelo caso LAL, esses triângulos são semelhantes. Assim, temos:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{14}{x} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{14}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$$

25. b) Vamos refazer o desenho separando os dois triângulos.



Note que $B\hat{A}D \cong A\hat{C}D$ e $B\hat{A}D \cong A\hat{C}D$

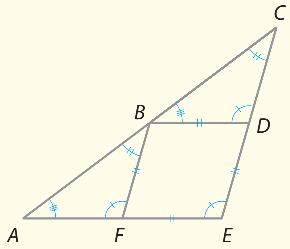
Logo, pelo caso AA, concluímos que $\triangle ADB \sim \triangle CDA$.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = +4 \text{ ou } x = -4$$

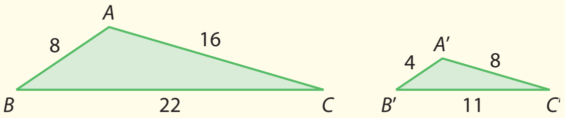
Como uma medida de comprimento não deve ser negativa, nesse caso, $x = 4$.

26.



Como $\overline{AE} \,/\!/\, \overline{BD}$, verificamos que $F\hat{A}B \cong D\hat{B}C$ e $F\hat{B}A \cong D\hat{C}B$. Analogamente, $B\hat{D}C \cong A\hat{E}C$. E como $\overline{BF} \,/\!/\, \overline{CE}$, verificamos que $A\hat{F}B \cong A\hat{E}C$. Portanto: $\triangle ACE \sim \triangle ABF$, $\triangle ACE \sim \triangle BCD$, $\triangle BCD \sim \triangle ABF$. Como F é o ponto médio de $\overline{AE}$, então $AF = FE = BD$. Logo, $\triangle BCD \cong \triangle ABF$.

27. Apresentamos um exemplo de triângulos semelhantes.



Como os três lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais, podemos concluir, pelo caso LLL, que os dois triângulos são semelhantes.

$$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{22}{11} = 2$$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco

Página 118

Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{6+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\left(6+3\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{18\sqrt{2}+9\cdot 2}{9\cdot 2} =$$

$$= \frac{18\sqrt{2}+18}{18} = 1+\sqrt{2}$$

Assim:

$$\frac{EA}{DA} = \frac{ED+4}{4} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow ED+4 = 4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ED = 4+4\sqrt{2}-4 \Rightarrow ED = 4\sqrt{2}$$

Os triângulos ABE e ACF são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AF}{4+ED} = \frac{6+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{4+4\sqrt{2}} = \frac{6+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF\cdot 3\sqrt{2} = \left(6+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+4\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF\cdot 3\sqrt{2} = 24+24\sqrt{2}+12\sqrt{2}+12\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF\cdot 3\sqrt{2} = 48+36\sqrt{2} \Rightarrow AF = \frac{48+36\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{\left(48+36\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{144\sqrt{2}+108\cdot 2}{9\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{144\sqrt{2}+216}{18} \Rightarrow AF = 8\sqrt{2}+12$$

Logo, $\overline{AF}$ mede $\left(8\sqrt{2}+12\right)$ cm.

Para saber mais

Página 126 e 127

1. O mapa construído deve ter as medidas com o dobro das medidas do mapa original. O segmento que representa a escala no mapa original indica uma distância de 725 km na realidade; assim, no mapa ampliado, um segmento de mesma medida de comprimento representará uma distância de 362,5 km na realidade.

2. Nesse caso, o mapa será reduzido, e as medidas do novo mapa devem ter a metade das medidas do mapa original.

Trabalhando a informação

Páginas 128 e 129

1. a) Não, a maior parte é formada por adultos de 60 a 64 anos.

1. b) Maior, pois a população vai envelhecer, tendo a maior parte formada por idosos.

1. c) Resposta pessoal. Uma possível resposta é que sim, a mudança prevista no perfil da população brasileira afetará a atual situação previdenciária brasileira, pois haveria menos pessoas contribuindo e mais usuários utilizando esses recursos.

2. Resposta pessoal. Uma possível resposta é que as diferenças se concentram principalmente na distribuição do número de jovens (no Norte é maior) e no número de adultos (no Sul é maior). Além disso, existem mais pessoas idosas no Sul.

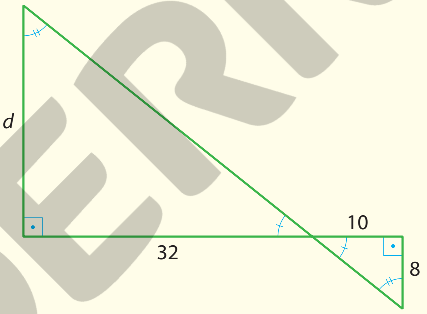
Exercícios complementares

1. a) Verdadeira, pois triângulos congruentes têm ângulos correspondentes de medidas iguais e lados correspondentes de medidas iguais; logo a razão de semelhança é 1.

1. b) Falsa, pois triângulos semelhantes podem ter as medidas de seus lados correspondentes proporcionais, mas apresentarem razão de semelhança diferente de 1, então, nesse caso, as medidas dos lados correspondentes são diferentes; portanto esses triângulos são semelhantes, mas não são congruentes.

1. c) Verdadeira, basta observar o caso LAL de semelhança de triângulos.

2. Seja d a medida da largura do rio; como as margens são paralelas, podemos obter dois triângulos semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Logo: $\frac{d}{8} = \frac{32}{10} \Rightarrow 10d = 32\cdot 8 \Rightarrow d = 25{,}6$

Portanto, o inteiro mais próximo é 26.

3. A medida da altura h do poste, em centímetro, é dada por:

$$\frac{180}{60} = \frac{h}{200} \Rightarrow 200\cdot 180 = 60h \Rightarrow h = \frac{36000}{60} \Rightarrow h = 600$$

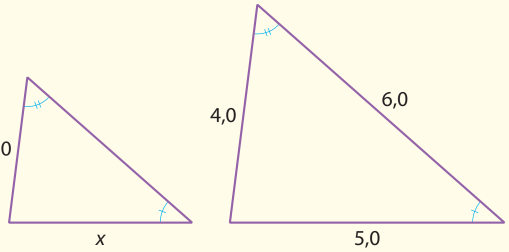
Então, a nova medida S do comprimento da sombra da pessoa, em centímetro, será dada por:

$$\frac{180}{S} = \frac{600}{150} \Rightarrow 150\cdot 180 = 600S \Rightarrow S = \frac{27000}{600} \Rightarrow S = 45$$

Portanto, o comprimento da sombra da pessoa passará a medir 45 cm.

Alternativa **b**.

5. Vamos refazer o desenho separando os dois triângulos.



Sendo x a medida do comprimento da estrada JB 12, em km, temos:

$$\frac{2{,}0}{x} = \frac{4{,}0}{5{,}0} \Rightarrow 4{,}0\cdot x = 2{,}0\cdot 5{,}0 \Rightarrow x = 2{,}5$$

Portanto, a medida do comprimento da estrada JB 12 é 2,5 km.

6. Como os triângulos são semelhantes:

$$\frac{15}{a} = \frac{20}{b} = \frac{25}{c} \simeq \frac{60}{45}$$

Então: $\frac{15}{a} \simeq \frac{60}{45} \Rightarrow a \simeq 11$

$$\frac{20}{b} \simeq \frac{60}{45} \Rightarrow b \simeq 15$$

$$\frac{25}{c} \simeq \frac{60}{45} \Rightarrow c \simeq 19$$

Portanto, os lados do triângulo medem aproximadamente 11 cm, 15 cm e 19 cm.

7. Os triângulos representados na figura são semelhantes pelo caso AA. Assim, sendo d a medida da distância entre as árvores A e B, em passos, temos:

$$\frac{d}{30} = \frac{60}{25} \Rightarrow 25d = 60 \cdot 30 \Rightarrow d = 72$$

Como a medida do comprimento do passo de Marcelo é 75 cm = 0,75 m, a distância entre as árvores mede 54 m.

$72 \cdot 0{,}75 = 54$

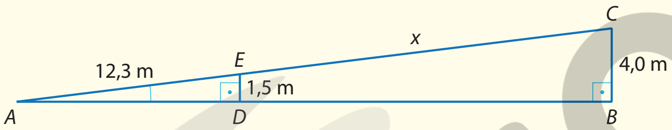
8. Seja k a razão de semelhança:

$$k = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$

Portanto: $\frac{4}{5} = \frac{x}{25} \Rightarrow 5x = 4 \cdot 25 \Rightarrow x = 20$

O maior lado do triângulo menor mede 20 cm.

9. Podemos representar o problema pelo esquema a seguir.



Os triângulos ABC e ADE são semelhantes pelo caso AA. Portanto:

$$\frac{12{,}3}{12{,}3 + x} = \frac{1{,}5}{4{,}0} \Rightarrow 1{,}5 \cdot (12{,}3 + x) = 12{,}3 \cdot 4{,}0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18{,}45 + 1{,}5x = 49{,}2 \Rightarrow 1{,}5x = 30{,}75 \Rightarrow x = 20{,}5$$

Portanto, a pessoa ainda deve caminhar 20,5 m.

10. Como há dois ângulos correspondentes congruentes nos dois triângulos, eles são semelhantes pelo caso AA. Assim:

$$\frac{30}{(30 + a)} = \frac{6}{10} \Rightarrow 180 + 6a = 300 \Rightarrow 6a = 120 \Rightarrow a = 20$$

Portanto, o segmento $\overline{C_1C_2}$ mede 20 cm.

Verificando

1. Como a ampliação foi feita na razão 1 : 5 e a medida do perímetro do ambiente no esboço é 26 cm, sendo x a medida do perímetro do ambiente a ser decorado, em centímetro, temos:

$$\frac{26}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 130$$

Alternativa **d**.

2. Para que os polígonos sejam semelhantes, seus lados correspondentes devem ser proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes. Assim:

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{y} = \frac{x}{9}$$

Logo:

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{y} \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9} \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{6} \Rightarrow x = 6$$

Alternativa **a**.

3. Para os triângulos serem semelhantes, seus lados correspondentes devem ser proporcionais. Assim:

$$\frac{3}{a} = \frac{4}{20} = \frac{5}{b}$$

Logo:

$$\frac{3}{a} = \frac{4}{20} \Rightarrow 4a = 60 \Rightarrow a = 15$$

$$\frac{4}{20} = \frac{5}{b} \Rightarrow 4b = 100 \Rightarrow b = 25$$

Alternativa **a**.

4. Para serem semelhantes, além de os ângulos correspondentes serem congruentes, os triângulos precisam ter os lados correspondentes proporcionais; nesse caso, eles não têm.

$$\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

Ou seja: $\frac{8}{5} \neq \frac{12}{10}$

Alternativa **c**.

5. $\frac{8{,}6}{8{,}6 - 2{,}5} = \frac{7{,}2}{x} \Rightarrow 8{,}6x = 7{,}2 \cdot 6{,}1 \Rightarrow x = \frac{43{,}92}{8{,}6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 5{,}1$

Alternativa **b**.

6. Os triângulos são semelhantes pelo caso AA, pois têm dois pares de ângulos correspondentes respectivamente congruentes.

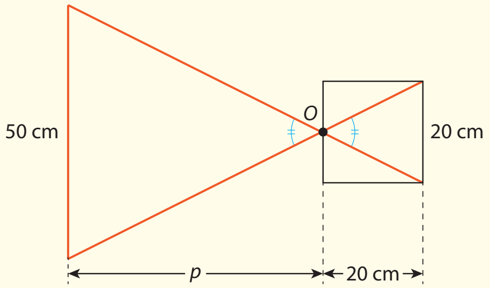
Alternativa **d**.

7. Para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso LLL, seus lados correspondentes devem ter medidas de comprimento proporcionais.

Alternativa **b**.

Diversificando

2. Vamos construir um esquema da câmara escura de orifício construída por Felipe.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando os triângulos congruentes do esquema, obtemos:

$$\frac{50}{20} = \frac{p}{20} \Rightarrow 20p = 20 \cdot 50 \Rightarrow p = 50$$

Portanto, o quadro deve ficar a no mínimo 50 cm do orifício da câmara para aparecer projetado no papel por inteiro.

Capítulo 6 – Um pouco mais sobre Estatística

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer e determinar medidas estatísticas: média, moda, mediana e desvio médio.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas estatísticas.
- Analisar tabelas e gráfico pictórico.
- Analisar a escolha do gráfico mais adequado para apresentar determinado conjunto de dados.
- Efetuar cálculo de probabilidade.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de porcentagens.

Este capítulo retoma e amplia assuntos tratados no campo da Estatística ao longo dos anos anteriores. Trabalha as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e apresenta o desvio médio absoluto, uma medida de dispersão. Esses conceitos contribuem para que os estudantes desenvolvam habilidades para interpretar e analisar dados em uma variedade de contexto, além de contribuir para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3**, **4** e **6**.

O cálculo de probabilidades de eventos dependentes e independentes é explorado na seção *Para saber mais* com a temática jogos, favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3**, **4** e **6**.

O trabalho com juro composto contribui para a formação cidadã dos estudantes e contribui para o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**. Ao explorar o uso de planilhas eletrônicas, contribui-se para o desenvolvimento das **competências gerais 5** e **6** e das **competências específicas 5** e **7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação as atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Este capítulo amplia e aprofunda os conhecimentos sobre as medidas estatísticas tratadas no 8º ano (EF08MA25), assunto relativo à Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, que favorece o desenvolvimento das habilidades (EF09MA22) e (EF09MA23).

Os conhecimentos trabalhados neste capítulo constituem subsídios para a compreensão da continuidade dos estudos de Estatística no Ensino Médio.

Além disso, ainda nessa Unidade Temática, trabalha-se o cálculo de probabilidade na seção *Para saber mais*, ampliando conhecimentos desenvolvidos no 8º ano (EF08MA22) e contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF09MA20).

Promove-se também a articulação com a Unidade Temática **Números** ao apresentar o cálculo de juros compostos envolvendo taxas percentuais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA05).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. A média aritmética é:

$$\frac{5 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 + 15 + 10 + 15 + 5} =$$

$$= \frac{0 + 15 + 20 + 45 + 20}{50} = \frac{100}{50} = 2$$

Como a maior frequência (15) ocorre para dois números de irmãos, concluímos que a amostra tem duas modas: 1 irmão e 3 irmãos. Escrevendo o rol de 50 termos, os termos centrais seriam o 25º (último da primeira metade dos dados) e o 26º (primeiro da segunda metade dos dados). Como há 20 dados ($5 + 15 = 20$) sobre o número de irmãos menor do que 2 e 30 dados ($5 + 15 + 10 = 30$) sobre o número de irmãos menor do que 3, conclui-se que, tanto o 25º quanto o 26º termos do rol, são iguais a 2. Logo a mediana é: $\frac{2 + 2}{2} = 2$

Alternativa **a**.

2. **a)** $\frac{7{,}0 + 5{,}5 + 4{,}0 + 6{,}0 + 8{,}5}{5} = \frac{31}{5} = 6{,}2$

2. **b)** Em ordem crescente, as notas dos estudantes foram $4{,}0 < 5{,}5 < 6{,}0 < 7{,}0 < 8{,}5$; portanto, a nota mediana é a nota central da sucessão, ou seja, 6,0. Como todas as notas têm frequência 1, o conjunto de dados não tem moda.

2. **c)** Apenas 3 estudantes.
$4{,}0 < 6{,}2$; $5{,}5 < 6{,}2$; $6{,}0 < 6{,}2$

4. A média aritmética é:

$$\frac{4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{4 + 1 + 2 + 2 + 1} = \frac{4 + 2 + 8 + 10 + 6}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Escrevendo o rol de 10 termos, os termos centrais seriam o 5º e o 6º: [1, 1, 1, 1, **2**, **4**, 4, 5, 5, 6]

Logo, a mediana é: $\frac{2 + 4}{2} = 3$

A moda é 1, pois ocorre com a maior frequência (4).
Alternativa **b**.

6. a) Entre as 24 notas de cada um, verifica-se que:

- a nota mais frequente de Caio , com 6 ocorrências, é 7,5;
- a nota mais frequente de Cauê, com 8 ocorrências, é 7,5.

6. b) Como todas as 4 notas de Caio em Língua Portuguesa foram iguais a 7,0, esse conjunto de dados não tem moda. Como todas as 6 notas de Cauê no 3º bimestre foram iguais a 7,5, esse conjunto de dados também não tem moda.

6. c) Caio: $\frac{9{,}5 + 9{,}5}{2} = 9{,}5$ e Cauê: $\frac{7{,}5 + 8{,}0}{2} = 7{,}75$

6. d) Caio só tem uma nota abaixo da média, a nota 5,5 em Inglês, mas como nessa disciplina sua média foi 6,125, Caio não foi reprovado.

$$\frac{6{,}0 + 5{,}5 + 6{,}5 + 6{,}5}{4} = \frac{24{,}5}{4} = 6{,}125$$

Cauê tem notas abaixo da média em todas as disciplinas, exceto Ciências, mas suas médias foram as seguintes:

Língua Portuguesa: $\frac{5{,}0 + 7{,}5 + 7{,}5 + 9{,}0}{4} = \frac{29{,}0}{4} = 7{,}25$

Inglês: $\frac{4{,}5 + 6{,}0 + 7{,}5 + 6{,}0}{4} = \frac{24{,}0}{4} = 6{,}0$

História: $\frac{5{,}5 + 7{,}0 + 7{,}5 + 8{,}5}{4} = \frac{28{,}5}{4} = 7{,}125$

Geografia: $\frac{5{,}0 + 8{,}0 + 7{,}5 + 9{,}0}{4} = \frac{29{,}5}{4} = 7{,}375$

Matemática: $\frac{5{,}5 + 8{,}0 + 7{,}5 + 8{,}0}{4} = \frac{29{,}0}{4} = 7{,}25$

Portanto, Cauê também não foi reprovado em nenhuma disciplina.

6. e) Em Geografia, a média de Caio foi: $\frac{8{,}0 + 7{,}5 + 8{,}0 + 7{,}5}{4} = \frac{31{,}0}{4} = 7{,}75$

Assim, para o desvio médio absoluto das notas de Caio em Geografia, temos:

$$\frac{|8{,}0 - 7{,}75| + |7{,}5 - 7{,}75| + |8{,}0 - 7{,}75| + |7{,}5 - 7{,}75|}{4} = \frac{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25}{4} = 0{,}25$$

Para o desvio médio absoluto das notas de Cauê em Geografia, temos:

$$\frac{|5{,}0 - 7{,}375| + |8{,}0 - 7{,}375| + |7{,}5 - 7{,}375| + |9{,}0 - 7{,}375|}{4} = \frac{2{,}375 + 0{,}625 + 0{,}125 + 1{,}625}{4} = \frac{4{,}75}{4} = 1{,}1875$$

A média das notas de Caio no 1º bimestre é:

$$\frac{7{,}0 + 6{,}0 + 7{,}5 + 8{,}0 + 7{,}5 + 9{,}5}{6} = \frac{45{,}5}{6} \simeq 7{,}6$$

A média das notas de Cauê no 1º bimestre é:

$$\frac{5{,}0 + 4{,}5 + 5{,}5 + 5{,}0 + 6{,}0 + 5{,}5}{6} = \frac{31{,}5}{6} = 5{,}25$$

Então, para o desvio médio absoluto das notas de Caio no 1º bimestre, temos:

$$\frac{|7{,}0 - 7{,}6| + |6{,}0 - 7{,}6| + |7{,}5 - 7{,}6| + |8{,}0 - 7{,}6| + |7{,}5 - 7{,}6| + |9{,}5 - 7{,}6|}{6} = \frac{0{,}6 + 1{,}6 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 + 1{,}9}{6} = \frac{4{,}7}{6} \simeq 0{,}8$$

Para o desvio médio absoluto das notas de Cauê no 1º bimestre, temos:

$$\frac{|5{,}0 - 5{,}25| + |4{,}5 - 5{,}25| + |5{,}5 - 5{,}25| + |5{,}0 - 5{,}25| + |6{,}0 - 5{,}25| + |5{,}5 - 5{,}25|}{6} = \frac{0{,}25 + 0{,}75 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}75 + 0{,}25}{6} = \frac{2{,}5}{6} \simeq 0{,}4$$

6. **f)** Como a regularidade é maior quando o desvio médio absoluto é menor, em Geografia, o mais regular foi Caio. No 3º bimestre, o mais regular foi Cauê.

6. **g)** A média das notas de Caio em Língua Portuguesa é: $\frac{7{,}0 + 7{,}0 + 7{,}0 + 7{,}0}{4} = \frac{28{,}0}{4} = 7{,}0$

A média das notas de Cauê em Língua Portuguesa é: $\frac{5{,}0 + 7{,}5 + 7{,}5 + 9{,}0}{4} = \frac{29{,}0}{4} = 7{,}25$

Então, para o desvio médio absoluto das notas de Caio em Língua Portuguesa, temos:

$$\frac{|7{,}0 - 7{,}0| + |7{,}0 - 7{,}0| + |7{,}0 - 7{,}0| + |7{,}0 - 7{,}0|}{4} = \frac{0 + 0 + 0 + 0}{4} = 0$$

Para o desvio médio absoluto das notas de Cauê em Língua Portuguesa, temos:

$$\frac{|5{,}0 - 7{,}25| + |7{,}5 - 7{,}25| + |7{,}5 - 7{,}25| + |9{,}0 - 7{,}25|}{4} = \frac{2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 1{,}75}{4} = \frac{4{,}5}{4} = 1{,}125$$

6. **h)** A média das notas de Caio no 3º bimestre é: $\frac{7{,}0 + 6{,}5 + 8{,}0 + 8{,}0 + 7{,}0 + 10}{6} = \frac{46{,}5}{6} = 7{,}75$

A média das notas de Cauê no 3º bimestre é: $\frac{7{,}5 + 7{,}5 + 7{,}5 + 7{,}5 + 7{,}5 + 7{,}5}{6} = \frac{45{,}0}{6} = 7{,}5$

Então, para o desvio médio absoluto das notas de Caio no 3º bimestre, temos:

$$\frac{|7{,}0 - 7{,}75| + |6{,}5 - 7{,}75| + |8{,}0 - 7{,}75| + |8{,}0 - 7{,}75| + |7{,}0 - 7{,}75| + |10 - 7{,}75|}{6} = \frac{0{,}75 + 1{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}75 + 2{,}25}{6} =$$

$$= \frac{5{,}5}{6} \simeq 0{,}9$$

Para o desvio médio absoluto das notas de Cauê no 3º bimestre, temos:

$$\frac{|7{,}5 - 7{,}5| + |7{,}5 - 7{,}5| + |7{,}5 - 7{,}5| + |7{,}5 - 7{,}5| + |7{,}5 - 7{,}5| + |7{,}5 - 7{,}5|}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Trabalhando a informação

Páginas 142 e 143

1.

Mês	Juro composto (j_c)	Juro simples (j_s)	$j_c - j_s$
Janeiro	50	50	0
Fevereiro	105	100	5
Março	165,5	150	15,5
Abril	232,05	200	32,05
Maio	305,255	250	55,255
Junho	385,7805	300	85,7805
Julho	474,35855	350	124,35855
Agosto	571,794405	400	171,794405
Setembro	678,9738455	450	228,9738455
Outubro	796,87123005	500	296,87123005
Novembro	926,558353055	550	376,558353055
Dezembro	1 069,2141883605	600	469,2141883605

Note que a diferença entre os juros composto e simples também aumenta cada vez mais.

2. Em 4 meses a dívida atinge o valor de R$ 2 073,60, pois:
$1000 \cdot (1 + 20\%)^4 = 1000 \cdot (1 + 0{,}2)^4 = 1000 \cdot (1{,}2)^4 = 1000 \cdot 2{,}0736 = 2073{,}6$

Exercícios complementares

1. Como dentre as 30 notas, apenas 9 são maiores do que 6,5, a probabilidade é $\frac{9}{30}$.
Alternativa **b**.

2. **a)** A nota 6,0 é a de maior frequência, com 5 ocorrências.

2. **b)** $\frac{6{,}0 + 6{,}0}{2} = 6{,}0$

2. **c)**

$$\frac{1 \cdot 1{,}0 + 1 \cdot 2{,}0 + 1 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 3{,}0 + 4 \cdot 4{,}0 + 3 \cdot 5{,}0 + 2 \cdot 5{,}5 + 5 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 6{,}5 + 1 \cdot 7{,}0 + 3 \cdot 7{,}5 + 2 \cdot 8{,}0 + 1 \cdot 8{,}5 + 2 \cdot 9{,}0}{30} =$$

$$= \frac{1{,}0 + 2{,}0 + 2{,}5 + 6{,}0 + 16{,}0 + 15{,}0 + 11{,}0 + 30{,}0 + 13{,}0 + 7{,}0 + 22{,}5 + 16{,}0 + 8{,}5 + 18{,}0}{30} = \frac{168{,}5}{30} \simeq 5{,}6$$

3. Respostas pessoais.

4. Resposta pessoal.

5.

Andar	Número de pessoas no elevador
Térreo	$4 - 0 = 4$
1º andar	$4 + 4 - 3 = 5$
2º andar	$5 + 1 - 1 = 5$
3º andar	$5 + 2 - 2 = 5$
4º andar	$5 + 2 - 0 = 7$
5º andar	$7 + 2 - 6 = 3$

Portanto, a moda é 5.

Alternativa **d**.

Verificando

1. $\frac{23 + 25 + 25 + 28 + 31 + 24 + 32 + 32 + 27 + 23}{10} = \frac{270}{10} = 27$

Alternativa **c**.

2. A velocidade de maior frequência é 58, com 3 ocorrências.
Alternativa **a**.

3. Escrevendo o rol com os 10 dados do quadro e destacando as informações centrais, temos:
[23, 47, 48, 49, **72**, **72**, 74, 84, 271, 650]

Portanto, a mediana é: $\frac{72 + 72}{2} = 72$

Alternativa **b**.

4. A média é:

$$\frac{15 \cdot 15 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot 14}{20} = \frac{225 + 48 + 28}{20} = \frac{301}{20} = 15{,}05$$

Portanto, o desvio médio é:

$$\frac{15 \cdot |15 - 15{,}05| + 3 \cdot |16 - 15{,}05| + 2 \cdot |14 - 15{,}05|}{20} = \frac{0{,}75 + 2{,}85 + 2{,}10}{20} = \frac{5{,}70}{20} = 0{,}285$$

Alternativa **d**.

5. Foram entrevistadas 503 pessoas ($239 + 132 + 132 = 503$). Portanto, a mediana das notas está na posição 252 quando as notas são organizadas em ordem crescente. Nessa organização, perceba que as primeiras 239 notas são 1, e as notas das posições 240 até 371 são 2. Portanto, a mediana é 2.
Alternativa **c**.

6. De acordo com o gráfico, a peça de roupa mais vendida pela loja é a camiseta, com 5 ocorrências; esse é o dado com maior frequência. Então, a peça mais vendida representa o conceito de moda.
Alternativa **c**.

7. Uma vez verificado o resultado do primeiro lançamento do dado, haverá 1 em 6 possibilidades para o resultado do segundo lançamento. Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{6}$.

Alternativa **b**.

8. Uma vez verificado o resultado do primeiro lançamento da moeda, haverá 1 em 2 possibilidades para o resultado do segundo lançamento. Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

   Alternativa **a**.

9. A alternativa correta mais frequente é a **c**, com 3 ocorrências, sem contar a resposta deste teste. Porém, a resposta é pessoal, pois depende das respostas dadas pelos estudantes para os testes anteriores.

Capítulo 7 – Equações do 2º grau

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer uma equação polinomial do 2º grau com uma incógnita.
- Identificar e determinar as raízes reais de uma equação do 2º grau com uma incógnita, quando existirem.
- Utilizar as propriedades da igualdade, na construção de procedimentos para resolver equações do 2º grau por meio de fatorações, pelo método de completar quadrados e pelo uso da fórmula resolutiva.
- Discutir o significado das raízes de uma equação do 2º grau em confronto com a situação proposta.
- Resolver problemas que envolvem relações de proporcionalidade que podem ser representados por uma equação polinomial do 2º grau.
- Resolver problemas envolvendo volume de cubo e equação do 2º grau.
- Resolver e elaborar problemas que podem ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
- Ler e analisar mapas anamórficos.

Ampliamos o estudo de equações polinomiais sistematizando o tratamento de uma equação do 2º grau com uma incógnita, analisando procedimentos variados de resolução de equações do 2º grau incompletas ou completas e suas aplicações na resolução de problemas, o que favorece o trabalho com as **competências gerais 2** e **4** e com as **competências específicas 1** e **4**. O desenvolvimento dos temas permitirá aos estudantes desenvolver habilidades necessárias ao estudo das funções polinomiais do 2º grau.

Na seção *Trabalhando a informação* propomos uma atividade sobre a leitura de um cartograma. Atividades como a desta seção estimulam nos estudantes um olhar e uma ação que transcendem o campo da Matemática e contribuem para o desenvolvimento da **competência geral 1** e das **competências específicas 6** e **7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação as atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

Este capítulo tem foco em objetos de conhecimento da Unidade Temática **Álgebra** e amplia o estudo das equações, visando a preparar os alunos para a continuidade de estudos de Álgebra neste volume, no capítulo 10, e para os estudos do Ensino Médio.

Os conteúdos e as atividades propostos exploram tipos variados de equações do 2º grau e sistemas do 2º grau, com base nos conhecimentos construídos no 8º ano (EF08MA08 e EF08MA09) e contribuem para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA09).

Neste capítulo, explora-se a Unidade Temática **Geometria** quando são utilizadas figuras geométricas para contextualizar os conceitos algébricos e a Unidade Temática **Grandezas e medidas** quando se utiliza o cálculo de área e de volume nesses mesmos contextos em diversos momentos, como na seção *Pense mais um pouco...*, que contribui para o trabalho com as habilidades (EF09MA01) e (EF09MA04).

Além disso, a articulação com a Unidade Temática **Números** e **Probabilidade e estatística** é promovida na seção *Trabalhando a informação*, que envolve cálculo de porcentagem na leitura e análise de cartogramas, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF09MA08) e (EF09MA22).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

1. a) É interessante abordar em sala de aula que, mesmo nos esportes em que há variações de medidas, como o Muay Thai, as dimensões são iguais, e o ringue é quadrado.

   b) Resposta pessoal. Possível resposta: Judô, MMA, Muay Thai.

Exercícios propostos

1. Durante a resolução desse exercício em sala de aula, deixe que os estudantes falem o que pensam ser a resposta correta para cada item. Assim pode-se diagnosticar eventuais dificuldades na leitura das equações e na interpretação das operações entre coeficientes e incógnitas.

1. a) Na equação $8x^2 + 17x + 4 = 0$, o maior expoente da incógnita x é 2, então a equação é do 2º grau. Os coeficientes são: $a = 8$ (coeficiente de x^2); $b = 17$ (coeficiente de x); $c = 4$ (termo independente da equação).

1. b) Em equações como essa, pode acontecer de os estudantes acharem que o expoente de x é zero, pelo fato de x não aparecer elevado a nenhum número. Em casos como esse, o expoente da incógnita x é 1. Essa é uma equação do 1º grau.

1. c) O maior expoente da incógnita x é 2, mas essa incógnita é anulada porque seu coeficiente a é igual a 0. Então: $0 + 10x - 8 = 0 \Rightarrow 10x - 8 = 0$

Portanto, essa é uma equação do 1º grau.

1. d) O maior expoente da incógnita y é 2, então a equação é do 2º grau. Os coeficientes são: $a = -\frac{1}{5}$ (coeficiente de y^2); $b = 0$ (coeficiente de x, que, não aparece na equação); e $c = -25$ (termo independente da equação).

1. e) O maior expoente da incógnita y é 2; então, a equação é do 2º grau. Os coeficientes são: $a = 4$ (coeficiente de y^2); $b = -5$ (coeficiente de x); $c = 0$ (termo independente da equação).

1. f) O maior expoente da incógnita x é 2; então, a equação é do 2º grau. Os coeficientes são: $a = 1$ (coeficiente de x^2); $b = 0$ (coeficiente de x, que, não aparece na equação); $c = -9$ (termo independente da equação).

2. a) $2x^2 - 5x = -2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + \mathbf{2} = -2 + \mathbf{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

A equação é completa, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

2. b) $x^2 + 6x = 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 6x - \mathbf{2x} - \mathbf{3} = 2x + 3 - \mathbf{2x} - \mathbf{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0$

A equação é completa, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

2. c) $y^2 = 8y \Rightarrow y^2 - 8y = 8y - 8y \Rightarrow y^2 - 8y = 0$

A equação é incompleta, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

2. d) $-5x^2 = 30x + 40 \Rightarrow -5x^2 - 30x - 40 =$
$= 30x + 40 - 30x - 40 \Rightarrow -5x^2 - 30x - 40 = 0$

A equação é completa, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

2. e) $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (2x - 1) \Rightarrow 3x^2 - 6x = 4x - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 4x + 2 = 4x - 2 - 4x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0$

A equação é completa, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

2. f) $(x + 4) \cdot (x - 4) = 5x - 16 \Rightarrow x^2 - 4x + 4x - 16 = 5x - 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4x - 16 \mathbf{- 5x + 16} = 5x - 16 - \mathbf{5x + 16} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4x - 16 - \mathbf{5}x + \mathbf{16} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$

A equação é incompleta, pois $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

4. A condição para que uma equação seja do 2º grau é que o coeficiente a seja diferente de zero. Assim, para que a equação $(5n + 2)x^2 - 4nx + n = 0$ não seja do 2º grau, n deve ser igual a $-\frac{2}{5}$, pois:

$(5n + 2) = 0 \Rightarrow 5n = -2 \Rightarrow n = -\frac{2}{5}$

5. a) Para que a equação não seja do 2º grau, então o coeficiente a tem que ser igual a zero.

Assim: $(m + 3) = 0 \Rightarrow m = -3$

5. b) Para que a equação seja do 2º grau, o coeficiente a tem que ser diferente de zero.

Então: $(m + 3) \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$

5. c) Para que a equação seja do 2º grau, observamos no **item b** que $m \neq -3$. Para que seja completa, então o coeficiente b e o termo independente devem ser diferente de zero. Para o coeficiente b ser diferente de zero, m deve ser diferente de $\frac{1}{2}$, pois:

$(2m - 1) \neq 0 \Rightarrow 2m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$

Para o termo independente ser diferente de zero, então $(m + 4) \neq 0 \Rightarrow m \neq -4$. Portanto, para que a equação seja do 2º grau e completa, $m \neq -3$, $m \neq \frac{1}{2}$ e $m \neq -4$.

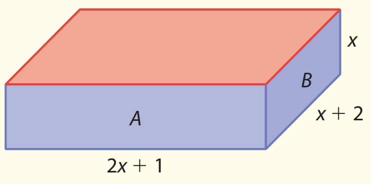
5. d) Para que seja do 2º grau, sabemos pelo **item b** que m tem que ser diferente de -3. Agora, para que seja incompleta, o coeficiente b ou o coeficiente c tem que ser igual a zero. Então, ou $m = \frac{1}{2}$ $\left(\text{pois } (2m - 1) = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}\right)$, ou $m = -4$ (pois $(m + 4) = 0 \Rightarrow m = -4$).

6. a) A medida da área da região em azul é dada pela diferença entre a medida da área de um quadrado de lados 14 e de um retângulo de lados $2x$ e x, ou seja, um quadrado de medida de área 196 ($14 \cdot 14 = 196$) e retângulo de medida de área $2x^2$ ($2x \cdot x = 2x^2$). Assim, a medida da área da parte azul será dada por $A = 196 - 2x^2$.

6. b) Quando a medida da área da parte azul for 124, então $x = 6$. Substituindo A por 124 em $A = 196 - 2x^2$, obtemos:

$124 = 196 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 196 - 124 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = \frac{72}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

7. a)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

As faces laterais são compostas por duas regiões retangulares, como a indicada na figura por A, de medida de área $2x^2 + x$, pois $(2x + 1) \cdot x = 2x^2 + x$; e de duas regiões retangulares, como a indicada na figura por B, de medida de área $x^2 + 2x$, pois $(x + 2) \cdot x = x^2 + 2x$. Então, a expressão da soma das medidas das áreas das faces laterais será dada por $6x^2 + 6x$.

$2 \cdot (2x^2 + x) + 2 \cdot (x^2 + 2x) = 4x^2 + 2x + 2x^2 + 4x = 6x^2 + 6x$

7. b) Auxilie os estudantes a encontrar a medida das dimensões do retângulo destacado em vermelho. Se necessário, utilize planificações. Se ocorrer como o esperado, eles perceberão que a face destacada em vermelho é um retângulo de base de medida dada por $2x + 1$ e altura de medida dada por $x + 2$. Assim, a expressão da medida da área da face destacada em vermelho é $2x^2 + 5x + 2$.

$(2x + 1) \cdot (x + 2) = 2x^2 + 4x + 1x + 2 = 2x^2 + 5x + 2$

7. c) Pelo **item a**, a expressão da soma das medidas das áreas das faces laterais é dada por $6x^2 + 6x$; portanto, a equação correspondente em relação a x será: $6x^2 + 6x - 880 = 0$

$6x^2 + 6x = 880 \Rightarrow 6x^2 + 6x - \mathbf{880} = 880 - \mathbf{880} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 + 6x - 880 = 0$

8. a) Neste exercício, incentive os estudantes a pensarem nas medidas das áreas de cada retângulo como a multiplicação da medida da base pela medida da altura, bem como a observarem que os lados adjacentes devem ter medidas expressas pelas mesmas incógnitas, se for o caso. Ao observar o quadrado cuja medida de área é expressa por x^2, espera-se que eles cheguem à conclusão de que a base e a altura têm medidas expressas, por x, pois $x \cdot x = x^2$. Assim, conclui-se que a base do retângulo alaranjado também mede x; então, sua altura tem medida 2, pois sua área é dada por $A = 2 \cdot x = 2x$. Logo, a altura do retângulo verde tem medida expressa por $x + 2$. Assim, a base do retângulo verde deve ter medida igual a 2, pois $2 \cdot (x + 2) = 2x + 4$.

8. b) $A_{quadrilátero} = (x + 2) \cdot (2 + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{quadrilátero} = 2x + x^2 + 4 + 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{quadrilátero} = x^2 + 4x + 4$

A medida da área do quadrilátero também pode ser determinada pela adição das medidas das áreas das figuras que o compõem.

$A_{quadrilátero} = 2x + x^2 + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$

8. c) O quadrilátero é um quadrado.

9. Auxilie os estudantes a pensarem as relações entre os símbolos matemáticos e as sentenças, reforçando a necessidade de uma boa interpretação de texto para minimizar erros. Em casos como “Um número é igual ao quadrado desse próprio número...”, talvez seja importante mencionar regras gramaticais de análise sintática.

9. a) O quadrado de um número (x^2) adicionado (+) ao dobro desse número ($2x$) é igual a (=) 99. Na forma reduzida $x^2 + 2x - 99 = 0$

9. b) O triplo do quadrado de um número menos o próprio número ($-x$) é igual a (=) 30. Na forma reduzida $3x^2 - x - 30 = 0$

9. c) Um número (x) é igual (=) ao quadrado desse próprio número (x^2) menos (–) 42. Na forma reduzida $x^2 - x - 42 = 0$

9. d) Três quintos do quadrado de um número é igual a esse número (x) menos (–) 40. Na forma reduzida $\frac{3}{5}x^2 - x + 40 = 0$

12. Para $x = 2$, temos:

$2^2 - 11 \cdot 2 + 18 = 0 \Rightarrow 4 - 22 + 18 = 0 \Rightarrow -18 + 18 = 0$

Para $x = -5$, temos:

$(-5)^2 - 11 \cdot 5 + 18 = 0 \Rightarrow 25 - 55 + 18 = 0 \Rightarrow -30 + 18 = 0$

Para $x = 9$, temos:

$9^2 - 11 \cdot 9 + 18 = 0 \Rightarrow 81 - 99 + 18 = 0 \Rightarrow -18 + 18 = 0$

Para $x = 10$, temos:

$10^2 - 11 \cdot 10 + 18 = 0 \Rightarrow 100 - 110 + 18 = -10 + 18 = 0$

As raízes da equação $x^2 - 11x + 18 = 0$ são $x = 2$ e $x = 9$.

13. a) $5^2 + 6 \cdot 5 = 0 \Rightarrow 25 + 30 = 0$

Então 5 não é raiz da equação.

13. b) $2 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 = 0 \Rightarrow 50 - 50 = 0$

Então 5 é raiz da equação.

13. c) $3 \cdot 5^2 - 75 = 0 \Rightarrow 75 - 75 = 0$

Então 5 é raiz da equação.

13. d) $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0 \Rightarrow 25 - 35 + 10 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$

Então 5 é raiz da equação.

14. Espera-se que os estudantes percebam que, como a incógnita x está elevada ao quadrado, não é possível que os números 10 ou –10 sejam as raízes, restando, então, os números $\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$.

15. Lembre aos estudantes que, se –1 é raiz da equação, então $(3q - 2) \cdot (-1)^2 + (2q - 1) \cdot (-1) + 5 = 0$ é uma sentença verdadeira. Podemos resolver a equação do 1º grau em q para descobrir seu valor. Assim:

$(3q - 2) \cdot (-1)^2 + (2q - 1) \cdot (-1) + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3q - 2 - 2q + 1 + 5 = 0 \Rightarrow q + 4 = 0 \Rightarrow q = -4$

16. a) Para que uma das raízes seja 4, temos que $3 \cdot 4^2 - 14 \cdot 4 + 2p = 0$ é uma sentença verdadeira. Então:

$3 \cdot 4^2 - 14 \cdot 4 + 2p = 0 \Rightarrow 48 - 56 + 2p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p = +8 \Rightarrow p = 8 : 2 \Rightarrow p = 4$

16. b) Para que uma das raízes seja 0, então a sentença a seguir teria que ser verdadeira, o que não acontece.

$(k - 3) \cdot 0^2 - (k + 4) \cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 6 = 0$

Portanto, não é possível determinar k.

17. a) Encontrando a forma reduzida:

$(3y - 4) \cdot (3y + 1) = 14 - 9y \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 + 3y - 12y - 4 = 14 - 9y \Rightarrow 9y^2 - 9y - 4 = 14 - 9y \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 - 9y - 4 - 14 + 9y = 0 \Rightarrow 9y^2 + 0y - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 2 = 0$

Resolvendo a equação:

$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = +2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Então: $y_1 = -\sqrt{2}$ e $y_2 = \sqrt{2}$

17. b) Encontrando a forma reduzida:

$(m + 5) \cdot (m - 4) = m + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - 4m + 5m - 20 = m + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + m - 20 = m + 16 \Rightarrow m^2 + m - 20 - m - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + 0m - 36 = 0 \Rightarrow m^2 - 36 = 0$

Resolvendo a equação:

$m^2 - 36 = 0 \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm\sqrt{36}$

Então: $m_1 = -6$ e $m_2 = 6$.

18. a) Explique aos estudantes o significado de "verificar a equação". Ajude-os a fazer a relação: se um número verifica uma equação, esse número torna a equação verdadeira: portanto, esse número é a raiz da equação.

$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100}$

Portanto: $x = +10$ ou $x = -10$

18. b) $4x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{81}}{\pm\sqrt{4}}$

Portanto: $x = +\frac{9}{2}$ ou $x = -\frac{9}{2}$

18. c) $(2x-1)\cdot(x+2) = 3x - 7x^2 \Rightarrow 2x^2 + 4x - x - 2 = 3x - 7x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 3x - 7x^2 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 - 3x + 7x^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9x^2 + 0x - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}}$

Portanto: $x = +\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

As raízes de cada equação deste exercício são opostas. Talvez os estudantes relatem algo do tipo "são números iguais, mas com os sinais trocados", atente aos termos usados e corrija-os, quando necessário.

19. a) A equação é do tipo $ax^2 = 0$; então, $x_1 = x_2 = 0$.

19. b) A equação é do tipo $x^2 = c$; então, $x = \pm\sqrt{c}$. Assim:

$x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

19. c) A equação é do tipo $ax^2 = 0$, pois $ax^2 + c = c \Rightarrow ax^2 = 0$; então, $x_1 = x_2 = 0$.

19. d) A equação é do tipo $ax^2 = c$; então, $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Assim:

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

20. Traduzindo a sentença para a linguagem simbólica, obtemos $x^2 - 60 = 840$, que na forma reduzida é a equação $x^2 - 900 = 0$ ($x^2 - 60 - 840 = 0 \Rightarrow x^2 - 900 = 0$).

Resolvendo a equação, chegamos a $x_1 = 30$ e $x_2 = -30$. Como o número pensado é negativo, então o número é -30.

21. a) Colocando $3x$ em evidência na equação:

$3x^2 + 15x = 0 \Rightarrow 3x\cdot(x+5) = 0$

Como o produto dos fatores $3x$ e $(x+5)$ é zero, ao menos um deles é zero. Assim, $3x = 0$ ou $x + 5 = 0$. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $x = 0$ ou $x = -5$. Logo, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = -5$.

21. b) Colocando y em evidência na equação:

$2y^2 - \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow y\cdot(2y - \frac{1}{3}) = 0$

Como o produto dos fatores y e $(2y - \frac{1}{3})$ é zero, ao menos um deles é zero. Assim: $y = 0$ ou $2y - \frac{1}{3} = 0$

Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $y = 0$ ou $y = \frac{1}{6}$. Logo, as raízes são $y_1 = 0$ e $y_2 = \frac{1}{6}$.

21. c) O produto dos fatores 9, $(2n-5)$ e $(n+2)$ é zero. Assim: $2n - 5 = 0$ ou $n + 2 = 0$

Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $n = \frac{5}{2}$ ou $n = -2$. Logo, as raízes são $n_1 = \frac{5}{2}$ e $n_2 = -2$.

21. d) $(2x-3)\cdot(x-2) = (x-6)\cdot(3x-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 3x + 6 = 3x^2 - x - 18x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 3x^2 - 19x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 7x = 3x^2 - 19x \Rightarrow 2x^2 - 7x - 3x^2 + 19x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$

Colocando x em evidência na equação, obtemos: $x\cdot(x - 12) = 0$. Assim, um dos fatores tem de ser igual a zero. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $x = 0$ ou $x = 12$. Logo, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 12$.

22. Todas as equações deste exercício, na forma reduzida, têm o coeficiente $c = 0$; portanto, uma de suas raízes igual a zero.

22. a) Resolvendo a equação $5x^2 + 12x = 0$ e colocando x em evidência, obtemos: $x\cdot(5x + 12) = 0$. Como o produto dos fatores x e $(5x + 12)$ é igual a zero, pelo menos um deles é zero. Assim, $x = 0$ ou $5x + 12 = 0$. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $x = 0$ e $x = \frac{-12}{5}$.

22. b) Resolvendo a equação $-3y^2 - 6y = 0$ e colocando $-3y$ em evidência, obtemos: $-3y\cdot(y+2) = 0$. Como o produto dos fatores $-3y$ e $(y+2)$ é igual a zero, pelo menos um deles é zero. Assim, $-3y = 0$ ou $y + 2 = 0$. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $y = 0$ e $y = -2$.

22. c) Resolvendo a equação $\sqrt{3}\,x^2 + x = 0$ e colocando x em evidência, obtemos: $x\cdot(\sqrt{3}x + 1) = 0$. Como o produto dos fatores x e $(\sqrt{3}x + 1)$ é igual a zero, pelo menos um deles é zero. Assim, $x = 0$ ou $(\sqrt{3}x + 1) = 0$. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $x = 0$ e $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. d) Aplicando a propriedade distributiva e colocando a equação na forma reduzida, obtemos: $m^2 - 3m = 0$.

$(m+3)\cdot(m-6) = -18 \Rightarrow m^2 - 6m + 3m - 18 = -18 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 - 3m = 0$

Colocando m em evidência, obtemos: $m\cdot(m-3) = 0$. Assim, $m = 0$ ou $m - 3 = 0$. Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $m = 0$ e $m = 3$.

23. Esse exercício é uma boa oportunidade de retomar alguns exercícios resolvidos anteriormente (exercícios 19, 21 e 22) e analisar e traçar suas similaridades e diferenças. Durante a elaboração do problema, auxilie os estudantes na investigação e formalização de ideias com perguntas como: "O que faz uma equação ter uma das raízes igual a zero? Que tipos de problemas/sentenças podem levar a uma equação desse tipo?"

24. Se 0 é uma raiz, então, substituindo x por 0 em $x^2 - 6x + p + 5 = 0$, obtemos: $p + 5 = 0$
Então: $p + 5 = 0 \Rightarrow p = -5$

25. O dobro do quadrado de um número negativo adicionado (+) ao triplo dele é igual a zero (= 0). Assim, obtemos a equação: $2x^2 + 3x = 0$. Colocando x em evidência, obtemos: $x \cdot (2x + 3) = 0$. Como o produto dos fatores é igual a zero, então pelo menos um dos fatores é igual a zero. Assim, $x = 0$ ou $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Logo, o número é $-\frac{3}{2}$.

26. Se do quadrado da idade de Luísa (x^2) subtrairmos o dobro da idade dela ($-2x$), obteremos 10 vezes a idade de Lúcia, a irmã gêmea de Luísa (por serem gêmeas, elas têm a mesma idade, $10x$).
$x^2 - 2 \cdot x = 10 \cdot x \Rightarrow x^2 - 2x - 10x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 12) = 0$
Como o produto dos fatores é igual a zero, então pelo menos um dos fatores é igual a zero. Assim, $x = 0$ ou $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$. Logo, Luísa tem 12 anos.

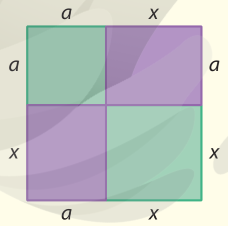
28. a) A equação $x^2 - 14x + 49 = 0$ pode ser escrita como $x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = 0$. Temos, então, um quadrado perfeito $(x - 7)^2 = 0$. Resolvendo, obtemos $(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 7$. Logo, as raízes são $x_1 = x_2 = 7$.

28. b) A equação $4x^2 - 20x + 25 = 0$ pode ser escrita como $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 0$. Temos, então, um quadrado perfeito $(2x - 5)^2 = 0$. Resolvendo, obtemos $(2x - 5) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{5}{2}$. Logo, as raízes são $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$.

28. c) A equação $4y^2 = 4y - 1$, na forma reduzida, é $4y^2 - 4y + 1 = 0$. Essa equação pode ser escrita como $(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2 = 0$. Temos, então, um quadrado perfeito $(2y - 1)^2 = 0$. Resolvendo, obtemos $(2y - 1) = 0 \Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}$. Logo, as raízes são $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$.

28. d) A equação $p^2 + 6p = 16p - 25$, na forma reduzida, é $p^2 - 10p + 25 = 0$. Essa equação pode ser escrita como $(p)^2 - 2 \cdot p \cdot 5 + 5^2 = 0$. Há, então, um quadrado perfeito $(p - 5)^2 = 0$. Resolvendo, obtemos $(p - 5) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p = 5$. Logo, as raízes são $p_1 = p_2 = 5$.

29.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Se a maior área quadrada tem medida x^2, então seus lados podem ter medidas x. Por isso, um dos lados dos dois retângulos lilases também tem medida de comprimento igual a x, pois eles são coincidentes. Como a soma das medidas das áreas dos retângulos lilases é $8x$, e as medidas dos lados dos retângulos lilases são iguais, então: $ax + ax = 8x \Rightarrow 2ax = 8x \Rightarrow ax = 4x \Rightarrow a = 4$
Assim, a área do quadrado verde menor mede 16 ($4 \cdot 4 = 16$).

30. a) Em $x^2 + 10x + 24 = 0$, como $x^2 = (x)^2$ e $10x = 2 . 5 \cdot x$, vamos adicionar 5^2 a ambos os membros para completar o quadrado perfeito.
$2x^2 + 10x = -24 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = -24 + 5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 1 \Rightarrow (x + 5)^2 = 1 \Rightarrow (x + 5) = \pm\sqrt{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 5) = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1 - 5$
Logo, as raízes são $x_1 = -4$ e $x_2 = -6$.

30. b) Em $y^2 - 4y + 3 = 0$, como $y^2 = (y)^2$ e $-4y = 2 \cdot (-2) \cdot y$, vamos adicionar $(-2)^2$ a ambos os membros para completar o quadrado perfeito.
$y^2 - 4y = -3 \Rightarrow y^2 + 2 \cdot (-2) \cdot y + (-2)^2 = -3 + (-2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 1 \Rightarrow (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow (y - 2) = \pm\sqrt{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow (y - 2) = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1 + 2$
Logo, as raízes são $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$.

30. c) Em $n^2 + 4n - 12 = 0$, como $n^2 = (n)^2$ e $4n = 2 . 2 \cdot n$, vamos adicionar 2^2 a ambos os membros para completar o quadrado perfeito.
$n^2 + 4n = 12 \Rightarrow n^2 + 2 . 2 \cdot n + 2^2 = 12 + 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 + 4n + 4 = 16 \Rightarrow (n + 2)^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (n + 2) = \pm\sqrt{16} \Rightarrow (n + 2) = \pm 4 \Rightarrow n = \pm 4 - 2$
Logo, as raízes são $n = -6$ e $n = 2$.

30. d) Em $r^2 - 2r - 3 = 0$, como $r^2 = (r)^2$ e $-2r = 2 . (-1) \cdot r$, vamos adicionar $(-1)^2$ a ambos os membros para completar o quadrado perfeito.
$r^2 - 2r = +3 \Rightarrow r^2 + 2 \cdot (-1) \cdot r + (-1)^2 = 3 + (-1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 4 \Rightarrow (r - 1)^2 = 4 \Rightarrow (r - 1) = \pm\sqrt{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow (r - 1) = \pm 2 \Rightarrow r = \pm 2 + 1$
Logo, as raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 3$.

31. a) Vamos adicionar $(-3)^2$ a ambos os membros para completar o quadrado perfeito. Assim:
$4x^2 - 12x + 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 2 \cdot (-3) \cdot 2x + (-3)^2 = -5 + (-3)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2x - 3)^2 = 4 \Rightarrow (2x - 3) = \pm\sqrt{4} \Rightarrow (2x - 3) = \pm 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Logo, os valores reais de x que verificam a equação são $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{5}{2}$.

31. b) Para ajudar os estudantes a visualizar qual é o termo a ser adicionado, incentive-os a pensar que $2 \cdot (3y) \cdot k = 6x \cdot k$, e pergunte a eles: “Qual é o número k que devemos multiplicar por $6x$ para que ele se torne $-3x$?” Espera-se que percebam que $6x$ é o dobro de $3x$; portanto, é necessário dividir por 2. Como ele é negativo, então $k = \frac{-1}{2}$. Vamos adicionar $\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ a ambos os membros para completar o quadrado perfeito. Assim, obtemos:
$9y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9y^2 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 3y + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(3y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 3y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ ou $y = -\frac{1}{3}$

Logo, os valores reais de x que verificam a equação são $y_1 = -\frac{1}{3}$ e $y_2 = \frac{2}{3}$.

31. c) Para ajudar os estudantes a visualizar qual é o termo a ser adicionado, incentive-os a pensar que $2 \cdot (\sqrt{2}\ n) \cdot k = 2\sqrt{2}n \cdot k$, e pergunte a eles: “Qual é o número k que devemos multiplicar por $2\sqrt{2}n$ para que ele se torne $7n$?”

$$2\sqrt{2}n \cdot k = 7n \Rightarrow k = \frac{7}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{8}\ k = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Note que $2n^2 = \left(\sqrt{2}n\right)^2$.

Então, vamos adicionar $\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2$ a ambos os membros para completar o quadrado perfeito. Assim, obtemos:

$$2n^2 + 7n + 6 = 0 \Rightarrow 2n^2 + 2 \cdot \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \sqrt{2}\ n + \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2 =$$

$$= -6 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\ n + \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -6 + \frac{49}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\ n + \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt{2}\ n + \frac{7\sqrt{2}}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\ n + \frac{7\sqrt{2}}{4} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2}} + \frac{7\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n + \frac{7}{4} = \pm\frac{1}{4} \begin{array}{l} \nearrow\ n_1 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2 \\ \searrow\ n_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2} \end{array}$$

31. d) Vamos multiplicar a equação por 3 para obter: $9x^2 + 24x - 9 = 0$. Em seguida, vamos adicionar 4^2 a ambos os membros para completar o quadrado perfeito. Assim, obtemos:

$$9x^2 + 24x - 9 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9 + 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x + 4)^2 = 25 \Rightarrow (3x + 4) = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x + 4) = \pm 5 \Rightarrow 3x = \pm 5 - 4 \Rightarrow x = \frac{\pm 5 - 4}{3}$$

Logo, os valores reais de x que verificam a equação são $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

32. Considerando x, $x + 1$ e $x + 2$, obtemos:

$(x + 1) \cdot (x + 2) = 10 \cdot x + 10$

Então:

$(x + 1) \cdot (x + 2) = 10 \cdot (x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 2) = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8$

Assim, os números são 8, 9 e 10, pois:

$x = 8$

$x + 1 = 9$

$x + 2 = 10$

Portanto, a média aritmética é igual a 9, pois:

$(8 + 9 + 10) : 3 = 27 : 3 = 9$

35. a) Na equação $3x^2 - 7x + 4 = 0$, $a = 3$, $b = -7$ e $c = 4$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm 1}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 1}{6}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{4}{3}$.

35. b) Na equação $2m^2 - m - 6 = 0$, $a = 2$, $b = -1$ e $c = -6$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow m = \frac{-(-1) \pm 7}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

Portanto, as raízes são $m_1 = \frac{-3}{2}$ e $m_2 = 2$.

35. c) Na equação $-x^2 + 3x + 10 = 0$, $a = -1$, $b = 3$ e $c = 10$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 9 + 40 = 49$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 7}{-2}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$.

35. d) Na equação $y^2 + 8y - 4 = 0$, $a = 1$, $b = 8$ e $c = -4$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 64 + 16 = 80$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-8 \pm 4\sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, as raízes são $y_1 = -4 + 2\sqrt{5}$ e $y_2 = -4 - 2\sqrt{5}$.

35. e) Na equação $9y^2 - 12y + 4 = 0$, $a = 9$, $b = -12$ e $c = 4$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 0$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-12) \pm 0}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Portanto, as raízes são $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$.

35. f) Na equação $5x^2 + 3x + 5 = 0$, $a = 5$, $b = 3$ e $c = 5$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 9 - 100 = -91$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-91}$

Não existem raízes reais para $5x^2 + 3x + 5 = 0$.

36. a) $x(x + 3) = 5x + 15 \Rightarrow x^2 + 3x = 5x + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 5x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = -2$ e $c = -15$.

Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm 8}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$.

36. b) $\dfrac{3y+1}{2} = \dfrac{y^2-1}{3} \Rightarrow 9y + 3 = 2y^2 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y^2 - 2 - 9y - 3 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 9y - 5 = 0$

Na equação, $a = 2$, $b = -9$ e $c = -5$.

Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \dfrac{-(-9) \pm 11}{2 \cdot 2} = \dfrac{9 \pm 11}{4}$

Portanto, as raízes são $y_1 = \dfrac{-1}{2}$ e $y_2 = 5$.

36. c) $(x + 4)^2 = 9x + 22 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 9x + 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 - 9x - 22 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm 5}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

Portanto, as raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

36. d) $(x - 1)^2 + 3x = x + 26 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 3x = x + 26 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 3x - x - 26 = 0 \Rightarrow x^2 + (-25) = 0$

Resolvendo a equação, obtemos:

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$

Portanto, as raízes são $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$.

36. e) $(x + 4) \cdot (x - 1) = 5x + 20 \Rightarrow x^2 - x + 4x - 4 = 5x + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x + 4x - 4 - 5x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = -2$ e $c = -24$.

Assim, obtemos:

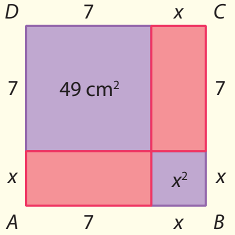
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm 10}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 10}{2}$

Portanto, as raízes são $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$.

37. a) Como as partes lilases são quadrados, os lados do quadrado de medida de área igual a 49 cm² medem 7 cm ($7 \cdot 7 = 49$). Os lados do quadrado de medida de área igual a x^2 medem x.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos representar a medida da área dos retângulos vermelhos por $7x$. Assim, a medida da área total da figura será a soma das medidas das áreas.

$x^2 + 7x + 7x + 49 = x^2 + 14x + 49$

37. b) $x^2 + 14x + 49 = 100 \Rightarrow x^2 + 14x + 49 - 100 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 14x - 51 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = 14$ e $c = -51$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-51) = 196 + 204 = 400$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-14 \pm 20}{2 \cdot 1} = \dfrac{-14 \pm 20}{2}$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = -17$ e $x_2 = 3$. Contudo $x = -17$ não convém para o problema, pois a medida x deve ser dada por um número positivo. Logo, $x = 3$ é a resposta válida para esse problema. Assim, a medida do lado do menor quadrado é 3 cm.

38. a) Pode ser que os estudantes confundam “a metade da soma de um número com o seu quadrado...” com “a metade de um número adicionada ao seu quadrado”. Fique atento a isso e reforce que é necessária a leitura atenta do problema:

A equação do 2º grau que representa a descrição “A metade da soma de um número com o seu quadrado é igual a 210.” é:

$\dfrac{x + x^2}{2} = 210$

Na forma reduzida, obtemos:

$\dfrac{x + x^2}{2} = 210 \Rightarrow x^2 + x = 420 \Rightarrow x^2 + x - 420 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -420$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1681} = 41$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 41}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 41}{2}$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = -21$ e $x_2 = 20$.

38. b) A equação do 2º grau que representa a descrição “O quadrado de um número aumentado de seus $\dfrac{3}{5}$ é igual a 28.” é:

$x^2 + \dfrac{3}{5}x = 28$

Colocando-a na forma reduzida e multiplicando-a por 5, obtemos:

$\left(x^2 + \dfrac{3}{5}x - 28\right) \cdot 5 = 0 \cdot 5 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 140 = 0$

Nessa equação, $a = 5$, $b = 3$ e $c = -140$. Assim, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-140) = 2809$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2809} = 53$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 53}{2 \cdot 5} = \dfrac{-3 \pm 53}{10}$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = 5$ e $x_2 = -\dfrac{28}{5}$.

39. Da leitura do problema, obtemos a equação: $\frac{x^2}{3} - x = 60$

Colocando-a na forma reduzida e, multiplicando-a por 3, temos $x^2 - 3x - 180 = 0$.
Resolvendo a equação, $a = 1$, $b = -3$ e $c = -180$.
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180) = 9 + 720 = 729$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{729} = 27$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm 27}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 27}{2}$$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = 15$ e $x_2 = -12$.
O triplo desses números será 45 e –36; pois $3 \cdot 15 = 45$ e $3 \cdot (-12) = -36$.

40. A medida da área do retângulo recortado é dada por $15x$ ($A = 15 \cdot x$). Assim, a medida da área restante, após o recorte, pode ser dada pela expressão $x^2 - 15x = 1\,750$. Na equação na forma reduzida, temos:
$x^2 - 15x - 1\,750 = 0$.
Nessa equação, $a = 1$, $b = -15$ e $c = -1\,750$. Assim:
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1\,750) = 7\,225$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7225} = 85$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-15) \pm 85}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm 85}{2}$$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = 50$ e $x_2 = -35$. Como se trata de uma medida de comprimento, ela não pode ser dada por um número negativo. Então, vamos considerar apenas a raiz $x_1 = 50$. Assim, a área da folha de cartolina mede 2 500 cm² ($50 \cdot 50 = 2\,500$).

41. Se a altura mede x, o comprimento mede $x + 5$. Então a medida da área será $x \cdot (x + 5)$ e a medida do perímetro será $2 \cdot x + 2 \cdot (x + 5) = 2x + 2x + 10 = 4x + 10$.
Portanto: $x \cdot (x + 5) = 300 \Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-300) = 1\,225$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{30}{2} = 15 \\ \searrow x_2 = -\frac{40}{2} = -20 \end{array}$$

O resultado negativo não convém, pois x se trata de uma medida de comprimento. Então, a medida do perímetro será 70 m, pois $4 \cdot 15 + 10 = 60 + 10 = 70$.

42. $35 = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} \Rightarrow 70 = n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (-70) = 289$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2} \begin{array}{l} \nearrow n_1 = \frac{20}{2} = 10 \\ \searrow n_2 = -\frac{14}{2} = -7 \end{array}$$

Como não há polígono com número negativo de lados, então podemos concluir que esse polígono tem 10 lados. O polígono é um decágono.

43. a) Separando a figura em três colunas, para representar a medida da área temos a seguinte expressão:
$x \cdot 3x + (x + x) \cdot 4 + (x + x + 2) \cdot 5 =$
$= 3x^2 + 2x \cdot 4 + (2x + 2) \cdot 5 = 3x^2 + 8x + 10x + 10 =$
$= 3x^2 + 18x + 10$

43. b) A equação será $3x^2 + 18x - 21 = 0$, pois:
$3x^2 + 18x + 10 = 31 \Rightarrow 3x^2 + 18x - 21 = 0$

43. c) $3x^2 + 18x - 21 = 0$
$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21) = 324 + 252 = 576$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 3} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{-18 - 24}{6} = -\frac{42}{6} = -7 \\ \searrow x_2 = \frac{-18 + 24}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{array}$$

43. d) Se a área medir 31,1 será solução da equação, mas – 7 não, pois é negativo.

44. a) $(2x + 3)^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 4x^2 + 12x + 9 - 2x^2 = 2x^2 + 12x + 9$

44. b) $2x^2 + 12x + 9 = 119 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 110 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x - 55 = 0$
$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-55) = 36 + 220 \Rightarrow \Delta = 256$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{256}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{-6 + 16}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{-6 - 16}{2} = -\frac{22}{2} = -11 \end{array}$$

Portanto, $x = 5$.

45. Contornando um quadrado de lado medindo x com um faixa medindo 2 cm, então o lado do quadrado final terá lado medindo $x + 4$. Logo, a medida de sua área será dada por $(x + 4)^2$. Assim:
$(x + 4)^2 = 56{,}25 \Rightarrow \sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{56{,}25} \Rightarrow x + 4 = 7{,}\,5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3{,}5$
Portanto, o lado do primeiro quadrado mede 3,5 cm.

46. Os quadrados construídos têm lados medindo x e y. Assim, a soma das medidas dos perímetros deve ter a medida do comprimento do arame, ou seja, $4x + 4y = 12 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$. Da relação entre as medidas das áreas, temos:
$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + (3 - x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \searrow x_2 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}$$

Então, os quadrados têm lados medindo 1 dm e 2 dm. Portanto, os perímetros medem 4 e 8, sendo necessário cortar o arame a 4 dm ou 8 dm de uma das extremidades.

47. A medida da área pode ser calculada por:

$$\frac{(2x + 5) \cdot (x + 2)}{2} = \frac{2x^2 + 5x + 4x + 10}{2} =$$
$$= \frac{2x^2 + 9x + 10}{2}$$

Então, como a área mede 95 cm², temos:

$$\frac{2x^2 + 9x + 10}{2} = 95 \Rightarrow 2x^2 + 9x + 10 = 190 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x^2 + 9x - 180 = 0$
$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-180) = 81 + 1\,440 \Rightarrow \Delta = 1\,521$

$$x = \frac{-(9) \pm \sqrt{1521}}{2 \cdot 2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{-9+39}{4} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-9-39}{4} = -\dfrac{48}{4} = -12 \end{array}$$

Então, como as medidas de comprimento não podem ter valores negativos, o valor de x deve ser igual a 7,5.

48. Sendo x o número procurado, então a equação será: $2x^2 - 4x + 13 = 10 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8 < 0$
Portanto, não existe número real que satisfaça.

51. a) Nessa equação, $a = 2$, $b = 3$ e $c = p$.
É necessário que $\Delta = 0$, então:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot p \Rightarrow \Delta = 9 - 8\,p \Rightarrow 9 - 8\,p = 0 \Rightarrow p = \frac{9}{8}$$

51. b) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \dfrac{-3 \pm 0}{2 \cdot 2} = -\dfrac{3}{4}$

51. c) $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8p}}{2 \cdot 2} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{-3+\sqrt{9-8p}}{4} = 0 \Rightarrow -3 + \sqrt{9-8p} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-8p} = 3 \\ \searrow \dfrac{-3-\sqrt{9-8p}}{4} = 0 \Rightarrow -3 - \sqrt{9-8p} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-8p} = -3 \text{ (impossível)} \end{array}$$

$$\left(\sqrt{9-8p}\right)^2 = 9 \Rightarrow 9 - 8\,p = 9 \Rightarrow -8\,p = 0 \Rightarrow p = 0$$

51. d) $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8p}}{2 \cdot 2} \begin{array}{l} \nearrow \dfrac{-3+\sqrt{9-8p}}{4} = 2 \Rightarrow -3 + \sqrt{9-8p} = 8 \Rightarrow \sqrt{9-8p} = 11 \\ \searrow \dfrac{-3-\sqrt{9-8p}}{4} = 2 \Rightarrow -3 - \sqrt{9-8p} = 8 \Rightarrow \sqrt{9-8p} = -11 \text{ (impossível)} \end{array}$$

$$\left(\sqrt{9-8p}\right)^2 = 11^2 \Rightarrow 9 - 8p = 121 \Rightarrow -8p = 112 \Rightarrow p = -\frac{112}{8} = -14$$

51. e) $\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 8p < 0 \Rightarrow -8p < -9 \;\Rightarrow p > \dfrac{9}{8}$

52. Nessa equação, $a = 2$, $b = 4$ e $c = 5k$. Então, para $\Delta > 0$, temos: $4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5k > 0 \Rightarrow 16 - 40k > 0 \Rightarrow -40k > -16 \Rightarrow k < \dfrac{2}{5}$

53. Nessa equação, $a = 1$, $b = -k$ e $c = 9$. Então, para $\Delta = 0$, temos: $(-k)^2 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm\sqrt{36} = \pm 6$
Então, $k = 6$ ou $k = -6$.

54. Nessa equação, $a = 1$, $b = -(p + 5)$ e $c = 36$. Então:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = [-(p+5)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0 \Rightarrow (p+5)^2 - 144 = 0 \Rightarrow (p+5)^2 = 144 \Rightarrow (p+5)^2 = 12^2 \begin{array}{l} \nearrow p + 5 = -12 \Rightarrow p = -17 \\ \searrow p + 5 = 12 \Rightarrow p = 7 \end{array}$$

55. a) Nessa equação, $a = 9$, $b = 12$ e $c = 2m$.
Para $\Delta < 0$, temos: $(12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2m < 0 \Rightarrow 144 - 72m < 0 \Rightarrow 72\,(2 - m) < 0 \Rightarrow 2 - m < 0 \Rightarrow 2 < m \Rightarrow m > 2$

55. b) Para $\Delta = 0$, temos: $72 \cdot (2 - m) = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$

55. c) Para $\Delta > 0$, temos: $72 \cdot (2 - m) > 0 \Rightarrow 2 - m > 0 \Rightarrow -m > -2 \Rightarrow m < 2$

55. d) Como $\Delta = 72 \cdot (2 - m)$, temos: $x = \dfrac{-12 \quad \sqrt{72 \cdot (2-m)}}{2 \cdot 9}$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{72 \cdot (2-m)}}{18} = 0{,}2 \Rightarrow -12 + \sqrt{72 \cdot (2-m)} = 3{,}6 \Rightarrow \sqrt{72 \cdot (2-m)} = 15{,}6$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{72 \cdot (2-m)}}{18} = 0{,}2 \Rightarrow -12 - \sqrt{72 \cdot (2-m)} = 3{,}6 \Rightarrow -\sqrt{72 \cdot (2-m)} = 15{,}6 \Rightarrow 72 \cdot (2 - \mathrm{m}) = 15{,}6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 72 \cdot (2-m) = 243{,}36 \Rightarrow 2 - m = 3{,}38 \Rightarrow m = -1{,}38$$

56. a) Como $S = -\frac{b}{a}$, temos: $x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} = 6$

56. b) Como $P = \frac{c}{a}$, temos: $x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{1} = 5.$

57.

	a	***b***	***c***	$S = -\frac{b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	x_1	x_2
Item a	1	– 8	15	$-\frac{-8}{1} = 8$	$\frac{15}{1} = 15$	3	5
Item b	1	2	– 3	$-\frac{2}{1} = -2$	$\frac{-3}{1} = -3$	– 3	1
Item c	5	21	4	$-\frac{21}{5} = -4{,}2$	$\frac{4}{5} = 0{,}8$	– 4	$-\frac{1}{5}$ 0,2.
Item d	1	7	12	$-\frac{7}{1} = -7$	$\frac{12}{1} = 12$	– 3	– 4
Item e	3	– 6	0	$-\frac{-6}{3} = 2$	$\frac{0}{3} = 0$	0	2
Item f	1	0	– 144	$-\frac{0}{1} = 0$	$\frac{-144}{1} = -144$	–12	–12

58. Como $a = 1$, $b = -9$ e $c = 20$, então:

$mn\,(m + n) = P \cdot S = \frac{c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{20}{1} \cdot \left(-\frac{-9}{1}\right) \Rightarrow mn\,(m + n) = 180$

59. $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{-(m-2)}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow m - 2 = 3 \Rightarrow m = 5$

60. $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{21}{(m+10)} = -\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{3}{m+10} = \frac{1}{6} \Rightarrow m + 10 = 18 \Rightarrow m = 8$

61. $P = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{p-1}{6} \Rightarrow 2 = \frac{p-1}{2} \Rightarrow p - 1 = 4 \Rightarrow p = 5$

62. Se $x_1 = r$, então $x_2 = 3r$, então:
$S = r + 3r = 4r$ e $P = r \cdot 3r = 3r^2$

Portanto: $4r = -\frac{-8}{1} \Rightarrow 4r = 8 \Rightarrow r = 2$

Assim, obtemos: $3r^2 = \frac{2p}{1} \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 1 = 2\,p \Rightarrow p = 3 \cdot 2 = 6$

64. a) Considerando $x^2 - Sx + P = 0$, obtemos:
$S = -8 + 5 = -3$ e $P = 5 \cdot (-8) = -40$; então: $x^2 + 3x - 40 = 0$

64. b) $S = 2 + \frac{4}{5} = 2{,}8$ e $P = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 1{,}6$; então:

$x^2 - 2{,}8x + 1{,}6 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0$

64. c) $S = -3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}5$ e $P = -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}5$; então:

$x^2 + 3{,}5x + 1{,}5 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 0$

64. d) $S = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5-6}{15} = -\frac{1}{15}$ e $P = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{15}$ então: $x^2 + \frac{1}{15}x - \frac{2}{15} = 0 \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$

65. $x^2 - Sx + P = 0$; então, $x^2 - 35x + 300 = 0$
Portanto, $x_1 = 15$ e $x_2 = 20$ ($15 + 20 = 35$ e $15 \cdot 20 = 300$).

66. a) $x^2 - 2x - 120 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-120) = 4 + 480 \Rightarrow \Delta = 484$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{484}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{2+22}{2} = 12 \\ \searrow x_2 = \frac{2-22}{2} = -10 \end{array}$$

66. b) $x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$

$\Delta = (-0{,}2)^2 - 4 \cdot (-1{,}2) = 0{,}04 + 4{,}8 \Rightarrow \Delta = 4{,}84$

$$x = \frac{-(-0{,}2) \pm \sqrt{4{,}84}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{0{,}2 + 2{,}2}{2} = 1{,}2 \\ \searrow x_2 = \dfrac{0{,}2 - 2{,}2}{2} = -1 \end{array}$$

Pense mais um pouco

Página 157

Pelos dados do problema, se a caixa-d'água menor tem a medida da aresta representada por x, a caixa-d'água maior terá medida da aresta representada por $(x + 1)$. A diferença entre a capacidade das caixas-d'água é 91 000 litros, ou seja, 91 m^3 (1 m^3 = 1 000 L). A equação que descreve essa situação é $(x + 1)^3 - x^3 = 91$. Aplicando a propriedade do cubo da soma, obtemos:

$x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 - x^3 = 91 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 = 91 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2 + 3x = 90$

Dividindo, membro a membro, por 3, obtemos a equação $x^2 + x = 30$. Essa equação pode ser escrita como:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 30$$

Adicionando $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a cada membro para completar o quadrado perfeito, obtemos:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 30 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 30 + \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{121}{4}} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{11}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{11}{2} - \frac{1}{2}$$

Portanto, $x = 5$ ou $x = -6$.

Concluímos que $x = 5$ é a solução da equação, pois medidas de comprimento não podem ter valores negativos. Então, as medidas das arestas das caixas-d'água são 5 metros e 6 metros ($x = 5$ e $x + 1 = 6$).

Exercícios complementares

1. Como $a \neq 0 \Rightarrow k + 5 \neq 0 \Rightarrow k \neq -5$.

2. a) $5 - 5x + 2x - 2x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x\,(2x + 3) = 0$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\dfrac{3}{2}$.

2. b) $3y^2 - 5y - 15y + 25 + y^2 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 20y + 25 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 \Rightarrow \Delta = 0$

$$y = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{20}{8} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

2. c) $-2x^2 - x + 4x + 2 = 3x + 5x^2 \Rightarrow 7x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{7} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$$

2. d) $3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{12}{3}}$ (não há raiz real)

3. A medida da área da parte pintada de azul é dada por:

$(x + 3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$

$6x + 9 = 57 \Rightarrow x = 8$

Então, o valor de x deve ser 8 cm.

4. a) Nessa equação, $b = -(m - 5)$ e $c = 1 - m$, então:

$c = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$

4. b) $b = 0 \Rightarrow m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$

5. a) Sendo x a medida do lado do quadrado, então $3x^2$ é a medida da área dos três terrenos; portanto, $3x^2 = 4\,800$.

5. b) $3x^2 = 4\,800 \Rightarrow x^2 = 1\,600 \Rightarrow x = \pm 40$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = 40$ e $x_2 = -40$.

5. c) A medida não pode ser negativa; então, $x_1 = 40$ é a raiz que representa a medida do lado de cada terreno quadrado.

6. $x^2 + 10x = 11x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) = 0$

Portanto: $x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

7. A figura lilás é formada por 6 quadrados de lados medindo $\dfrac{h}{4}$; então, sua medida de área é: $6 \cdot \left(\dfrac{h}{4}\right)^2$

A medida da área do retângulo verde é:

$\left(2\sqrt{3}\right) \cdot \left(3\sqrt{3}\right) = 6 \cdot 3 = 18$

Então: $6 \cdot \left(\dfrac{h}{4}\right)^2 = 18 \Rightarrow \left(\dfrac{h}{4}\right)^2 = 3 \Rightarrow \dfrac{h}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

8. a) Nessa equação, $a = k$, $b = -16$, $c = 5$, então:

$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot k \cdot 5 \Rightarrow \Delta = 256 - 20k$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 20k}}{2k} \Rightarrow \frac{16 \pm \sqrt{256 - 20k}}{2k} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 16 \pm \sqrt{256 - 20k} = 3 \cdot 2k \Rightarrow \pm\sqrt{256 - 20k} = 3 \cdot 2k - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{256 - 20k}\right)^2 = (3 \cdot 2k - 16)^2 \Rightarrow 256 - 20k = (6k - 16)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 256 - 20k = 36k^2 - 2 \cdot 6k \cdot (16) + 16^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 256 - 20k = 36k^2 - 192k + 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36k^2 - 172k = 0 \Rightarrow 9k^2 - 43k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k(9k - 43) = 0$

Portanto, $k = 0$ ou $9k - 43 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{43}{9}$

Como para $k = a = 0$ a equação não é de 2º grau, então $k = \dfrac{43}{9}$.

8. b) $\dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 20k}}{2k} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 20k}}{k} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 \pm \sqrt{256 - 20k} = k - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 256 - 20k = k^2 - 32k + 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 12k = 0 \Rightarrow k \cdot (k - 12) = 0$

Portanto: $k = 0$ ou $k - 12 = 0 \Rightarrow k = 12$

Então, $k = 12$.

8. c) Como $\Delta = 256 - 20k \Rightarrow \Delta > 0$, então:

$256 - 20k > 0 \Rightarrow 256 > 20k$

Portanto: $12{,}8 > k \Rightarrow k < 12{,}8 \Rightarrow k < \dfrac{64}{5}$

8. d) A soma das raízes é:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-16}{k} = \frac{16}{k} = \frac{4}{3}$$

Portanto: $k = 4 \cdot 3 = 12$

9. Como 8 é raiz, temos:

$2 \cdot 8^2 - 3p \cdot 8 + 40 = 0 \Rightarrow 128 - 24p + 40 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 168 - 24p = 0 \Rightarrow p = \dfrac{168}{24} = 7$

Alternativa **c**.

10. $\frac{2x^2+x}{11} = 2x+1 \Rightarrow 2x^2 + x = (2x+1)\cdot 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + x = 22x + 11 \Rightarrow 2x^2 - 21x - 11 = 0$

$\Delta = (-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11) = 441 + 88 \Rightarrow \Delta = 529$

$x = \frac{-(-21) \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{21 \pm 23}{4} \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{21+23}{4} = \frac{44}{4} = 11 \\ \searrow x = \frac{21-23}{4} = -0,5 \end{array}$$

O número inteiro 11 é múltiplo de 1 e de 11.
Alternativa **e**.

12. $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-B)^2 - 4 \cdot 4 = B^2 - 16 \Rightarrow \Delta = 65$

$B^2 - 16 = 65 \Rightarrow B^2 = 81 \Rightarrow B = \pm\sqrt{81}$

Portanto: $B = 9$ ou $B = -9$
Alternativa **d**.

13. $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

$-\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow -b = c$

Como $b = -4k$ e $c = 1$, então $-(-4k) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$.

Alternativa **c**.

14. $72 : x = 2x \Rightarrow 72 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36}$

Como $x < 0$, $x = -6$. Então, a metade do número é -3, pois $-6 : 2 = -3$.
Alternativa **a**.

16. $P = 5 \cdot 1 = 5$ e $S = 1 + 5 = 6$; então:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolvendo corretamente, $S = -\frac{b}{a} = 5$ e $P = 6$, então as raízes são 2 e 3 ($2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$).

17. Soma: $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{k} = 10 \Rightarrow k = -\frac{3}{10} = -0,3$

Produto: $\frac{c}{a} = -\frac{4}{-0,3} = \frac{40}{3}$

Alternativa **a**.

18. $8 + 2 = -b \Rightarrow b = -10$

Com o valor de c correto, o produto é:

$\frac{c}{a} = (-9) \cdot (-1) \Rightarrow \frac{c}{1} = 9 \Rightarrow c = 9$

Então, as raízes de $x^2 - 10x + 9 = 0$ são 9 e 1. A soma pedida é 12, pois $3 \cdot 1 + 9 = 3 + 9 = 12$.

Verificando

1. $x + 2x - 3 = 0$ não tem nenhum termo de grau 2.
Alternativa **c**.

2. Como $ax^2 + bx + c = 0$, então $a = 2$, $c = 3$ e $b = 0$.
Alternativa **b**.

3. Uma equação do 2º grau com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ é dita completa.
Alternativa **d**.

4. $A = x \cdot 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - A = 0$

Alternativa **a**.

5. $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{2+2}{2} = 2 \\ \searrow \frac{2-2}{2} = 0 \end{array}$$

Alternativa **b**.

6. **a)** $x = 7$ em $x^2 + 4x - 2 \Rightarrow 7^2 + 4 \cdot 7 - 2 = 49 + 28 - 2 \neq 0$

6. **b)** $x = 7$ em $x^2 - 2 \Rightarrow 7^2 - 2 = 49 - 2 \neq 0$

6. **c)** $x = 7$ em $-2x^2 + 4x \Rightarrow -2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 = -2 \cdot 49 + 28 \neq 0$

6. **d)** $x = 7$ em $x^2 - 3x - 28 \Rightarrow 7^2 - 3 \cdot 7 - 28 = 49 - 21 - 28 = 0$

Alternativa **d**.

7. $x^2 + 4 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 4 = -16$

Então, como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.
Alternativa **a**.

8. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 \Rightarrow \Delta = 0$

Alternativa **c**.

9. Temos que $A = x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$. Como x é uma medida de comprimento, não pode ser negativo, então, temos que $x = 7$ cm.
Alternativa **b**.

10. $A = x \cdot (2x) = 200 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$

Como é a medida do lado, então 10 m é a medida do menor lado e 20 m é a medida do maior lado ($2 \cdot 10 = 20$).
Alternativa **d**.

Capítulo 8 – Triângulo retângulo

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo.
- Conhecer o teorema de Pitágoras, verificar demonstrações e algumas aplicações.
- Resolver problemas que envolvam semelhança de triângulos e triângulos retângulos.
- Demonstrar as relações métricas em um triângulo retângulo.
- Apresentar algoritmo para a construção de um quadrado com régua e compasso.
- Determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano e das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.
- Explorar a representação gráfica de um relevo.

Neste capítulo, retomamos e ampliamos o estudo dos triângulos retângulos, tratando das relações métricas em um triângulo retângulo, com destaque para o teorema de Pitágoras e suas aplicações. Além disso, exploramos a medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano e a representação gráfica de um relevo, que pode ser associada com as vistas ortogonais de um sólido geométrico, favorecendo o trabalho com as **competências específicas 2**, **3** e **6** e com as **competências gerais 2** e **4**.

Nesta abertura, apresentamos um monumento construído em homenagem a Pitágoras, que faz menção à figura de um triângulo retângulo, para posteriormente apresentarmos um pouco sobre a História da Matemática, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da **competência geral 1**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação as atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Este capítulo tem foco na Unidade Temática **Geometria**, tratando do estudo do triângulo retângulo, aprofundando o teorema de Pitágoras, sua demonstração e variadas aplicações, assim como apresenta outras relações métricas existentes nesse triângulo desenvolvendo-se, assim, as habilidades (EF09MA13), (EF09MA14) e (EF09MA16) e estabelecendo relações com as Unidades Temáticas **Álgebra** e **Grandezas e medidas**.

Além disso, aspectos da habilidade (EF09MA17) também são trabalhados em uma atividade que propõe o estudo de vistas ortogonais em um contexto de representação de relevos.

O trabalho com este capítulo visa também a embasar estudos que serão tratados no Ensino Médio.

Comentários e resoluções

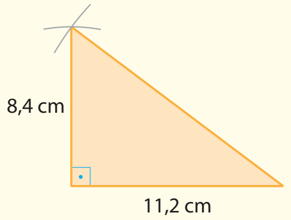
Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

a) O monumento lembra um triângulo retângulo pois, pode-se associar um ângulo reto formado entre a estátua e a base.

Exercícios propostos

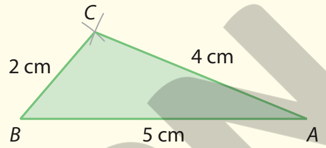
1.

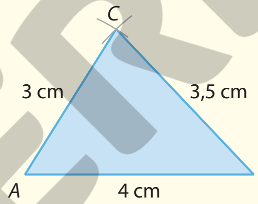


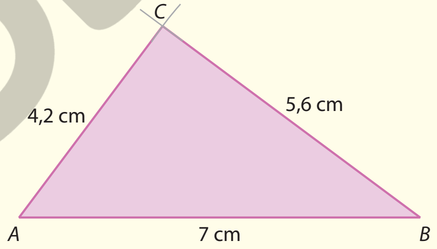
1. a) Resposta esperada: ao utilizar uma régua, é esperado que o estudante encontre a medida de comprimento de 14 cm, aproximadamente.

1. b) $14^2 = 8{,}4^2 + 11{,}2^2 \Rightarrow 196 = 70{,}56 + 125{,}44 \Rightarrow 196 = 196$
Então, sim; a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

2. Construindo os triângulos, obtemos:







ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2. a) 1º triângulo: obtusângulo, pois um dos ângulos é maior que 90°; 2º triângulo: acutângulo, pois todos os ângulos são menores que 90°; 3º triângulo: retângulo, pois um ângulo $(\hat{C})$ tem medida 90°.

2. b) 1º triângulo: $5^2 > 2^2 + 4^2$, pois $25 > 4 + 16$; 2º triângulo: $4^2 < 3^2 + 3{,}5^2$, pois $16 < 9 + 12{,}25$; 3º triângulo: $7^2 =$ $= 4{,}2^2 + 5{,}6^2$, pois $49 = 17{,}64 + 31{,}36$

3. a) $15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow 225 = 144 + x^2 \Rightarrow 81 = x^2 \Rightarrow x = 9$

3. b) $x^2 + x^2 = 10^2 \Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$

3. c) $x^2 + (5\sqrt{3})^2 = 14^2 \Rightarrow x^2 + 75 = 196 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = 11$

3. d) $x^2 + (\sqrt{7})^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 + 7 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3$

4. Como o quadrado *ABCD* tem medida de área 11 cm², seu lado tem medida $\sqrt{11}$ cm (pois $(\sqrt{11})^2 = 11$). O lado do quadrado *DEFG* tem medida 5 cm, pois sua área mede 25 cm² ($\sqrt{25} = \pm 5$, considerando-se o valor positivo para a medida do lado).

4. a) Então, a área do triângulo CDE mede $2{,}5\sqrt{11}$ cm², pois: $\dfrac{\sqrt{11} \cdot 5}{2} = \dfrac{5\sqrt{11}}{2} = 2{,}5\sqrt{11}$

4. **b)** A hipotenusa mede $x = 6$ cm, pois: $x^2 = (\sqrt{11})^2 + 5^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 = 11 + 25 = 36 \Rightarrow x = 6$

5. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa que mede $x = 24$ cm, pois: $x^2 = 12^2 + (12\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 144 \cdot 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 = 144 \cdot 4 \Rightarrow x = 12 \cdot 2 \Rightarrow x = 24$

6. **a)** A hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 9 e 12 tem medida y = 15, pois:

$y^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no outro triângulo retângulo da figura, obtemos:

$$\frac{16x^2}{9} = 225 + 175 \Rightarrow \frac{16x^2}{9} = 400 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$$

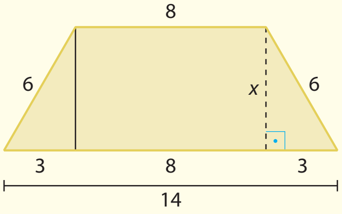
6. **b)** $x^2 + (x + 2)^2 = (x + 4)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x +$ $+ 16 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) \Rightarrow \Delta = 64$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{4+8}{2} \Rightarrow x_1 = 6 \\ \searrow x_2 = \dfrac{4-8}{2} \Rightarrow x_2 = -2 \end{array}$$

Portanto, $x = 6$, pois a medida do lado deve ser um valor positivo.

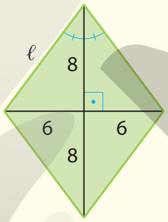
6. **c)** Por se tratar de um trapézio isósceles, é possível considerar a base maior da maneira apresentada na figura a seguir.



Portanto: $x^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$

6. **d)** Falta a medida de comprimento de um dos catetos para ser possível calcular o valor de “x”.

7. Podemos representar o losango da seguinte maneira:



7. **a)** $\ell^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 \Rightarrow \ell^2 = 100 \Rightarrow \ell = 10$

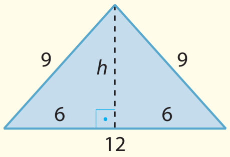
Portanto, 10 cm.

7. **b)** $A = \dfrac{d \cdot D}{2} \Rightarrow A = \dfrac{12 \cdot 16}{2} = 12 \cdot 8 \Rightarrow A = 96$

Portanto, 96 cm².

7. **c)** Não. A medida do ângulo não foi utilizada para resolver a atividade.

8. Esboço possível:



Portanto: $h^2 + 6^2 = 9^2 \Rightarrow h^2 + 36 = 81 \Rightarrow h^2 = 45 \Rightarrow h = 3\sqrt{5}$

A altura mede $3\sqrt{5}$ cm.

9. Traçando a altura do trapézio (de medida h), a partir do vértice superior direito, a base maior se divide em duas partes desiguais: uma medindo 12 (a mesma medida da base menor) e outra parte medindo 8 (a diferença $20 - 12 = 8$). Portanto, obtém-se um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o lado oblíquo e, assim:

$h^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 + 64 = 100 \Rightarrow h^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow h = 6$

O lado perpendicular às bases tem a mesma medida h e, portanto, o perímetro do trapézio mede 48 m ($6 + 20 + 10 +$ $+ 12 = 48$). Para cercá-lo com 6 voltas, são necessários 288 m de arame, pois: $6 \cdot 48 = 288$

10. Escrevendo a relação entre as medidas dos lados:

$x^2 + (x + 3)^2 = (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 6 + 9 = 9 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

Resolvendo a equação: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) \Rightarrow \Delta = 81$

Calculando os valores de x:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{-3+9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-3-9}{2} \Rightarrow x_2 = -6 \end{array}$$

Como não pode ser negativo, logo um lado mede 3 m e o outro 6 m (pois $x = 3$ e $x + 3 = 3 + 3 = 6$).

11. O bambu e o solo formam um triângulo retângulo, sendo x a medida da hipotenusa, que é o pedaço quebrado do bambu. Então:

$x^2 = 4{,}8^2 + 3{,}6^2 = 23{,}04 + 12{,}96 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

Portanto, a altura do bambu é 10,8 m, pois: $6 + 4{,}8 = 10{,}8$

12. A diagonal da placa tem medida $d \simeq 5{,}38$ m, pois, das informações do enunciado, obtemos: $d^2 = 2^2 + 5^2 =$ $= 4 + 25 \Rightarrow d = \sqrt{29} \Rightarrow d \simeq 5{,}38$

13. A figura mostra dois tamanhos de ripa diagonal, que formam triângulos retângulos. Em cada um dos triângulos menores, os catetos medem 1,2 m e 0,5 m e, chamando a medida da hipotenusa de d, então $d = 1{,}3$ m, pois:

$d^2 = 1{,}2^2 + 0{,}5^2 = 1{,}44 + 0{,}25 \Rightarrow d^2 = 1{,}69 \Rightarrow d = 1{,}3$

Em cada um dos triângulos maiores, os catetos medem 3,6 m e 1,5 m; portanto, se a medida da hipotenusa é D, então $D = 3{,}9$ m, pois:

$D^2 = 1{,}5^2 + 3{,}6^2 = 2{,}25 + 12{,}96 \Rightarrow D^2 = 15{,}21 \Rightarrow D = 3{,}9$

Portanto, para construir as outras partes são necessários 10,4 m de madeira, pois:

$1{,}3 + 1{,}3 + 3{,}9 + 3{,}9 = 10{,}4$

14. Percorreria 500 km, pois, sendo d a medida procurada, temos:

$d^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow d^2 = 90\,000 + 160\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \sqrt{250\,000} \Rightarrow\Rightarrow d = 500$

15. Resposta pessoal. Um exemplo de problema é: um artesão precisa cortar um barbante na exata medida do perímetro de uma janela em formato de um triângulo retângulo. Sabendo que os catetos desse triângulo medem 2 metros, qual deve ser a medida do comprimento do barbante cortado? Resolução: $d^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow d^2 = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 2\sqrt{2} \Rightarrow d \simeq 2{,}8$. Assim, o comprimento do barbante deve medir 6,8 m, pois $2 + 2 + 2{,}8 = 6{,}8$.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

16. a) A diagonal do quadrado forma com dois de seus lados um triângulo retângulo. Então, ela mede $15\sqrt{2}$ cm, pois:

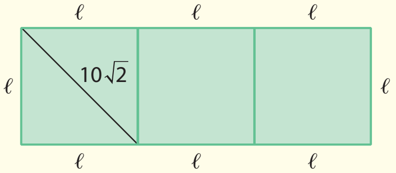
$d^2 = 15^2 + 15^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot 15^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot 15 \Rightarrow d = 15\sqrt{2}$

16. b) A área mede 450 cm², pois:

$A = 15\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2} \Rightarrow A = 225 \cdot 2 = 450$

17. Sabendo que $d = \ell\sqrt{2}$, no caso do quadrado *ABCD*, $d = 2{,}5\sqrt{2}$. Então, o lado do quadrado *ACNM* mede $2{,}5\sqrt{2}$ cm e sua área mede 12,5 cm², pois: $2{,}5\sqrt{2} \cdot 2{,}5\sqrt{2} = 12{,}5$

18. O posicionamento descrito dos quadrados é mostrado na figura a seguir:



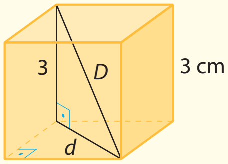
Como $d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 10\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 10$. O perímetro do retângulo mede 8ℓ. Portanto, o perímetro mede 80 cm ($10 \cdot 8 = 80$).

19. A diagonal do cubo, de medida *D*, é hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 3 e a diagonal de medida *d* da face quadrada do cubo.

Então: $d^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 18$

Portanto: $D^2 = 3^2 + d^2 \Rightarrow D^2 = 9 + 18 \Rightarrow D^2 = 27 \Rightarrow D = 3\sqrt{3}$

Logo, a diagonal do cubo mede $3\sqrt{3}$ cm.



20. Como $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, nesse caso $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

21. $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 12\sqrt{3} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 12 = \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 24$

Então, a medida da área, em cm², é dada por:

$$A = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot 12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 144\sqrt{3}$$

22. O lado do triângulo mede 16 cm, pois 48 : 3 = 16.

$$h = \frac{16\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 8\sqrt{3}$$

Logo, a altura mede $8\sqrt{3}$ cm.

23. Calculando a medida da diagonal do quadrado, obtemos:

$d^2 = 25^2 + 25^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot 25^2 \Rightarrow d = 25\sqrt{2}$

Então, essa é a medida do lado do triângulo e, portanto:

$$h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{25\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{25\sqrt{6}}{2}$$

24. O lado do triângulo mede 3 cm, pois 1,5 + 1,5 = 3. Sua altura mede $1{,}5\sqrt{3}$ cm, pois $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3}$. Portanto, sua área, em cm², é dada por:

$$A = \frac{3 \cdot 1{,}5\sqrt{3}}{2} = \frac{4{,}5}{2}\sqrt{3} \Rightarrow A = 2{,}25\sqrt{3}$$

25. a) **Falsa**, pois o ponto *P* não pertence à reta *r*.

25. b) **Verdadeira**, pois $\overline{C'D'}$ corresponde à projeção ortogonal de $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$.

25. c) **Verdadeira**, pois $\overline{N'N}$ é perpendicular a *s*.

25. d) **Verdadeira**, pois $\overline{M'N'}$ corresponde à projeção ortogonal de *MN* sobre $\overline{MN}$.

26. a) A projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ é $\overline{BH}$. A projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$ é $\overline{HC}$.

26. b) A projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ é $\overline{BM}$. A projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$ é $\overline{CM}$.

27. a) $OD^2 = OM^2 + MD^2 \Rightarrow OD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow OD = \sqrt{3}$

Então o perímetro mede: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

27. b) A área mede 3 cm², pois: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

28. a) $16^2 = 12{,}8 \cdot x \Rightarrow 256 = 12{,}8x \Rightarrow x = 20$

28. b) $x^2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

28. c) $12^2 = 9x \Rightarrow 3^2 \cdot 4^2 = 3^2 \cdot x \Rightarrow x = 16$

29. $\left(2\sqrt{7}\right)^2 + b^2 = 8^2 \Rightarrow 28 + b^2 = 64 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$
$6^2 = 8m \Rightarrow 2^2 \cdot 3^2 = 2^3 \cdot m \Rightarrow 3^2 = 2 \cdot m \Rightarrow m = 4{,}5$
$n = 8 - 4{,}5 \Rightarrow n = 3{,}5$

$$8h = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{7}}{8} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

30. Das informações do enunciado, $m = 3{,}2$ cm e $n = 1{,}8$ cm. Aplicando as relações métricas, obtemos:
$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 1{,}8 \cdot 3{,}2 \Rightarrow h^2 = 5{,}76 \Rightarrow h = 2{,}4$
$a^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow a^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 \Rightarrow a^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9 \Rightarrow a = 3$
$c = m + n = 3{,}2 + 1{,}8 \Rightarrow c = 5$
$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 3^2 + b^2 = 5^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$

31. A figura *MNPQ* é um losango e seu lado de medida *x* é hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de medida 3 cm e 4 cm, pois é metade da medida dos lados. Então, $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$. O perímetro da figura *MNPQ* mede 20 cm, pois $4 \cdot 5 = 20$.

Alternativa **a**.

32. a) Os triângulos *QPR* e *QRH* são semelhantes, pois têm ângulo Q em comum e os ângulos $Q\hat{R}P$ e $Q\hat{H}R$ são retos. Então: $\dfrac{r}{p} = \dfrac{p}{x} \Rightarrow p^2 = rx$

32. b) Os triângulos *MPN* e *MNH* são semelhantes, pois os ângulos no vértice *M* são comuns e $M\hat{H}N \cong M\hat{N}P$ (são ambos retos). De forma análoga, *MPN* e *NPH* são semelhantes, pois o ângulo *P* é comum e $P\hat{H}N \cong P\hat{N}M$ (são retos). Por isso, $MPN \cong MNH \cong NPH$ e então:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow x = ab$$

33. Sendo *h* a medida da altura, e *a* a medida da hipotenusa:
$a^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 \Rightarrow a^2 = 625 \Rightarrow a = 25$
Pela relação: $b \cdot c = a \cdot h \Rightarrow 15 \cdot 20 = 25 \cdot h \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \frac{(3 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5)}{5 \cdot 5} = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = 12$$

34. Sendo *a* a medida da hipotenusa, e *h* a altura relativa a ela, a área, em cm², é calculada por: $\dfrac{a \cdot h}{2} = 36 \Rightarrow a \cdot h = 72$

35. $x \cdot (x + 2) = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Resolvendo a equação: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Como não pode ser negativo, $x = 1$ cm; assim, o diâmetro mede 4 cm, pois: $1 + 1 + 2 = 4$

36. Resposta pessoal. Um exemplo de problema é: Um cateto de um triângulo retângulo mede 12 cm, e a hipotenusa desse triângulo mede 20 cm. Qual é a medida do comprimento da projeção deste cateto sobre a hipotenusa desse triângulo? Resolução:

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 12^2 = 20 \cdot n \Rightarrow n = \frac{(4 \cdot 3) \cdot 12^2}{4 \cdot 5} \Rightarrow n = \frac{432}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 7{,}2$$

Então, 7,2 cm.

37. a) $ET = \sqrt{(105 - 0)^2 + (34 - 0)^2} \Rightarrow$

$ET = \sqrt{11025 + 1156} \Rightarrow ET \simeq 110,4$

37. b) $EQ = \sqrt{(52{,}5 - 0)^2 + (68 - 0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow EQ = \sqrt{2756{,}25 + 4624} \Rightarrow EQ \simeq 85{,}9$

37. c) $PC = \sqrt{(52{,}5 - 11)^2 + (34 - 34)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow PC = \sqrt{(52{,}5 - 11)^2} \Rightarrow PC = 52{,}5 - 11 = 41{,}5$

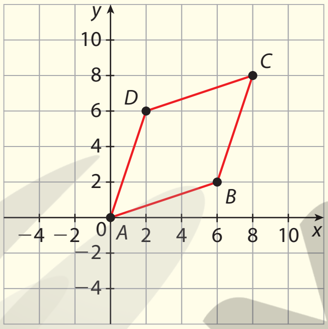
37. d) $CT = \sqrt{(105 - 52{,}5)^2 + (34 - 34)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CT = \sqrt{(105 - 52{,}5)^2} \Rightarrow CT = 105 - 52{,}5 = 52{,}5$

37. e) $CQ = \sqrt{(52{,}5 - 52{,}5)^2 + (68 - 34)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CQ = \sqrt{(68 - 34)^2} \Rightarrow CQ = 68 - 34 \Rightarrow CQ = 34$

38. Representando no plano cartesiano, obtemos:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

38. a) $AC = \sqrt{(8 - 0)^2 + (8 - 0)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{2 \cdot 8^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 8\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(2 - 6)^2 + (6 - 2)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{2 \cdot 4^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$

38. b) $BA = \sqrt{(6 - 0)^2 + (2 - 0)^2} \Rightarrow BA = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \Rightarrow$

$\Rightarrow BA = 2\sqrt{10}$

39. Os pontos no plano cartesiano são: $A(3, 2)$, $B(6, 4)$, $C(-4, 5)$, $D\ (6, -4)$, $E(-5, -4)$. Logo:

$AB = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{3^2 + 2^2} \Rightarrow AB = \sqrt{13}$

$AC = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (5 - 2)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{7^2 + 3^2} \Rightarrow AC = \sqrt{58}$

$AD = \sqrt{(6 - 3)^2 + (-4 - 2)^2} \Rightarrow AD = \sqrt{3^2 + 6^2} \Rightarrow AD = 3\sqrt{5}$

$AE = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-4 - 2)^2} \Rightarrow AE = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow AE = 10$

$BC = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (5 - 4)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{10^2 + 1^2} \Rightarrow BC = \sqrt{101}$

$BD = \sqrt{(6 - 6)^2 + (-4 - 4)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{8^2} \Rightarrow BD = 8$

$BE = \sqrt{(-5 - 6)^2 + (-4 - 4)^2} \Rightarrow BE = \sqrt{11^2 + 8^2} \Rightarrow BE = \sqrt{185}$

$CD = \sqrt{(6 - (-4))^2 + (-4 - 5)^2} \Rightarrow CD = \sqrt{10^2 + 9^2} \Rightarrow CD = \sqrt{181}$

$CE = \sqrt{(-5 - (-4))^2 + (-4 - 5)^2} \Rightarrow CE = \sqrt{1^2 + 9^2} \Rightarrow CE = \sqrt{82}$

$DE = \sqrt{(-5 - 6)^2 + (-4 - (-4))^2} \Rightarrow DE = \sqrt{11^2} \Rightarrow DE = 11$

Para saber mais

Páginas 179 e 180

1. Resposta pessoal. Uma sugestão de resolução é dada a seguir:

Se um dos catetos mede 15 cm, temos:

$x + (x + 2) = 15$ ou $x \cdot (x + 2) = 15$

- $x + (x + 2) = 15 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = 6{,}5$

  Como x é um número inteiro, esse valor não pode ser considerado.
- $x \cdot (x + 2) = 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

  Resolvendo a equação: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) \Rightarrow \Delta = 64$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \dfrac{-2 + 8}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-2 - 8}{2} = -5 \end{array}$$

Portanto, $x = 3$, pois não existe medida de comprimento negativa. Assim, o outro cateto mede 8, pois $3 + (3 + 2) = 8$ e a hipotenusa medirá h; logo:

$h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 \Rightarrow h^2 = 289 \Rightarrow h = 17$

Além disso, tomando o triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm e cuja hipotenusa mede 5 cm como referência, temos outro triângulo retângulo com catetos medindo 15 cm e 20 cm e hipotenusa medindo 25 cm.

2. Como os dois triângulos são semelhantes, temos: $\frac{5}{35} = \frac{3}{a} = \frac{4}{b}$, então:

$$\frac{5}{35} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 21 \text{ e } \frac{5}{35} = \frac{4}{b} \Rightarrow b = 28$$

Assim, concluímos que o perímetro mede 84 cm, pois $35 + 28 + 21 = 84$, e a área tem medida 294 cm², pois:

$$\frac{28 \cdot 21}{2} = 14 \cdot 21 = 294$$

3. O perímetro do triângulo de lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm mede 12 cm ($3 + 4 + 5 = 12$). Como os triângulos são semelhantes, obtemos: $\frac{12}{108} = \frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{5}{c}$

Então: $\frac{12}{108} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 27$; $\frac{12}{108} = \frac{4}{b} \Rightarrow b = 36$;

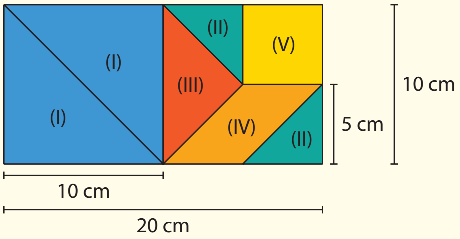
$$\frac{12}{108} = \frac{5}{c} \Rightarrow c = 45$$

4. Resposta pessoal. Um exemplo de quadro:

x	$x + 2$	$x + (x + 2)$	$x \cdot (x + 2)$	$x \cdot (x + 2) + 2$
3	5	8	15	17
4	6	10	24	26
5	7	12	35	37
6	8	14	48	50
7	9	16	63	65

Pense mais um pouco...

Página 179



(i) Sendo x a medida da hipotenusa do triângulo maior (azul), seus catetos medem 10 cm e então: $x^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + {} + 100 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \sqrt{200} \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$

Então, a medida do perímetro desta peça é 34,1 cm, pois: $10 + 10 + 14 = 34{,}1$

(ii) No triângulo menor (verde), sendo y a medida da hipotenusa, seus catetos medem 5 cm e, então: $y^2 = 5^2 + 5^2 = {} = 25 + 25 \Rightarrow y^2 = 50 \Rightarrow y = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow y \simeq 7{,}05$

Então, o perímetro desta peça mede 17,05 cm, pois: $5 + 5 + 7{,}05 = 17{,}05$

(iii) No triângulo médio (vermelho), os lados tem medidas 10 cm e $y = 7{,}05$ cm. Portanto, o perímetro mede 24,1 cm, pois: $10 + 7{,}05 + 7{,}05 = 24{,}1$

(iv) Para o paralelogramo (laranja), seus lados medem 5 cm e $y = 7{,}05$ cm; então, o perímetro desta peça mede 24,1 cm, pois: $5 + 5 + 7{,}05 + 7{,}05 = 24{,}1$

(v) O perímetro do quadrado mede 20 cm, pois seu lado mede 5 cm.

Página 182

A área de cada um dos triângulos internos ao quadrado *ABCD* é $\frac{a \cdot b}{2}$, pois eles são triângulos retângulos. Assim, a área total dos 4 triângulos é $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$. Portanto, temos que a área do quadrado *ABCD* é igual a área do quadrado *EFGH* mais a área dos 4 triângulos juntos. Logo, considerando as medidas de cada figura, temos:

$A_{ABCD} = A_{EFGH} + 4 \cdot A_{triângulo} \Rightarrow a^2 + b^2 = A_{EFGH} + 2ab \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{EFGH} = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow A_{EFGH} = (a - b)^2$

Página 183

Cada um dos triângulos construídos tem área de medida x^2 cm², pois: $\frac{x \cdot 2x}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$

Então, 20 deles têm área total $20x^2$ cm² (pois $x^2 \cdot 20 = {} = 20x^2$). Um quadrado com essa área tem lado de medida $2x\sqrt{5}$ cm, pois: $\sqrt{20x^2} = \sqrt{20} \cdot x = 2\sqrt{5} \cdot x = 2x\sqrt{5}$

Trabalhando a informação

Páginas 188 e 189

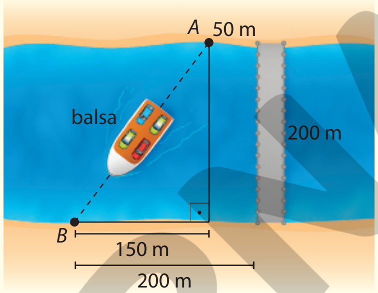
1. Segundo o gráfico, o Pão de Açúcar é representado pela parte menor em laranja-escuro, com o maior valor no eixo vertical (medida da altitude em metros). A altura aproximada dele mede 380 metros. O morro da Urca é representado pela imagem amarela à direita do Pão de Açúcar, totalizando cerca de 210 metros de altura.

2. Ao observar as figuras, podemos perceber que o rádio 1 tem alça superior e nenhum botão na lateral, não sendo possível ter a vista lateral I nem a vista superior F, o que faz com que as alternativas **b** e **d** não sejam as corretas. O rádio 3 não tem acessórios superiores e tem um só botão lateral pequeno, não sendo possível que sua vista lateral seja o K e, assim, a alternativa **a** não está correta. Portanto, a alternativa correta é a **c**, como de fato se pode relacionar as figuras às respectivas vistas laterais e superiores.

Exercícios complementares

1. A distância de medida x é a medida da hipotenusa, e os catetos medem 120 m ($12 \cdot 10 = 120$) e 160 m ($16 \cdot 10 = {} = 160$), portanto: $x^2 = 120^2 + 160^2 \Rightarrow x^2 = 14\,400 + 25\,600 \Rightarrow x = {} = \pm\sqrt{40\,000} \Rightarrow x = +200$ ou $x = -200$ ($x = -200$ não convém). Logo, a distância mede 200 m.

2. Traçamos uma perpendicular passando pelo ponto A, e sendo d igual a AB:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2. **a)** $d^2 = 200^2 + 150^2 \Rightarrow d^2 = 40\,000 + 22\,500 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \pm\sqrt{62500} \Rightarrow d = 250$ ou $d = -250$

Portanto, 7,05 ($d = -250$ não convém).

Logo, a distância tem medida 250 m.

2. **b)** Considerando a relação

$$\text{velocidade} = \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}}, \text{ temos: } v = \frac{250 \text{ m}}{5 \text{ min}} =$$

$$= \frac{\frac{250}{1000} \text{ km}}{\frac{5}{60} \text{ h}} \Rightarrow v = \frac{\frac{25}{10}}{\frac{5}{6}} = \frac{25}{10} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 5} \Rightarrow v = 3$$

Portanto, 3 km/h.

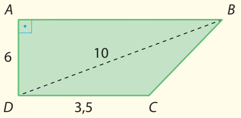
3. Seja x a medida do lado perpendicular ao de medida 2. Então:

$3^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow 9 = x^2 + 4 \Rightarrow 9 - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

Como $x = -\sqrt{5}$ não convém, $x = \sqrt{5}$. Então:

$y^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow y^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 8^2 \Rightarrow y^2 = 5 + 64 \Rightarrow y = \sqrt{69}$

4. Traçamos o polígono *ABCD* conforme as informações do enunciado:



4. **a)** A base maior é $\overline{AB}$ e, também, é cateto de um triângulo retângulo; portanto, seja x sua medida, então: $10^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = x^2 + 36 \Rightarrow x = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$

A medida é de 8 cm.

4. **b)** O lado oblíquo é $\overline{BC}$, cuja medida é y. Construindo a altura *CH*, perpendicular à *AB*, de modo que $CH = {} = AD = 6$ e $BH = AB - AH = AB - CD \Rightarrow BH = 8 - 3{,}5 = {} = 4{,}5$. Então: $BC^2 = CH^2 + BH^2 \Rightarrow y^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + {} + 20{,}25 \Rightarrow y = \sqrt{56{,}25} \Rightarrow y = 7{,}5$

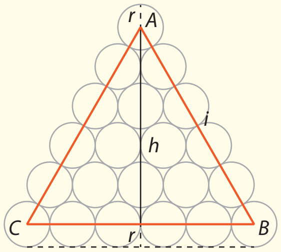
Logo, a medida é 7,5 cm.

4. **c)** A medida é 25 cm, pois: $6 + 8 + 7{,}5 + 3{,}5 = 25$

4. **d)** $A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(8+3{,}5)\cdot 6}{2} = 34{,}5$

Então, a medida de área é 34,5 cm².

5. A configuração das latas é tal que a altura da pilha mede $2r + h$, sendo h a medida da altura do triângulo equilátero ABC de lado ℓ de medida $10r$.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Como o raio mede $r = 4{,}5$ cm, o lado mede $\ell = 45$ cm; a medida da altura do triângulo equilátero é: $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{45\sqrt{3}}{2}$

Portanto, a altura da pilha tem medida $\left(\dfrac{45\sqrt{3}}{2} + 9\right)$cm,

pois: $\dfrac{45\sqrt{3}}{2} + 2r = \dfrac{45\sqrt{3}}{2} + 2\cdot 4{,}5 = \dfrac{45\sqrt{3}}{2} + 9$

6. Pelas informações do enunciado, sendo h a medida da altura, então: $15^2 = h^2 + \left(\dfrac{24}{2}\right)^2 \Rightarrow 225 = h^2 + 144 \Rightarrow h^2 = 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \pm\sqrt{81} \Rightarrow h = +9$ ou $h = -9$

Como o valor negativo não convém, então, h mede 9 cm;

logo: $A = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{24\cdot 9}{2} = 12\cdot 9 = 108$

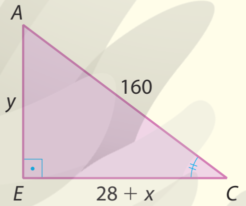
Portanto sua área mede 108 cm².

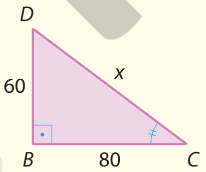
7. O maior lápis que cabe nesse estojo é o de medida igual à da diagonal d; portanto: $d^2 = 15^2 + 12^2 = 225 + 144 \Rightarrow$
$\Rightarrow d = \pm\sqrt{369} \simeq \pm 19{,}2$

Como o valor negativo não convém, então $d = 19{,}2$ cm.

Como $19{,}2 > 18$, é possível colocar o lápis no estojo, se ele for colocado na diagonal.

8. Desenhando os triângulos separadamente e rotacionando para alinhar os ângulos:





8. **a)** $CD = x$, então $x^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow x^2 = 3\,600 + 6\,400 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10\,000} \Rightarrow x = 100$ ou $x = -100$, como esse não convém , logo: $CD = 100$ m; $EC = 28 + x = 28 + 100 = 128$, portanto $EC = 128$ m; $AE = y$, então $160^2 = y^2 + 128^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25\,600 = y^2 + 16\,834 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9\,216} = \pm 96$. Como o valor negativo não convém, $AE = 96$ m.

8. **b)** $A_{ACE} = \dfrac{EC\cdot AE}{2} = \dfrac{128\cdot 96}{2} = 64\cdot 96 = 6\,144$. Então a

área de ACE mede 6 144 m²; $A_{BCD} = \dfrac{BC\cdot BD}{2} = \dfrac{80\cdot 60}{2} =$

$= 40\cdot 60 = 2\,400$

Então, a área de BCD mede 2 400 m².

8. **c)** $A_{ABDE} = A_{ACE} - A_{BCE} = 6\,144 - 2\,400 = 3\,744$, então a área de A_{BDE} é 3 744 m²

9. Se o perímetro mede 60 cm e os quatro lados têm a mesma medida, então seu lado mede 15 cm (60 : 4 = 15). Metade da diagonal menor, com medida x, é um dos catetos de um triângulo retângulo formado por um lado do losango (mede 15 cm) e metade da diagonal maior (ou seja, medindo 13 cm). Portanto: $15^2 = x^2 + 13^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 225 = x^2 + 169 \Rightarrow x^2 = 56 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2^2\cdot 14} \Rightarrow x = 2\sqrt{14}$
ou $x = -2\sqrt{14}$ (não convém)

Logo, $x = 2\sqrt{14}$.

Portanto, a diagonal mede $4\sqrt{14}$ cm $\left(2\sqrt{14}\cdot 2 = 4\sqrt{14}\right)$.

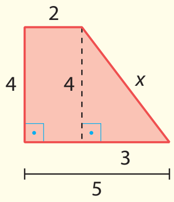
10. A área pode ser calculada por: $(x + 1)\cdot(x - 2) =$
$= 18 \Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 18 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou
$x = -4$ (não convém)

Logo, $x = 5$. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$d^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 \Rightarrow d = \pm\sqrt{45} = \pm\sqrt{3^2\cdot 5} \Rightarrow d = 3\sqrt{5}$
ou $d = -3\sqrt{5}$ (não convém)

Logo, $d = 3\sqrt{5}$ cm.

11. Construímos a figura conforme a descrição do enunciado:



$x^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$ (não convém)

Logo, $x = 5$.

Então, o perímetro mede 16, pois:

$4 + 5 + 5 + 2 = 16$

Alternativa **d.**

12. Aplicando o teorema de Pitágoras: $a^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 =$
$= 16 + 9 \Rightarrow a = \pm\sqrt{25} \Rightarrow a = 5$ ou $a = -5$ (não convém)

Logo, $a = 5$. Usando as relações métricas: $32 = m\cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \dfrac{9}{5}$ e $42 = n\cdot 5 \Rightarrow n = \dfrac{16}{5}$. Então:

$L = 25\cdot m\cdot n \Rightarrow L = 25\cdot\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{16}{5} = 144$

Alternativa **d.**

13. Chamando ℓ a medida dos lados desconhecidos congruentes: $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow 27 = 2\ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \pm\sqrt{\dfrac{27}{2}} \Rightarrow \ell = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ ou $\ell = -\sqrt{\dfrac{27}{2}}$ (não convém)

Logo, $\ell = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$. Assim, a área é dada por:

$$\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right)^2}{2} = \frac{27}{2} + \frac{\frac{27}{2}}{2} = \frac{27}{2} + \frac{27}{4} =$$

$= 13{,}5 + 6{,}75 = 20{,}25$

Então, a área tem medida 20, 25 u^2.

14. $(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = 0$ (não convém)

Logo, $x = 8$.

$x + 2$ é a medida da hipotenusa. Logo, como $x = 8$ cm, a hipotenusa mede 10 cm.

Alternativa **c.**

15. Conforme as informações do enunciado, se a medida de um dos catetos é x, então: $x^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{225} \Rightarrow x = 15$ ou $x = -15$ (não convém)

Logo, $x = 15$ cm. Seja y a medida do outro cateto:

$$\frac{y}{15} = \frac{12}{9} \Rightarrow 9\,y = 180 \Rightarrow y = 20$$

Então, o outro cateto mede 20 cm.

16. Seja h a altura relativa à hipotenusa, e m a medida da projeção do cateto sobre a hipotenusa. Então:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Rightarrow 1 = h^2 + \frac{5}{25} \Rightarrow h = \pm\sqrt{\frac{20}{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{20}{25}} \text{ ou } h = -\sqrt{\frac{20}{25}} \text{ (não convém)}$$

Logo, $h = \sqrt{\frac{20}{25}}$. Assim, temos que:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)} = m \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20}{25} = \frac{\sqrt{5}m}{5} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, a medida da hipotenusa é $\sqrt{5}$ cm, pois:

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{1\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

17. $BC^2 = 12{,}8^2 + 9{,}6^2 \Rightarrow BC^2 = 163{,}84 + 92{,}16 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \pm\sqrt{256} \Rightarrow BC = 16$ ou $BC = -16$ (não convém)

Logo, $BC = 16$.

$12{,}8^2 = BD \cdot 16 \Rightarrow BD = 10{,}24$

$9{,}6^2 = DC \cdot 16 \Rightarrow 92{,}16 = 16DC \Rightarrow DC = 5{,}76$

$h \cdot 16 = 12{,}8 \cdot 9{,}6 \Rightarrow 16h = 122{,}88 \Rightarrow h = 7{,}68$

Percurso $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow P$ mede 46 km, pois:

$7{,}68 + 10{,}24 + 12{,}8 + 9{,}6 + 5{,}76 - 0{,}08 = 46$

18. $15 \cdot h = 12 \cdot 9 \Rightarrow 15h = 108 \Rightarrow h = 7{,}2$

Alternativa **b.**

19. Seja m e n as projeções dos catetos. Então:

$m - n = 7 \Rightarrow m = 7 + n$

Pela relação $h^2 = m \cdot n$, obtemos: $m \cdot n = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow (7 + n) \cdot n = 144 \Rightarrow 7n + n^2 - 144 = 0 \Rightarrow n^2 + 7n - 144 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 9$ ou $n = -16$ (não convém)

Logo, $n = 9$ e, assim, temos: $m = 7 + 9 = 16$. Então:

$a = m + n \Rightarrow a = 16 + 9 = 25$

Alternativa **d.**

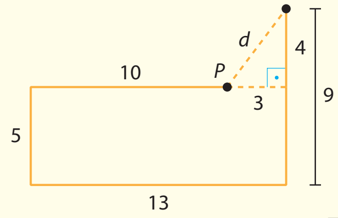
20. $A = \frac{(x + 1) \cdot x}{2} = 6 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -4$

Como $x = -4$ não convém, logo $x = 3$.

$P = 3 + (3 + 2) + (3 + 1) = 12$

Alternativa **d.**

21. A situação descrita pode ser ilustrada pela figura a seguir:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Então: $d^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 16 + 9 \Rightarrow d = \pm\sqrt{25} \Rightarrow d = 5$ ou $d = -5$ (não convém)

Logo, $d = 5$ km.

Portanto 5 km a noroeste.

Alternativa **e.**

22. A distância inicial entre o bloco e a base da elevação tem medida d. Então: $3{,}9^2 = 1{,}5^2 + d^2 \Rightarrow 15{,}21 = 2{,}25 + d^2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{12{,}96} \Rightarrow d = -3{,}6$ (não convém)

Logo, $d = 3{,}6$ m.

Após o deslocamento, forma-se um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 2,5 m, pois $3{,}9 - 1{,}4 = 2{,}5$.

Então, a distância final entre os blocos é b.

Logo: $2{,}5^2 = 1{,}5^2 + b^2 \Rightarrow 6{,}25 = 2{,}25 + b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 2$ ou $b = -2$ (não convém)

Logo, $b = 2$.

Portanto, $x = 3{,}6 - 2{,}0 = 1{,}6$.

Alternativa **c.**

Verificando

1. A medida x é tal que: $5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 - 9 = x^2 \Rightarrow 16 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

Como $x = -4$ não convém, logo $x = 4$.

Alternativa **b.**

3. $30^2 = x^2 + y^2$

Então, para $x = 18$ e $y = 24$, temos:

$30^2 = 18^2 + 24^2 \Rightarrow 900 = 324 + 576 \Rightarrow 900 = 900$ (verdade).

Alternativa **c.**

4. $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$ (não convém)

Logo $x = 5$ m.

Alternativa **a.**

5. É possível resolver aplicando a semelhança de triângulos:

$$\frac{3{,}6}{7{,}2} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3{,}6x = 43{,}2 \Rightarrow x = 12$$

Alternativa **c.**

6. $d^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 \Rightarrow d = \pm\sqrt{100} \Rightarrow d = 10$ ou $d = -10$.

Como $d = -10$ (não convém); logo, $d = 10$.

Alternativa **d**

7. $d^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow d^2 = 100 + 100 \Rightarrow d = \pm\sqrt{200} = \pm\sqrt{10^2 \cdot 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = +10\sqrt{2}$ ou $d = -10\sqrt{2}$ (não convém)

Logo, $d = 10\sqrt{2}$.

Alternativa **a.**

8. A diagonal mede d, pois: $d^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 25 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \pm\sqrt{50} = \pm\sqrt{5^2 \cdot 2} \Rightarrow d = +5\sqrt{2}$ ou $d = -5\sqrt{2}$ (não convém); logo, $d = 5\sqrt{2}$. Então, a área de um quadrado de lado medindo $5\sqrt{2}$ cm mede 50 cm², pois:

$A = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{4} = 25 \cdot 2 = 50$

Alternativa **b.**

Organizando

a) Dois lados perpendiculares (catetos) e um lado (hipotenusa) que se opõe ao ângulo reto.

b) O teorema de Pitágoras enuncia que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

c) São triângulos retângulos (com um ângulo medindo 90 graus) cujas medidas de seus lados, catetos e hipotenusas, são dadas por números inteiros positivos.

Capítulo 9 – Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Aplicar a semelhança de triângulos para a obtenção das razões trigonométricas em um triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.
- Resolver problemas que envolvem semelhança de triângulos e razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Utilizar o quadro de razões trigonométricas.
- Aplicar o teorema de Pitágoras na determinação das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°.
- Analisar gráficos com distorção.

Neste capítulo, ampliamos o estudo do triângulo retângulo apresentando as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, que serão a base para o estudo de Trigonometria a ser desenvolvido no Ensino Médio. Ao longo dos estudos, propomos atividades de verificação, reflexão e aplicação desses conteúdos, que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e do espírito de investigação, que estão relacionados com a **competência específica 2** e a **competência geral 2**.

As atividades também relacionam conceitos relacionados às Unidades Temáticas **Álgebra** e **Geometria**, além de explorar aplicações em contextos diversos, o que favorece o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **6** e das **competências gerais 2** e **4**.

Apresentamos o trabalho com calculadora para o cálculo de razões trigonométricas, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5** e da **competência específica 5**.

O capítulo trata ainda da análise de gráficos com distorções, que induzem a conclusões equivocadas com a temática Índice de Desenvolvimento Humano (IDH). Essa temática possibilita uma discussão sobre saúde, educação e renda. Assim, o trabalho proposto contribui com o desenvolvimento das **competências específicas 4** e **7** e da **competência geral 8**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

Este capítulo dá continuidade ao anterior, desenvolvendo agora as relações trigonométricas nos triângulos retângulos e suas aplicações na resolução das atividades, vinculadas à Unidade Temática **Geometria**, tendo como base a proporcionalidade e a semelhança de triângulos, tópicos já estudados em capítulos anteriores neste livro, favorecendo o trabalho com as habilidades (EF09MA12) e (EF09MA14).

Os conhecimentos tratados neste capítulo constituem-se como subsídios para a compreensão de estudos a serem desenvolvidos no Ensino Médio.

Faz-se conexão com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, por meio da análise de gráficos de linhas com distorção na seção *Trabalhando a informação*, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA21).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

5. a) Pelo teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4^2 + 7{,}5^2 = (AB)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AB)^2 = 16 + 56{,}25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AB)^2 = 72{,}25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{72{,}25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB = 8{,}50$$

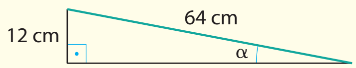
5. b) $\cos\hat{B} = \dfrac{CB}{CA} \Rightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{7{,}5}{8{,}50} \Rightarrow \cos\hat{B} \simeq 0{,}88$

5. c) $tg\hat{B} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow tg\hat{B} = \dfrac{4}{7{,}5} = tg\hat{B} \simeq 0{,}53$

5. d) $\dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{4}{8{,}5} \Rightarrow \cos\hat{A} \simeq 0{,}47$

5. e) $tg\,\hat{A} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow tg\,\hat{A} = \dfrac{7{,}5}{4} \Rightarrow tg\,\hat{A} \simeq 1{,}88$

6. a) Apresentamos, a seguir, uma figura que representa a situação descrita.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

6. b) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{64} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}1875 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \simeq 0{,}19$

7. Seja α o ângulo formado entre a diagonal e o maior lado, e β o ângulo formado entre a diagonal e o menor lado. Como a tangente de um ângulo é dada pela razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo, então:

$$tg\,\alpha = \frac{7{,}2}{15{,}6} \Rightarrow tg\,\alpha \simeq 0{,}46$$

$$tg\,\beta = \frac{15{,}6}{7{,}2} \Rightarrow tg\,\beta \simeq 2{,}17$$

9. **a)** $MQ \simeq 1{,}75$ cm, $MR \simeq 3{,}54$ cm e $QR \simeq 3{,}07$ cm.

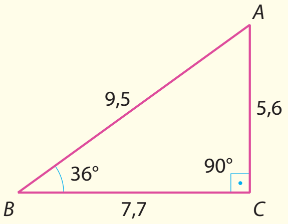
9. **b)** $m(\widehat{M}) = 60°$ e $m(\widehat{R}) = 30°$.

9. **c)** $\text{sen } \widehat{M} = \dfrac{QR}{MR} \Rightarrow \text{sen } (60°) = \dfrac{3{,}07}{3{,}54} \Rightarrow \text{sen } (60°) \simeq 0{,}87$

9. **d)** $\cos \widehat{M} = \dfrac{MQ}{MR} \Rightarrow \cos (60°) = \dfrac{1{,}75}{3{,}54} \Rightarrow \cos (60°) \simeq 0{,}49$

9. **e)** $\text{tg } \widehat{M} = \dfrac{QR}{MQ} \Rightarrow \text{tg } (60°) = \dfrac{3{,}07}{1{,}75} \Rightarrow \text{tg } (60°) \simeq 1{,}75$

10. Apresentamos, a seguir, uma das representações possíveis do triângulo descrito.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. **a)** $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5{,}6}{9{,}5} \Rightarrow \text{sen } \hat{B} \simeq 0{,}59$

10. **b)** $\cos \hat{B} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{7{,}7}{9{,}5} \Rightarrow \cos \hat{B} \simeq 0{,}81$

10. **c)** $\text{tg } \hat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5{,}6}{7{,}7} \Rightarrow \text{tg } \hat{B} \simeq 0{,}73$

11. O cosseno do ângulo α formado entre o fio diagonal e o lado maior da tampa é dado por:

$$\cos \widehat{A} = \frac{\text{medida do cateto adjacente } \widehat{A}}{\text{medida da hipotenusa}} =$$

$$= \frac{32}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Para determinar a medida da hipotenusa (x), como conhecemos as medidas dos catetos, vamos aplicar o teorema de Pitágoras.

$32^2 + 24^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1\,024 + 576 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{1600} \Rightarrow x = 40$

Assim:

$$\cos \widehat{A} = \frac{32}{x} = \frac{32}{40} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}8$$

12. **a)** $\text{sen } \widehat{M} = \dfrac{NP}{MN} \Rightarrow \text{sen } \widehat{M} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \simeq 0{,}83$

12. **b)** $\cos \widehat{N} = \dfrac{NP}{MN} \Rightarrow \cos \widehat{N} = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos \widehat{N} \simeq 0{,}83$

12. **c)** $\text{tg } \widehat{M} = \dfrac{NP}{MP} \Rightarrow \text{tg } \widehat{M} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \text{tg } \widehat{M} = 1{,}50$

12. **d)** $\cos \widehat{M} = \dfrac{MP}{MN} \Rightarrow \cos \widehat{M} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos \widehat{M} \simeq 0{,}55$

12. **e)** $\text{tg } \widehat{N} = \dfrac{MP}{NP} \Rightarrow \text{tg } \widehat{N} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \text{tg } \widehat{N} \simeq 0{,}67$

12. **f)** $\text{sen } \widehat{N} = \dfrac{MP}{MN} \Rightarrow \text{sen } \widehat{N} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{N} \simeq 0{,}55$

13. Como cada degrau mede 16 cm de altura, o ponto mais alto da rampa está a uma altura que mede 32 cm ($2 \cdot 16 = 32$). Com isso, convém aplicar a razão seno para determinar a medida c do comprimento da rampa, em centímetro.

$$\text{sen } 6° = \frac{32}{c} \simeq 0{,}1 \Rightarrow 0{,}1c \simeq 32 \Rightarrow c \simeq \frac{32}{0{,}1} \Rightarrow c \simeq 320$$

Como 1 metro equivale a 100 centímetros, então 320 cm = = 3,2 m.

Alternativa **e**.

16. **a)** Consultando o quadro de razões trigonométricas, temos:

sen 54° = 0,8090

16. **b)** cos 36° = 0,8090

16. **c)** tg 12° = 0,2126

16. **d)** sen 56° = 0,8290

16. **e)** cos 75° = 0,2588

16. **f)** tg 89° = 57,2900

17. **a)** Consultando o quadro de razões trigonométricas, temos:

sen 28° = 0,4695

17. **b)** cos 39° = 0,7771

17. **c)** tg 16° = 0,2867

17. **d)** sen 66° = 0,9135

17. **e)** cos 79° = 0,1908

17. **f)** tg 84° = 9,5144

20. Considerando as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo de 55°, vamos aplicar a razão trigonométrica tangente para determinar a medida aproximada, em metro, da largura do rio.

$$\text{tg } 55° = \frac{\ell}{20} \Rightarrow 1{,}4281 = \frac{\ell}{20} \Rightarrow \ell = 28{,}562$$

A largura do rio mede 28,562 m

21. **a)** $\overline{BD}$ é a diagonal maior desse losango. Considerando o triângulo de hipotenusa de medida AB, o cateto adjacente ao ângulo de 20° mede metade de BD, ou seja,

$$\cos 20° = \frac{\frac{BD}{2}}{2{,}5}.$$

Consultando o quadro de razões trigonométricas, temos que cos 20°= 0,9397; portanto:

$$0{,}9397 = \frac{\frac{BD}{2}}{2{,}5} \Rightarrow \frac{BD}{2} = 2{,}34925 \Rightarrow BD \simeq 4{,}7$$

Portanto, a medida da diagonal maior é aproximadamente 4,7 cm.

21. **b)** $\overline{AC}$ é a diagonal menor do losango. Considerando o triângulo de hipotenusa de medida AB, o cateto oposto ao ângulo de 20° mede metade de AC, ou seja,

$$\text{sen } 20° = \frac{\frac{AC}{2}}{2{,}5}.$$

Consultando o quadro de razões trigonométricas para sen 20°:

$$0{,}3420 = \frac{\frac{AC}{2}}{2{,}5} \Rightarrow \frac{AC}{2} = 0{,}855 \Rightarrow AC \simeq 1{,}7$$

Então, a diagonal menor mede 1,7 cm.

21. c) $A = \frac{BD \cdot AC}{2} \Rightarrow A \simeq \frac{4{,}7 \cdot 1{,}7}{2} \Rightarrow A \simeq 4$

Portanto, a medida aproximada da área é 4 cm².

22. a) Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, concluímos que o ângulo $\hat{B}$ mede 55°.

$35° + 90° + m(\hat{B}) = 180° \Rightarrow m(\hat{B}) = 55°$

22. b) $\text{sen } 35° = \frac{BC}{12{,}6} \Rightarrow 0{,}5736 = \frac{BC}{12{,}6} \Rightarrow BC \simeq 7{,}2$

Portanto, a medida BC é aproximadamente 7,2 cm.

22. c) $A = \frac{AC \cdot BC}{2} \Rightarrow A \simeq \frac{10{,}3 \cdot 7{,}2}{2} \Rightarrow A \simeq 37{,}1$

Então, a medida da área é aproximadamente 37,1 cm².

24. Vamos chamar de *x* a medida do trecho da avenida das Constelações entre a rua do Brilho e a rua das Estrelas. Assim:

$\text{tg } 35° = \frac{70}{x} \Rightarrow 0{,}7002 = \frac{70}{x} \Rightarrow x \simeq 100$

Portanto, o trecho mede aproximadamente 100 m.

26. Esta atividade é uma abordagem prévia da relação trigonométrica $\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1$. Acompanhe as resoluções dos grupos e verifique se eles chegam a resultados muito próximos de 1.

27. a) $\text{tg } 30° = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 10\sqrt{3}$

$\text{sen } 30° = \frac{10}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{y} \Rightarrow y = 20$

Portanto, $x = 10\sqrt{3}$ cm e y = 20 cm.

27. b) $\text{sen } 60° = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow 2x = 12\sqrt{3} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 6$

Portanto, $x = 6\sqrt{3}$ cm e y = 6 cm.

27. c) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; portanto, x = 60°.

$\text{sen } y = \frac{1}{2}$; portanto, y = 30°.

27. d) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, x = 45°.

$\cos y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, y = 45°.

28. Pelo teorema de Pitágoras:

$2^2 = 1^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Então: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **d**.

29. a)

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Sendo *x* a medida da altura do trapézio, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{x}{3} \Rightarrow 1 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3$

A altura mede 3 cm.

29. b) Sendo y a medida do lado não perpendicular às bases, temos:

$\text{sen } 45° = \frac{3}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{y} \Rightarrow \sqrt{2}y = 6 \Rightarrow y = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 3\sqrt{2}$

Então, a medida do lado não perpendicular às bases é $3\sqrt{2}$ cm.

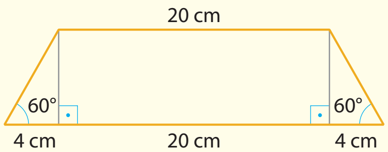
31. a) Sendo x a medida da altura do poste, temos:

$\text{tg } 45° = \frac{5{,}6}{x} \Rightarrow 1 = \frac{5{,}6}{x} \Rightarrow x = 5{,}6$

A altura do poste mede 5,6 m.

31. b) Não, pois o ângulo de 45° é formado entre um raio solar e uma linha vertical da superfície do poste.

33. a)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Sendo *x* a medida dos lados não paralelos, temos:

$\cos 60° = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8$

Então, o perímetro dos lados não paralelos mede: 64 cm (20 + 28 + 8 + 8 = 64).

33. b) Vamos determinar a medida da altura (*h*).

$\text{sen } 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow 2h = 8\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

Assim, a medida da área é dada por:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(28 + 20) \cdot 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 48 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A = 96\sqrt{3}$$

A área mede $96\sqrt{3}$ cm².

34. Como o trapézio é isósceles, a projeção ortogonal do lado que mede 2 sobre o lado que mede 6 determina um segmento de medida 1. Assim:

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Alternativa **a**.

35. $\text{tg } 30° = \frac{AB}{1500} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{1500} \Rightarrow 3AB = 1500\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 500\sqrt{3}$

Portanto, o paraquedista cai a $500\sqrt{3}$ metros do ponto B.

Pense mais um pouco

Página 209

1. a) A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono regular é dada por:

$S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$

Portanto, cada um dos ângulos internos desse pentágono mede 108° $\left(\frac{540°}{5} = 108°\right)$. Como H é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, o segmento $\overline{BH}$ divide o ângulo $\hat{B}$ em dois ângulos congruentes. Assim:

$m(A\hat{B}C) = 108°$

$m(A\hat{B}H) = \frac{108°}{2} = 54°$

1. b) $\text{sen } 54° = \frac{AH}{AB} \Rightarrow 0{,}8090 = \frac{AH}{10} \Rightarrow AH = 8{,}09$

A medida de $\overline{AH}$ é 8,09 cm.

$AC = 2 \cdot AH \Rightarrow AC = 16{,}18$

O pentágono é regular.

Então, as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são iguais a 16,18 cm.

2. a) Da razão áurea no pentagrama, temos:

$$\frac{AC}{AB} \simeq \frac{16{,}18}{10} \simeq 1{,}618$$

2. b) Como $A\hat{B}C$ é suplementar a $A\hat{B}J$ e $m\left(A\hat{B}C\right) = 108°$, então $m\left(A\hat{B}J\right) = 72°$. Traçando $\overline{JH'}$, em que H' seja o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $AH' = 5$.

- $\cos 72° = \frac{5}{AJ} \Rightarrow 0{,}3090 = \frac{5}{AJ} \Rightarrow AJ = \frac{5}{0{,}3090} \simeq 26{,}18$
- $JE = JA + AE \simeq 16{,}18 + 10 \simeq 26{,}18$
- $\frac{JE}{AJ} = \frac{26{,}18}{16{,}18} \simeq 1{,}618$

2. c) Sendo H'' o ponto médio de $\overline{JF}$, então $JH'' = \frac{JF}{2}$. Assim:

$$\text{sen } 54° = \frac{JH''}{JB} \Rightarrow 0{,}8090 = \frac{\frac{JF}{2}}{16{,}18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{JF}{2} \simeq 13{,}09 \Rightarrow JF \simeq 26{,}18$$

Então, $\overline{JF}$ mede 26,18 cm.

$JH = JA + AE + EH \Rightarrow JH = 16{,}18 + 10 + 16{,}18 \Rightarrow$

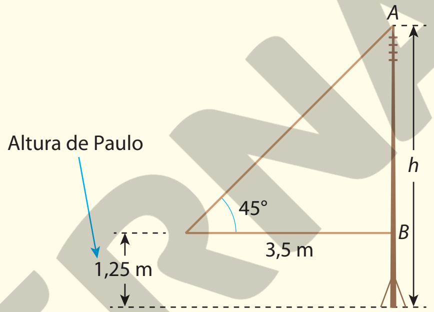
$\Rightarrow JH = 42{,}36$

Então, $\overline{JH}$ mede 42,36 cm. Por fim: $\frac{JH}{JF} = \frac{42{,}36}{26{,}18} \simeq 1{,}618$

Para saber mais

Páginas 210 e 211

1. A medida da altura da torre é dada por $h = AB + 1{,}25$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

$\text{tg } 45° = \frac{AB}{3{,}5} \Rightarrow 1 = \frac{AB}{3{,}5} \Rightarrow AB = 3{,}5$

Portanto, a altura da torre é 4,75 m.

$h = 3{,}5 + 1{,}25 = 4{,}75$

2. O cateto oposto ao ângulo de medida 15° mede 5,75 m (7 – 1,25 = 5,75). Assim:

$\text{tg } 15° = \frac{5{,}75}{x} \Rightarrow 0{,}2679 = \frac{5{,}75}{x} \Rightarrow x \simeq 21{,}5$

Então, a medida da distância de Paulo até o poste é aproximadamente 21,5 m.

Exercícios complementares

1. Embora a construção seja pessoal, e as medidas obtidas variem, em todos os casos, $\text{sen } 55° \simeq 0{,}8$; $\cos 55° \simeq 0{,}6$ e $\text{tg } 55° \simeq 1{,}4$.

2. a) $\text{sen } 30° = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 15$

Portanto, x mede 15 cm.

2. b) $\cos 60° = \frac{x}{15{,}6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{15{,}6} \Rightarrow x = 7{,}8$

Portanto, x mede 7,8 m.

2. c) $\text{tg } x = \frac{14\sqrt{3}}{42} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30$

Portanto, x mede 30°.

3. Pelo teorema de Pitágoras, sendo x a medida do cateto desconhecido, obtemos:

$(3a)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow 9a^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 8a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{2}$

Como $2a\sqrt{2} > a$, então a é a medida do menor lado do triângulo, o cosseno do ângulo oposto a ele é dado por:

$$\frac{2a\sqrt{2}}{3a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Alternativa **b**.

4. Considere o triângulo retângulo formado por um lado, pela altura e pela metade da base do triângulo isósceles. A hipotenusa desse triângulo coincide com um lado congruente do triângulo isósceles, que mede x, e o cateto oposto ao ângulo de 50° coincide com a altura, que mede 20 cm. Podemos escrever:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{20}{x} \Rightarrow 0{,}7660 = \frac{20}{x} \Rightarrow x \simeq 26{,}1$$

Então, a medida aproximada dos lados congruentes é 26,1 cm.

5. Sendo x a medida do comprimento do canudo que está dentro do copo, temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{15}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 10\sqrt{3} = 10 \cdot 1{,}73 \Rightarrow x = 17{,}3$$

O comprimento do canudo é 25,3 cm (17,3 + 8 = 25,3).

6. Se x é a medida da altura do muro, temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{2{,}80} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2{,}80} \Rightarrow x = \frac{2{,}80}{2} \Rightarrow x = 1{,}40$$

Portanto, a altura do muro mede 1,40 m.

7. Seja b a medida da base menor e x a medida do outro lado. Considere um triângulo retângulo com ângulos internos medindo 60°, cuja hipotenusa seja o lado que mede x, um dos catetos mede 9 m e o o outro mede y. Calculando x:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{9}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{9}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{9}{y} \Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{9\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 3\sqrt{3}$$

A base menor mede, em m: $b = 16 - y \Rightarrow b \simeq 16 - 5{,}20 \Rightarrow b = 10{,}80$. Para a área de medida A, em m², do terreno, temos:

$A = (16 + 9 + 10{,}80 + 10{,}39) \cdot 1{,}8$

$A = 46{,}19 \cdot 1{,}8 \Rightarrow A \simeq 83$

Logo, a área mede 83 m².

Além disso, não é possível determinar a medida do volume do muro sem saber sua espessura.

8. $\text{sen } 60^\circ = \frac{AB}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{10} \Rightarrow 2 \cdot AB = 10\sqrt{3} \Rightarrow AB = 5\sqrt{3}$

$$AM = \frac{AB}{2} \Rightarrow AM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Assim, AM mede $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

10. Para determinar a medida da área do triângulo recortado, precisaremos da medida de sua base, $2c$; sendo c a medida do cateto oposto ao ângulo de 60° formado pela altura (bissetriz) do triângulo isósceles. Nesse caso, a hipotenusa mede 40 cm, pois:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{40} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

Então, a medida da base é: $2 \cdot 20\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$

A medida da altura h é dada por:

$$\cos 60^\circ = \frac{h}{40} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 20$$

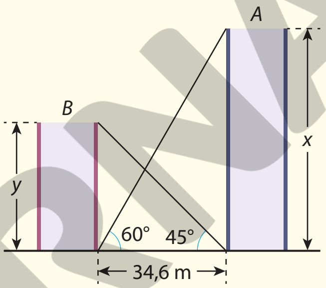
Então, a área mede $\frac{40\sqrt{3} \cdot 20}{2}$ cm² = $400\sqrt{3}$ cm².

11. A medida x da altura é:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$$

Então, a altura é de 5 metros, valor que está entre 4 e 6.

13.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{y}{34{,}6} \Rightarrow 1 = \frac{y}{34{,}6} \Rightarrow y = 34{,}6$$

Portanto, a altura do prédio B mede 34,6 m.

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{34{,}6} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{34{,}6} \Rightarrow x = 34{,}6\sqrt{3} \Rightarrow x \simeq 60$$

Portanto, a altura do prédio A mede, aproximadamente, 60 m.

14. $\text{sen } 30^\circ = \frac{CA}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CA}{750} \Rightarrow CA = 750\sqrt{3}$

$$DC = AC - AD = 750\sqrt{3} - 620 \Rightarrow DC = 10\left(75\sqrt{3} - 62\right)$$

Assim, a medida de DC é $10\left(75\sqrt{3} - 62\right)$ m.

16. $\text{sen } 50^\circ = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow 0{,}76 = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow x = 2{,}66$

A medida da altura é 2,66 km.

17. $\text{tg } 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow \sqrt{3}BC = 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

Como a escada tem seis degraus, a extensão de cada um deles é dada por:

$$\frac{BC}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ou seja, a extensão de cada degrau mede $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

18. Primeiro vamos determinar a medida da altura do triângulo, h.

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 1{,}5$$

Assim, a área do triângulo mede 4,5 m², pois:

$$\frac{(6 \cdot 1{,}5)}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Alternativa **b**.

Verificando

5. $\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Consultando o quadro de razões trigonométricas, concluímos que o ângulo mede aproximadamente 37°.
Alternativa **b**.

6. Como $\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$; então, $\text{sen } 30° - \cos 60° = 0$.

Alternativa **d**.

7. $\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$

O ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$ é 30°.

Alternativa **c**.

8. O menor ângulo é oposto ao menor lado, ou seja, oposto ao lado de medida 5 m. Assim:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{5}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } \alpha = 0{,}5$$

Alternativa **c**.

Capítulo 10 - Estudo das funções

Objetivos do capítulo e justificativas

- Conceituar e reconhecer função como relação de dependência unívoca entre duas grandezas.
- Determinar a lei de formação de uma função.
- Obter valores que uma função assume.
- Representar graficamente uma função.
- Estudar as funções polinomiais do 1º e do 2º grau.
- Identificar as relações de proporcionalidade em funções.
- Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau no cálculo dos zeros de uma função quadrática.
- Resolver problemas envolvendo sistemas de equações do 2º grau.

Neste capítulo, situações contextualizadas subsidiam as abordagens dos conceitos de função, de função polinomial do 1º grau e de função polinomial do 2º grau, favorecendo o trabalho com a **competência específica 6**. Algumas das situações apresentadas se relacionam com a temática trabalho, como a situação 2 da página 221, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 6**.

O trabalho desenvolvido está diretamente relacionado com a Unidade Temática **Álgebra**, que tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, fazendo uso de representações gráficas e contribuindo para que os estudantes estabeleçam relações entre variável e função. Assim, contribui-se para o desenvolvimento das **competências específicas 2**, **3** e **5** e das **competências gerais 2** e **4**.

A construção de gráficos de funções polinomiais do 1º e do 2º grau com o uso de *software*, apresentados nas seções *Para saber mais*, propiciam o desenvolvimento da **competência geral 5** e da **competência específica 5**. Também em uma das seções *Para saber mais* apresentamos um texto sobre a História da Matemática, o que favorece o trabalho com a **competência geral 1** e a **competência específica 1**.

Na seção *Trabalhando a informação* propomos algumas questões para que os estudantes reflitam sobre o envelhecimento populacional e sobre a participação das mulheres no ambiente de trabalho. Atividades como essas possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e o diálogo, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e das **competências específicas 7** e **8**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Os conceitos e as atividades ligados à Unidade Temática **Álgebra**, foco deste capítulo, utilizam como base os conhecimentos já construídos no capítulo 3 deste livro e nos anos anteriores, em especial no 8º ano (EF08MA12). Exploram-se situações e resoluções de problemas que envolvem a variação de duas grandezas e a noção de função, estudando mais profundamente as funções polinomiais do 1º e do 2º graus, o que contribui com o desenvolvimento das habilidades (EF09MA06) e (EF09MA08).

O estudo de funções é ferramenta fundamental para a continuidade do trabalho com Matemática e outras áreas do conhecimento. Desse modo, espera-se que os conteúdos deste capítulo propiciem embasamento necessário para esse instrumental no Ensino Médio.

Ainda na Unidade Temática **Álgebra**, o capítulo trata da representação gráfica das funções estudadas, explorando a análise e a construção de seus gráficos no plano cartesiano, e de problemas envolvendo valores máximos e valores mínimos de uma função polinomial do 2º grau, o que favorece o desenvolvimento da habilidade (EF09MA06).

Comentários e resoluções

Apresentamos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

b) Espera-se que os estudantes representem uma curva que lembre uma parábola com concavidade para baixo, de um ponto P ao vértice e do vértice ao simétrico de P em relação ao eixo de simetria.

Exercícios propostos

1. a) Custará R$ 80,00, pois $2 \cdot 40 = 80$. A segunda compra custará R$ 400,00, pois $10 \cdot 40 = 400$.

1. c) É função se entre as grandezas associadas há uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y. Então, sim, pois cada quantidade comprada está associada a um único preço.

2. a) Não, pois pode existir uma mãe que esteja associada a mais de um filho.

2. b) Sim, pois qualquer filho tem uma única mãe biológica.

3. $y = 15 + (x - 1) \cdot 4 \Rightarrow y = 15 + 4x - 4 \Rightarrow y = 4x + 11$

4. $p = \frac{8}{10} \cdot t \Rightarrow p = \frac{4 \cdot t}{5} \Rightarrow p = 0{,}8 \cdot t$

5. a) Observando que o segmento de medida y é formado por dois segmentos consecutivos e colineares de medidas 6 e x, tem-se que: $y = x + 6$

5. b) No triângulo: $y = 2x + 3x + 4{,}5 = 5x + 4{,}5$
No retângulo: $y = x + (x + 2) + x + (x + 2) = 4x + 4$

6. a) $f(2) = 4 \cdot 2 + 9 = 8 + 9 = 17$

6. b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 2 + 9 = 11$

6. c) $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 9 = -8 + 9 = 1$

6. d) $f(-0{,}3) = 4 \cdot (-0{,}3) + 9 = -1{,}2 + 9 = 7{,}8$

6. e) $f\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} + 9$

7. a) Se y é a medida da área, então: $y = \frac{12 \cdot x}{2} \Rightarrow y = 6 \cdot x$

7. b) $y = 6 \cdot 7 = 42$, então a área mediria 42 cm².

7. c) $45 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{45}{6} = 7{,}5$
Então, a diagonal deve medir 7,5 cm.

8. a) Sem a despesa fixa, o custo em reais da produção de n pirulitos é $0{,}30n$. Então, acrescentando a despesa fixa, tem-se em reais que: $c = 0{,}3n + 27$

8. b) Com a venda dos pirulitos, são arrecadados R$ 240,00, pois $200 \cdot 1{,}2 = 240$. O custo é R$ 87,00, pois $c = 27 + 0{,}3 \cdot 200 = 27 + 60 = 87$. Portanto, o lucro é de R$ 153,00, pois: $240 - 87 = 153$

8. c) $1{,}2 \cdot n - (27 + 0{,}3 \cdot n) > 0 \Rightarrow 1{,}2 \cdot n - 27 - 0{,}3 \cdot n > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}9 \cdot n > 27 \Rightarrow n > \frac{27}{0{,}9} \Rightarrow n > 30$
Portanto, o número mínimo de pirulitos é 31.

8. d) $1{,}20 \cdot n - (27 + 0{,}30 \cdot n) = 45 \Rightarrow 1{,}20 \cdot n - 27 - 0{,}30 \cdot n =$
$= 45 \Rightarrow 0{,}90 \cdot n = 45 + 27 \Rightarrow 0{,}90 \cdot n = 72 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{72}{0{,}90} \Rightarrow n = 80$

8. e) Depende do salário mínimo vigente; seja s esse valor, portanto o lucro mensal deve ser $6 \cdot s$ e o lucro por dia será de $\frac{6 \cdot s}{22}$; assim, vendendo p pirulitos por dia para obter esse lucro: $0{,}9p - 27 = \frac{6s}{22} \Rightarrow$
$\Rightarrow p = \left(\frac{6s}{22} + 27\right) \cdot \frac{1}{0{,}9}$

9. a) Atualmente, a produção em toneladas é: $y = 50\sqrt{121} = 50 \cdot 11 = 550$. Com a contratação, essa produção passará a: $y = 50\sqrt{121 + 48} = 50\sqrt{169} = 50 \cdot 13 = 650$
Portanto, o aumento na produção será de 100 toneladas pois: $650 - 550 = 100$

9. b) Fazendo $x' = 4x$ em $y = 50\sqrt{x}$ tem-se:
$y' = 50\sqrt{x'} = 50 \cdot \sqrt{4x} = 50 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = 100\sqrt{x} \neq 4y$, pois:
$4y' = 4 \cdot 50\sqrt{x'} = 200\sqrt{x'}$

14. Como os zeros das funções são as abscissas dos pontos em que seus gráficos interceptam o eixo das abscissas, tem-se que:

14. a) $x = -3$

14. b) $x = 1$

15. Fazendo $y = 0$ para cada item:

15. a) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

15. b) $-3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = \frac{-6}{-3} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

15. c) $3x + 18 = 0 \Rightarrow 3x = -18 \Rightarrow x = \frac{-18}{3} \Rightarrow x = -6$

17. a) Função polinomial de 1º grau com $a = 1$ e $b = 3$.

17. b) Função polinomial de 1º grau com $a = -5$ e $b = 1$.

17. c) Não é função polinomial de 1º grau.

17. d) Função polinomial de 1º grau com $a = -4$ e $b = 0$.

17. e) Não é função polinomial de 1º grau.

17. f) Função polinomial de 1º grau com $a = -1$ e $b = 2$.

19. a) $f(-1) = 5 \cdot (-1) - 4 = -5 - 4 = -9$

19. b) $f\left(-\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 4 = -3 - 4 = -7$

19. c) $5x - 4 = 6 \Rightarrow 5x = 6 + 4 \Rightarrow x = \dfrac{10}{5} \Rightarrow x = 2$

19. d) $5x - 4 = 0 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

20. a) $y = x + 35 + x + 35 \Rightarrow y = 2x + 70$

20. b) $y = 2 \cdot 12{,}5 + 70 = 25 + 70 = 95$

20. c) $2x + 70 = 90 \Rightarrow 2x = 90 - 70 \Rightarrow x = \dfrac{20}{2} \Rightarrow x = 10$

21. a) $y = 4 \cdot 10 = 40 \Rightarrow y = 4x$

21. b) $y = 4 \cdot 10 = 40$

22. a) $T = 100 - 0{,}001 \cdot 2400 = 100 - 2{,}4 = 97{,}6$; portanto, 97,6 °C.

22. b) $T = 100 - 0{,}001 \cdot 0 = 100 - 0 = 100$; portanto, 100 °C.

24. a) Observando que a reta contém o ponto (2, 0), conclui-se que: $y = 0$

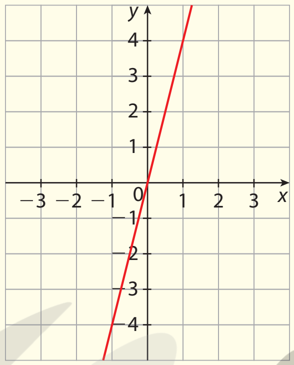
24. b) Observando que a reta contém o ponto (–2, 4), conclui-se que: $x = -2$

25. a) $8 = a \cdot 2 \Rightarrow a = 4$

25. b) $y = 4 \cdot 3{,}5 = 14$

25. c) $0 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 0$

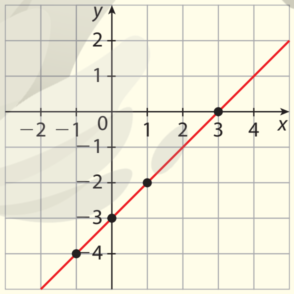
25. d)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

26. a)

x	–1	0	1	3
$y = x - 3$	$-1 - 3 = -4$	$0 - 3 = -3$	$1 - 3 = -2$	$3 - 3 = 0$
$(x; y)$	(–1; –4)	(0; –3)	(1; –2)	(3; 0)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

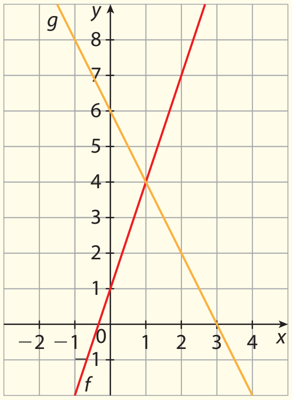
26. b) $0 = x - 3 \Rightarrow x = 3$

26. c) $y = 0 - 3 = -3$

27. a) $y = \dfrac{50}{40}x \Rightarrow y = 1{,}25x$

27. b) $30 = 1{,}25x \Rightarrow x = \dfrac{30}{1{,}25} = 24$

28.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

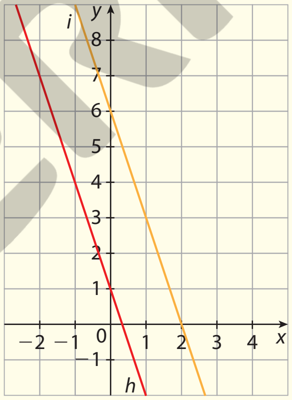
28. a) $f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

28. b) $0 = -2 \cdot x + 6 = 0 + 6 = 6$

28. c) $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

28. d) $f(x) = g\,(x) \Rightarrow 3x + 1 = -2x + 6 \Rightarrow 3x + 2x = 6 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$

29.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

29. a) Corte no eixo x: $h(x) = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-1}{-3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Corte no eixo y: $h(0) = -3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

29. b) Corte no eixo x: $i(x) = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-6}{-3} \Rightarrow x = 2$

Corte no eixo y: $i(0) = -2 \cdot 0 + 6 = 0 + 6 = 6$

29. c) Não, pois são representados por retas paralelas.

29. d) Nenhum, pois o conjunto solução da equação $h(x) = i(x)$ é o conjunto vazio.

32. a) Observando, pelo gráfico, que a função contém o ponto (3, 0) conclui-se que: $x = 3$

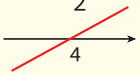
32. b) Observando que a função é decrescente, conclui-se que: $y > 0 \Rightarrow x < 3$

32. c) Novamente, observando que a função é decrescente, conclui-se que: $y < 0 \Rightarrow x > 3$

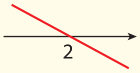
33. Apresentamos aqui o cálculo das raízes e os esboços de cada item. As respostas encontram-se na página 239 deste *Manual*.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

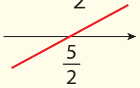
33. a) $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \dfrac{8}{2} \Rightarrow x = 4$



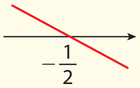
33. b) $-3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = \dfrac{-6}{-3} \Rightarrow x = 2$



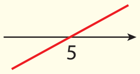
33. c) $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$



33. d) $-2x - 1 = 0 \Rightarrow -1 = 2x \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = x$



34. De acordo com as informações, um esboço do gráfico dessa função é:



Então:

34. a) Como $-2 < 5$, tem-se que: $y < 0$

34. b) Como $0 < 5$, tem-se que: $y < 0$

34. c) Como $4{,}99 < 5$, tem-se que: $y < 0$

34. d) Como $5{,}01 > 5$, tem-se que: $y > 0$

34. e) Como $10 < 5$, tem-se que: $y > 0$

36. Com $x = 8$ tem-se: $x^2 - 3x + 6 = 8^2 - 3 \cdot 8 + 6 = 64 - 24 + 6 = 46$; portanto, deverão comprar 46 m².

37. a) $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$

$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

$f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$

37. b) Pelos resultados do item anterior, quando $x = 2$ ou quando $x = 3$.

37. c) $x^2 - 5x + 6 = 20 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$

$\Delta = (-5)^2 + (-4) \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{+5 \pm 9}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad x = \dfrac{14}{2} = 7 \\ \searrow \quad x = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{array}$$

38. a) $y = (x + 2)(2x - 1) = 2x^2 - x + 4 - 2 = 2x^2 + 3x - 2$

38. b) $y = \dfrac{2x(5x - 3)}{2} = x(5x - 3) = 5x^2 - 3x$

39. a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

39. b) $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(x + 3) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x = 0 \\ \searrow \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{array}$$

39. c) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$

39. d) $x^2 + 3x = 10 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \searrow \quad x = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{array}$$

40. a) $f\left(\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + 5 = 2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$

40. b) $2x^2 + 5 = 21 \Rightarrow 2x^2 = 21 - 5 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \dfrac{16}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

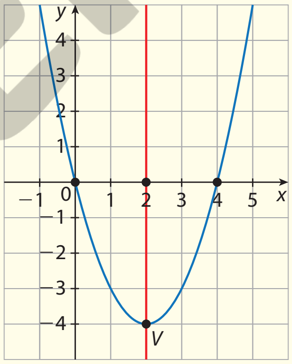
41. $y = 2(x + 1)(x + 2) = 2(x^2 + 2x + x + 2) = 2(x^2 + 3x + 2) =$
$= 2x^2 + 6x + 4$

42. a) Observando que a parábola tem sua concavidade voltada para cima, conclui-se que $a > 0$.

42. b) A abscissa do vértice é $x_V = 2$; a ordenada do vértice é $y_V = -4$. Portanto, o vértice da parábola é o ponto $(2, -4)$.

42. c) Observando que a parábola contém os pontos $(0, 0)$ e $(4, 0)$, conclui-se que $x = 0$ ou $x = 4$.

42. d) Representando o eixo de simetria da parábola, temos que ele intercepta o eixo das abscissas no ponto $(2, 0)$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

43. a) $y = \dfrac{(2x + 4)(x + 2)}{2} = \dfrac{2(x + 2)(x + 2)}{2} = (x + 2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x^2 + 4x + 4$

43. b) $x^2 + 4x + 4 = 25 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad x = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow \quad x = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{array}$$

Então, como $x > 0$, tem-se que $x = 3$.

44. a) Com $a = 2 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

44. b) Com $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

44. c) Com $a = -3 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

44. d) Com $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

44. e) Com $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

44. f) Com $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

45. a) Observando que a parábola contém $(-2, -3)$ e $(2, -3)$, conclui-se que $x = -2$ e $x = 2$.

45. b) Observando que $(0, 1)$ é o vértice da parábola, conclui-se que $y \leqslant 1$ para todo valor de x; portanto, não existe x tal que $y = 2$.

45. c) Observando que a parábola contém o ponto $(2, -3)$, conclui-se que $y = -3$.

45. d) Observando que a parábola contém o ponto $(1, 0)$, conclui-se que $f(1) = 0$.

45. e) A ordenada do vértice é $y_v = 1$. Portanto, o vértice da parábola é o ponto $(0, 1)$.

46. $p - 3 > 0 \Rightarrow p > 3$

47. $2\,p + 1 < 0 \Rightarrow 2\,p < -1 \Rightarrow p < -\frac{1}{2}$

48. a) $m + 2 < 0 \Rightarrow m < -2$

48. b) $0 = (m + 2) \cdot 0^2 + (m + 3) \cdot 0 + m + 4 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + m + 4 \Rightarrow -4 = m$

49. a) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 + 32 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; x = \frac{8}{2} = 4 \\ \searrow \; x = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

49. b) Como $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 0 - 12 = -12 < 0$, conclui-se que não existem raízes reais.

49. c) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 16 + 0 = 16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 4}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \; x = \frac{0}{-2} = 0 \\ \searrow \; x = \frac{-8}{-2} = 4 \end{array}$$

49. d) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm 0}{2} = \frac{6}{3} = 3$$

49. e) $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-4) = 144 - 144 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-12 + 0}{-18} = \frac{2}{3}$$

49. f) Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4 < 0$, conclui-se que não existem raízes reais.

50. Com $y = 0$, tem-se: $\frac{-x^2}{32} + \frac{x}{8} = 0 \Rightarrow 32 \cdot \frac{-x^2}{32} + 32 \cdot \frac{x}{8} =$

$$= 32 \cdot 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x - 4) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \; x = 0 \\ \searrow \; x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{array}$$

Como a distância é positiva, conclui-se que seu valor é 4 km, pois $4 - 0 = 4$.

51. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot (-1)} = \frac{8}{-2} = -4$

$y_v = -(-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 16 = -16 + 32 + 16 = 32$

51. b) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$y_v = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}$

51. c) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = 0$

$y_v = 0^2 - 16 = -16$

52. $a = 3$, $b = -p$ e $c = 2q$, então:

$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2 = \frac{-(-p)}{2 \cdot 3} \Rightarrow 2 = \frac{p}{6} \Rightarrow p = 12$

$y_v = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 2q = 1 \Rightarrow 12 - 24 + 2q = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2q = 1 + 12 \Rightarrow q = \frac{13}{2}$

53. a) Como $a = 4 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima; logo, a função possui ponto de mínimo.

53. b) Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima; logo, a função possui ponto de mínimo.

53. c) Como $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo; logo, a função possui ponto de máximo.

53. d) Como $a = 5 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima; logo, a função possui ponto de mínimo.

53. e) Como $a = -3 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo; logo, a função possui ponto de máximo.

53. f) Como $a = -2 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo; logo, a função possui ponto de máximo.

54. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

54. b) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \cdot 1} = -6$

55. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{2 \cdot (-2)} = \frac{11}{4}$

55. b) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{2 \cdot (-2)} = \frac{25}{4}$

56. $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{2 \cdot (-1)} = \frac{11}{2}$

$$y_v = -\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 11 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) - 18 = -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - 18 =$$

$$= \frac{-121 + 242 - 72}{4} = \frac{49}{4}$$

57. $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$

58. Sendo x a medida, em metros, de dois dos lados do retângulo, tem-se que o outro lado mede $(50 - x)$. Assim, a área do retângulo fica expressa em m² pela função: $y = x(50 - x) = -x^2 + 50x$. Então, um dos lados do retângulo mede 25 m, pois $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \cdot (-1)} = 25$; e o outro mede 25 m, pois $50 - 25 = 25$.

59. a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-80)}{2 \cdot 1} = 40$

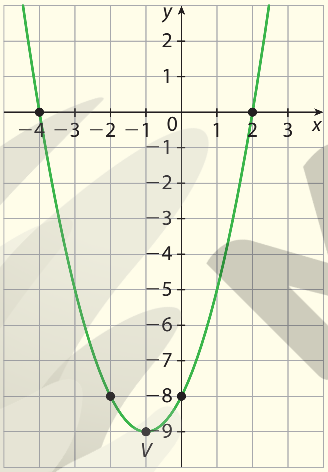
Portanto, 40 unidades do produto.

59. b) $y = 40^2 - 80 \cdot 40 + 3\,000 = 1\,600 - 3\,200 + 3\,000 = 1\,400$

Portanto, R$ 1 400,00.

60. a) O vértice é (–1; –9), pois: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ e $y = x^2 + 2x - 8$ para $x = -1$, temos $y_v = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = 1 - 2 - 8 \Rightarrow y = -9$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade está voltada para cima. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

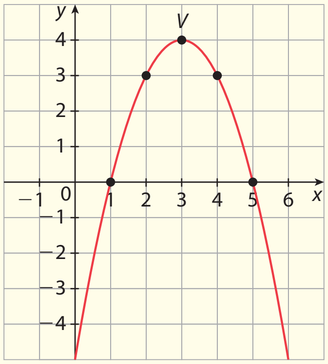
x	–4	–2	–1	0	2
y	$(-4)^2 + 2(-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$	$(-2)^2 + 2(-2) - 8 = 4 - 4 - 8 = -8$	–9	$0^2 + 2 \cdot (0) - 8 = -8$	$(2)^2 + 2(2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$
(x; y)	(–4; 0)	(–2; –8)	(–1; –9)	(0; –8)	(2; 0)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

60. b) O vértice é (3; 4), pois: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$ e $y = -x^2 + 6x - 5$ para $x = 3$, temos $y_v = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = -9 + 18 - 5 \Rightarrow y_v = 4$. Como $a = -1 < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

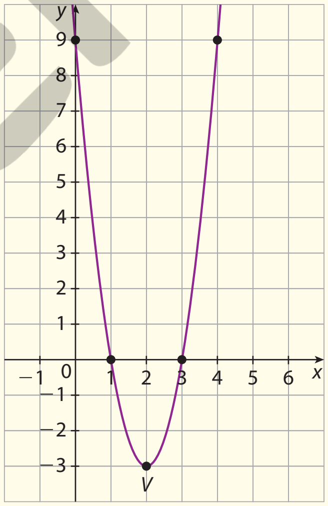
x	1	2	3	4	5
y	$-1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = -1 + 6 - 5 = 0$	$-2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = -4 + 12 - 5 = 3$	4	$-4^2 + 6 \cdot 4 - 5 = -16 + 24 - 5 = 3$	$-5^2 + 6 \cdot 5 - 5 = -25 + 30 - 5 = 0$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

60. c) O vértice é (2; –3), pois: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot (3)} = 2$ e $y = 3x^2 - 12x + 9$ para $x = 2$ é $y = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 \Rightarrow y = -3$. Como $a = 3 > 0$, a concavidade está voltada para cima. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

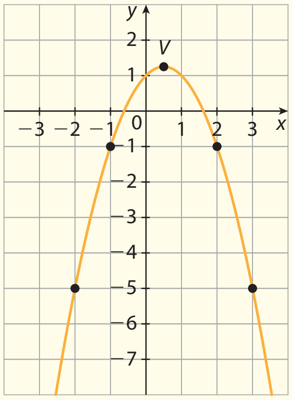
x	0	1	2	3	4
y	$3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9$	$3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 9 = 3 - 12 + 9 = 0$	–3	$3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 9 = 27 - 36 + 9 = 0$	$3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9$
(x; y)	(0; 9)	(1; 0)	(2; –3)	(3; 0)	(4; 9)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

60. d) O vértice é $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, pois: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$ e $y = -x^2 + x + 1$ para $x = \frac{1}{2}$ é $y_v = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} = 1{,}25$. Como $a = -1 < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

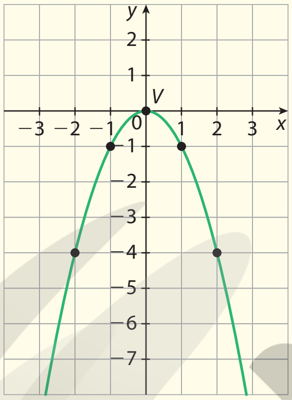
x	–2	–1	$\frac{1}{2}$	2	3
y	$-(-2)^2 - 2 + 1 = -4 - 2 + 1 = -5$	$-(-1)^2 - 1 + 1 = -1$	$\frac{5}{4}$	$-2^2 + 2 + 1 = -4 + 2 + 1 = -1$	$-3^2 + 3 + 1 = -9 + 3 + 1 = -5$
(x; y)	(–2; –5)	(–1; –1)	$\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$	(2; –1)	(3; –5)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

60. e) O vértice é (0; 0), pois $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$ e $y = -x^2$ para $x = 0$ é $yv = -(0)^2 = 0$. Como $a = -1 < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

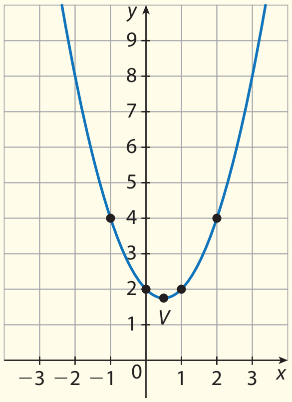
x	–2	–1	0	1	2
y	$-(-2)^2 = -4$	$-(-1)^2 = -1$	0	$-1^2 = -1$	$-2^2 = -4$
(x; y)	(–2; –4)	(–1; –1)	(0; 0)	(1; –1)	(2; –4)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

60. f) O vértice é $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{4}\right)$, pois $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{2 \cdot (1)} = \dfrac{1}{2}$ e $y = x^2 - x + 2$ para $x = \dfrac{1}{2}$ é $y_v = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 2 =$ $= \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade está voltada para cima. Encontrando pontos de referência e traçando o gráfico:

x	–1	0	$\dfrac{1}{2}$	1	2
y	$(-1)^2 - (-1) +$ $+ 2 = 4$	$0^2 - 0 + 2 = 2$	$\dfrac{7}{4}$	$(1)^2 - 1 + 2 = 2$	$2^2 - 2 + 2 = 4$
(x; y)	(–1; 4)	(0; 2)	$\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{4}\right)$	(1; 2)	(2; 4)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

61. Para $y = x^2 - 4$:

O vértice é (0; –4), pois $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2 \cdot (1)} = 0$ e $y = x^2 - 4$ para $x = 0$ é $y_v = 0 - 4 = -4$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade está voltada para cima. Encontrando pontos de referência:

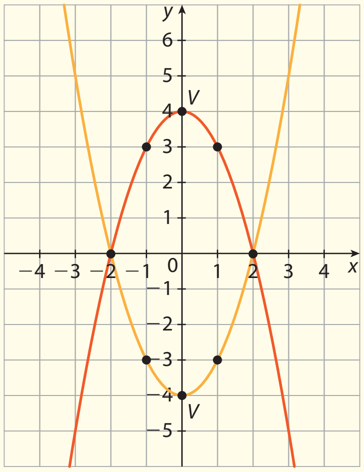
x	–2	–1	0	1	2
y	$(-2)^2 - 4 =$ $=4 - 4 = 0$	$(-1)^2 - 4 = 1 -$ $- 4 = -3$	–4	$1^2 - 4 = 1 -$ $- 4 = -3$	$2^2 - 4 = 4 -$ $- 4 = 0$
(x; y)	(–2; 0)	(–1; –3)	(0; –4)	(1; –3)	(2; 0)

Para $y = -x^2 + 4$:

O vértice é (0; 4), pois $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$ e $y = -x^2 + 4$ para $x = 0$ é $y_v = 0^2 + 4 = 4$. Como $a = -1 < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Encontrando pontos de referência:

x	–2	–1	0	1	2
y	$-(-2)^2 + 4 =$ $= -4 + 4 = 0$	$-(-1)^2 + 4 =$ $= -1 + 4 = 3$	4	$-1^2 + 4 =$ $= -1 + 4 = 3$	$-2^2 + 4 = -4 +$ $+4 = 0$
(x; y)	(–2; 0)	(–1; 3)	(0; 4)	(1; 3)	(2; 0)

Os pontos de intersecção são os pontos em comum aos dois gráficos, ou seja, (–2; 0) e (2; 0). Traçando os dois gráficos no mesmo plano cartesiano:

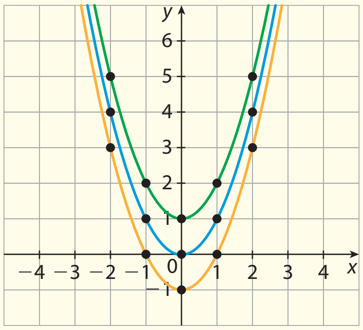


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

62. a) Para $f(x) = x^2$, temos que o vértice é (0; 0), pois $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2 \cdot (1)} = 0$ e $y = x^2$ para $x = 0$ é $y_v = 0^2 = 0$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade está voltada para cima, assim como todas as parábolas desse item. Encontrando pontos de referência para $f(x)$:

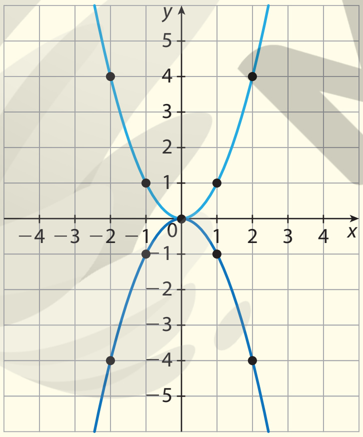
x	−2	−1	0	1	2
y	$(-2)2 = 4$	$(-1)2 = 1$	0	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$
(x; y)	(−2; 4)	(−1; 1)	(0; 0)	(1; 1)	(2; 4)

Os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ são obtidos, respectivamente, pela translação vertical de uma unidade para cima e de uma unidade para baixo do gráfico de $f(x)$. Traçando os gráficos no mesmo plano cartesiano, obtemos a curva em azul representando $f(x)$, a laranja representando $h(x)$ e a verde representando $g(x)$:

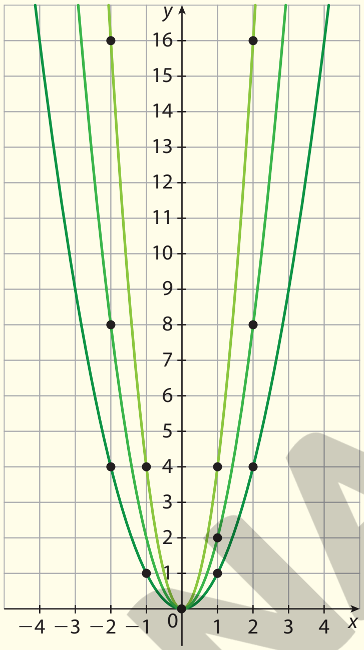


62. b) Com base nos pontos do gráfico de $f(x) = x^2$ que obtivemos no item anterior.

Para $g(x) = -x^2$, ocorre mudança no sinal dos valores de $f(x)$ para cada x, ou seja, $g(x)$ é uma reflexão de $f(x)$ em relação ao eixo x. Assim, obtemos:



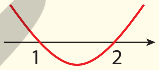
62. c) Para $f(x) = x^2$, já obtivemos o gráfico nos itens anteriores: Para $g(x) = 2x^2$, cada $g(x)$ é o dobro de $f(x)$ para cada x. Para $h(x) = 4x^2$, cada $h(x)$ é o quadruplo de $f(x)$ para cada x. Traçando os gráficos no mesmo plano, é possível perceber que as parábolas têm o mesmo vértice e a concavidade para cima:



63. a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{+3 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; x = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \searrow \; x = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}$$

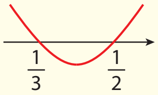
Como $a = 1 > 0$, obtemos:



Portanto, para $x < 1$ ou $x > 2$: $y > 0$; para $x = 1$ ou $x = 2$, temos $y = 0$; e para $1 < x < 2$, temos $y < 0$.

63. b) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

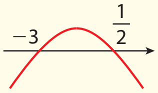
Como $a = 6 > 0$, obtemos:



Portanto, para $x < \dfrac{1}{3}$ ou $x > \dfrac{1}{2}$, temos $y > 0$; $x = \dfrac{1}{3}$ ou para $x = \dfrac{1}{2}$, temos $y = 0$ e para $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$, temos $y < 0$.

63. c) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow x = -3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Como $a = -2 < 0$, obtemos:



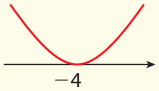
Portanto, para $-3 < x < \dfrac{1}{2}$, temos $y > 0$; para $x = -3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$, temos $y = 0$; e para $x < -3$ ou $x > \dfrac{1}{2}$, temos $y < 0$.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

63. d) $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0 \Rightarrow x = -4$

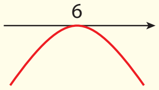
Como $a = 1 > 0$, obtemos:



Portanto, para $x \neq -4$, temos $y > 0$; e para $x = -4$, temos $y = 0$.

63. e) $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-36) = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x = 6$

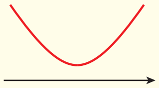
Como $a = -1 < 0$, obtemos:



Portanto, para $x = 6$, temos $y = 0$; e para $x \neq 6$: $y < 0$.

63. f) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0$

Assim, não há raízes reais e como $a = 3 > 0$.



Portanto, para qualquer x real a função é sempre positiva.

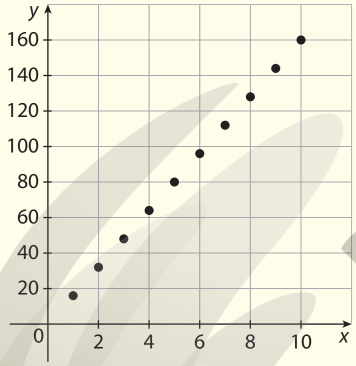
Pense mais um pouco

Página 231

a)

Quantidade de exemplares	***x***	0	1	2	3	4	5	6
Preço total	***y***	0	16	32	48	64	80	96

b)

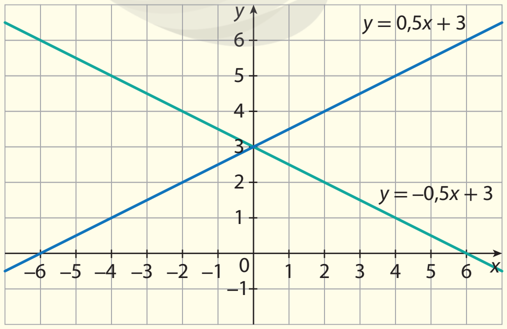


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Página 235

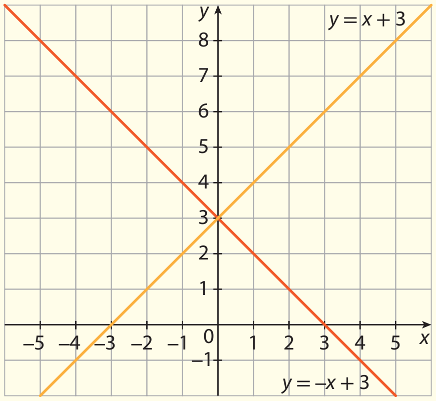
1. Construindo cada gráfico com base na pesquisa de pares ordenados:

1. a)



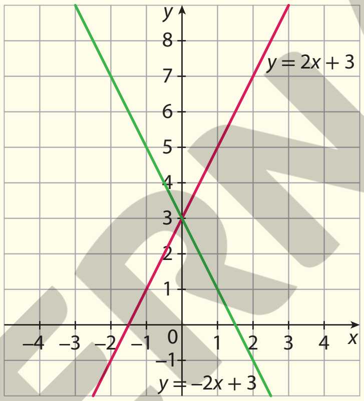
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

1. b)



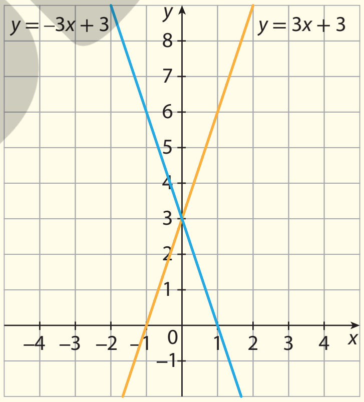
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

1. c)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

1. d)

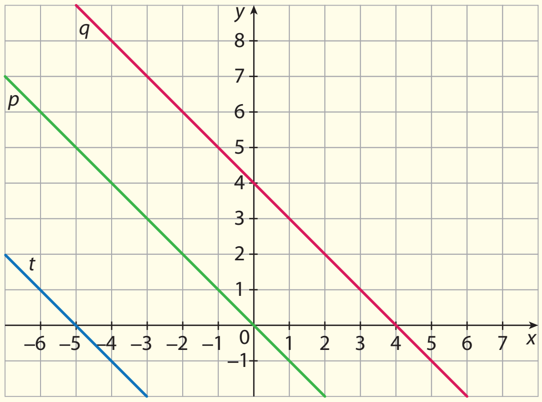


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

Página 237

1. Gráficos esperados:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Página 256

1. De $a + b = 2$, tem-se: $b = 2 - a$. Substituindo b por $(2 - a)$ na equação $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$, tem-se: $a^2 + (2 - a)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 + 4 - 4a + a^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2a^2 - 4a + \frac{3}{2} = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 16 - 12 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{+4 \pm 2}{4} \begin{matrix} \nearrow & a = \frac{6}{4} = 1{,}5 \\ \searrow & a = \frac{2}{4} = 0{,}5 \end{matrix}$$

Se $a = 1{,}5$, então $b = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$. Se $a = 0{,}5$, então $b = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$.

2. Sendo a e b, com $a > b$, os números procurados, de $a - b = 3$, tem-se: $a = 3 + b$. Substituindo a por $(3 + b)$ na equação $a^2 + b^2 = 17$, tem-se:
$(3 + b)^2 + b^2 = 17 \Rightarrow 9 + 6b + b^2 + b^2 - 17 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2b^2 + 6b - 8 = 0$
$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8) = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4} \begin{matrix} \nearrow & b = \frac{4}{4} = 1 \\ \searrow & b = \frac{-16}{4} = -4 \end{matrix}$$

Se $b = 1$, então $a = 3 + 1 = 4$. Se $b = 0{,}5$, então $a = 3 + (-4) = -1$. Portanto, o maior número é 4 ou –1.

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 51 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Isolando x na primeira equação:

$\begin{cases} x - y = 3 \\ x = 3 + y \end{cases}$

Substituindo x por $(3 + y)$ na equação $x^2 - y^2 = 51$, tem-se:
$(3 + y)^3 - y^2 = 51 \Rightarrow 9 + 6\,y + y^2 - y^2 = 51 \Rightarrow 6y = 51 - 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 7$
Portanto, a área do quadrado amarelo mede 49 cm² pois $7^2 = 49$.

Exercícios complementares

1. $y = (x + 3) \cdot x - (x - 3) \cdot 2 \Rightarrow y = x^2 + 3x - 2x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = x^2 + x + 6$

2. Como $f(15) = \frac{3 \cdot 15}{5} - \frac{7}{4} = 9 - \frac{7}{4} = \frac{36 - 7}{4} = \frac{29}{4}$ e

$f(10) = \frac{3 \cdot 10}{5} - \frac{7}{4} = 6 - \frac{7}{4} = \frac{24 - 7}{4} = \frac{17}{4}$, temos:

$$\frac{f(15) - f(10)}{15 - 10} = \frac{\frac{29}{4} - \frac{17}{4}}{5} = \frac{\frac{12}{4}}{5} = \frac{3}{5}$$

3. Como $f(10) = 10 \cdot 10 + 10 = 100 + 10 = 110$ e $f(0) = 10 \cdot 0 + 10 = 0 + 10 = 10$, temos: $f(10) - f(0) = 110 - 10 = 100$

4. **a)** Observando que a reta contém o ponto (–3, –2), conclui-se que $f(-3) = -2$.

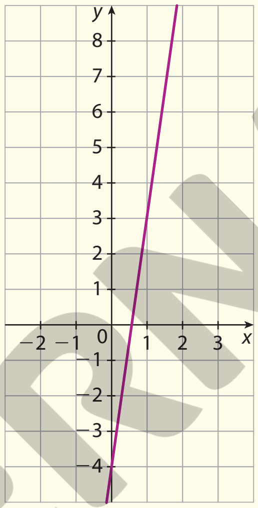
4. **b)** Observando que a reta contém o ponto (0, 1), conclui-se que $f(0) = 1$.

4. **c)** Observando que a reta contém o ponto (2, 3), conclui-se que $x = 2$.

4. **d)** Observando que a reta contém o ponto (–1, 0), conclui-se que $x = -1$.
   - Como a lei da função é $f(x) = x + 1$ e $f(10) = 10 + 1 = 11$, conclui-se que o gráfico contém o ponto (10, 11).

5. **a)** $7x - 4 = 0 \Rightarrow 7x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$

5. **b)** Pelo item anterior, a reta passa pelo ponto $\left(\frac{4}{7};\ 0\right)$ e pelo ponto (0; –4), pois: $x = 0 \Rightarrow y = 7x - 4 \Rightarrow y = -4$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

5. **c)** $7x - 4 = 2 \Rightarrow 7x = 2 + 4 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$

5. **d)** $7x - 4 > 0 \Rightarrow 7x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{7}$

6. **a)** $f(x) > 0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{2} \Rightarrow x > 3$

6. **b)** $g(x) > 0 \Rightarrow -3x + 6 > 0 \Rightarrow -3x > -6 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 2$

6. **c)** $f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 6 = -3x + 6 \Rightarrow 2x + 3x = 6 + 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$

6. **d)** $f(x) > g(x) \Rightarrow 2x - 6 > -3x + 6 \Rightarrow 2x + 3x > 6 + 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x > 12 \Rightarrow x > \frac{12}{5}$

7. Com $x = 1$ e $y = 11$, tem-se: $11 = 6 \cdot 1 + p \Rightarrow 11 - 6 = p \Rightarrow 5 = p$

7. **a)** Com $y = 23$, tem-se: $6x + 5 = 23 \Rightarrow 6x = 23 - 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{18}{6} \Rightarrow x = 3$

7. **b)** Com $y < 0$, tem-se: $6x + 5 < 0 \Rightarrow 6x < -5 \Rightarrow x < -\frac{5}{6}$

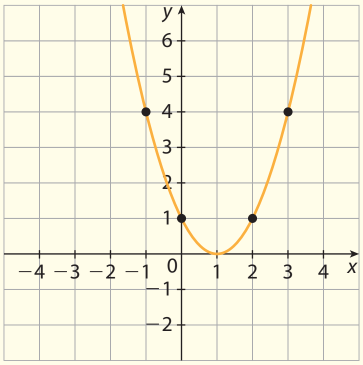
8. Como a expressão do ganho mensal em função do número de quilômetros rodados, em reais, é $f(x) = 3x + 50$, com $x \geqslant 0$, o gráfico assume a forma de uma semirreta. Como $f(0) = 50$, o gráfico deve conter o ponto (0, 50). E, como $a > 0$, a semirreta tem inclinação crescente. Alternativa **b**.

9. Se a função contém o ponto (0, 5), então:
$f(0) = -3 \cdot 0 + k = 5 \Rightarrow k = 5$.
Alternativa **e**.

10. a) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{+2 \pm 0}{2}$
Logo, $x = 1$.

10. b) Pelo item anterior, a parábola contém (1; 0), e esse é o vértice da função. Encontrando outros pontos e traçando o gráfico:

x	– 1	0	2	3
$\boldsymbol{y = x^2 - 2}$	$(-1)^2 - 2(-1) + + 1 = 1 + 2 + + 1 = 4$	$0^2 - 2 \cdot (0) + + 1 = 1$	$(2)^2 - 2 \cdot (2) + + 1 = 4 - 4 + + 1 = 1$	$(3)^2 - 2 \cdot (3) + + 1 = 9 - 6 + +1 = 4$
(x; y)	(–1; 4)	(0; 1)	(2;1)	(3; 4)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. c) $x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow\ x = 0 \\ \searrow\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

10. d) Observando que a parábola tem concavidade voltada para cima e tangencia o eixo das abscissas no ponto (1, 0), conclui-se que $y > 0$ implica $x \neq 1$.

11. a) $10 = 0^2 - 7 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 10$

11. b) Substituindo *c* por 10 na expressão da função, temos: $y = t^2 - 7t + 10$

11. c) $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-7)}{2 \cdot 1} = 3{,}5$; portanto, 3,5 min.

12. Com $y = 0$, tem-se: $2x^2 - 3x + 1 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{+3 \pm 1}{4} \begin{array}{l} \nearrow\ x = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \searrow\ x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Alternativa **d**.

13. $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-50)}{2 \cdot 1} = 25$; portanto, $x = 25$.

14. $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$ e $y_v = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 2 =$
$= -1 + 2 + 2 = 3$
Alternativa **b**.

15. Com $y = 0$ em $y = -16x^2 + 256$, tem-se: $-16x^2 + 256 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16x^2 = 256 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
E como $t > 0$, conclui-se que $t = 4$ s.
Alternativa **b**.

16. $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3$ e $y_v = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 =$
$= -18 + 36 = 18$
Alternativa **b**.

17. A função que expressa o volume da piscina é:
$y = 2 \cdot x \cdot (20 - x) = -2x^2 + 40x$
Assim: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10$ e $y_v = f(10) = -2 \cdot 10^2 +$
$+ 40 \cdot 10 = -200 + 400 = 200$
Portanto, 200 m³.

18. O lucro é máximo quando: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-120}{2 \cdot (-1)} = 60$
Alternativa **a**.

19. $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2000}{2 \cdot (-2)} = 500$; portanto, 500 unidades.

20. a) $m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$

20. b) Com $\Delta = 0$, tem-se: $(-5)^2 - 4 \cdot (m + 1) \cdot 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25 - 20m - 20 = 0 \Rightarrow 5 = 20m \Rightarrow \dfrac{5}{20} = m \Rightarrow \dfrac{1}{4} = m$

22. Quando o discriminante é igual a zero, a parábola tem apenas uma raiz, o que significa que ela tangencia o eixo das abscissas em um ponto.
Alternativa **c**.

Verificando

1. $y = f(0) = 14 - 2 \cdot 0 = 14 - 0 = 14$
$y = f(1) = 14 - 2 \cdot 1 = 14 - 2 = 12$
$y = f(2) = 14 - 2 \cdot 2 = 14 - 4 = 10$
$y = f(3) = 14 - 2 \cdot 3 = 14 - 6 = 8$
Alternativa **b**.

2. Sem o valor fixo, os rendimentos extras de João são expressos, em reais, por: $12 \cdot v$
Então, acrescentando o valor fixo, tem-se a função:
$S = 2\,500 + 12 \cdot v$
Alternativa **d**.

3. Com $y = 47$, tem-se: $20 + 3x = 47 \Rightarrow 3x = 47 - 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{27}{3} \Rightarrow x = 9$.
Alternativa **b**.

4. $A = x(x + 3) = x^2 + 3x$.
Alternativa **a**.

5. Alternativa **c**, pois: $3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

6. Observando que o gráfico é uma reta que contém os pontos de coordenadas (0, 0) e (3, 3), conclui-se que $y = x$.
Alternativa **d**.

7. Com $y = 0$, tem-se: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 25 - 16 = 9$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \frac{+5 \pm 3}{-4} \begin{array}{l} \nearrow\ x = \dfrac{8}{-4} = -2 \\ \searrow\ x = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Alternativa **d**.

8. $(4x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 0 + 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

9. É uma parábola voltada para cima, pois: $a = 1 > 0$
Cruza o eixo *x* duas vezes, pois: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 =$
$= 25 - 24 = 1 > 0$

Capítulo 11 – Circunferência, arcos e relações métricas

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer e determinar o número irracional π.
- Resolver problemas envolvendo a razão entre duas grandezas.
- Determinar o comprimento de uma circunferência e aplicar esse conceito na resolução de problemas.
- Relacionar arcos de circunferência e ângulos centrais.
- Determinar o comprimento de arcos de circunferência e de sua medida angular.
- Resolver problemas envolvendo relações de proporcionalidade no cálculo da medida de arcos.
- Reconhecer e aplicar as propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência e das relações métricas em uma circunferência.
- Analisar gráfico com semicoroa circular.
- Resolver problemas envolvendo porcentagens e determinação de ângulos de setores circulares.
- Comunicar resultados de pesquisa por meio de tabela e gráfico.

Neste capítulo, tratamos da circunferência e da determinação da medida de seu comprimento, das medidas de arcos e relações métricas em uma circunferência. O conceito de proporcionalidade, frequente no desenvolvimento de vários conteúdos abordados ao longo do Ensino Fundamental e já estudado neste volume, também é utilizado para determinar a medida de arcos de circunferência. Os tópicos abordados contribuem para a ampliação e a consolidação de ferramentas que contribuem para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim, contribui-se para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos. As atividades propostas relacionam as Unidades Temáticas **Álgebra** e **Geometria** e propõem diferentes construções geométricas. Assim, o trabalho realizado favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3** e **5**.

Além disso, ampliamos o trabalho com gráficos explorando os formados por semicoroas circulares, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3** e **4**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Neste capítulo, serão aprofundados os estudos relativos à Unidade Temática **Geometria** envolvendo relações com arcos de circunferência, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA11).

A Unidade Temática **Números** também está presente com atividades que abordam o reconhecimento do número irracional π e cálculo de porcentagens na seção *Trabalhando a informação*. A conexão com a Unidade Temática **Álgebra** se concretiza por meio da resolução de problemas que envolvem a razão entre duas grandezas e a noção de proporcionalidade.

Com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, a conexão se dá por meio da seção *Trabalhando a informação*, que trata da análise de gráficos associados a semicoroas circulares, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA23).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

b) Pela simetria da figura, a altura da ponte corresponde à metade do diâmetro da circunferência formada. Portanto, a medida do diâmetro da circunferência é o dobro da medida da altura da ponte, que é de 15 m. Assim, a circunferência mede 30 m ($15 \cdot 2 = 30$).

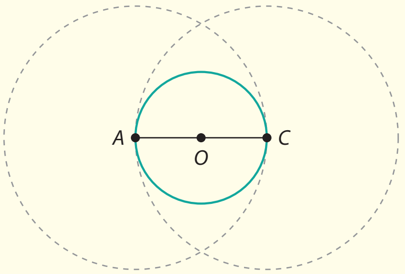
c) Resposta dependente da pesquisa dos estudantes. Alguns exemplos que se pode apresentar são “Círculos em um círculo” (Kandinsky), MAC Niterói (Niemeyer), “Homem vitruviano” (Da Vinci), abóbadas de igrejas em geral e objetos mais prosaicos do dia a dia, como tampas de bueiros, quadras esportivas, padrões em parapeitos e similares.

Exercícios propostos

1. Se cada pedalada corresponde a uma volta completa da roda, após 500 peladas o ciclista percorreu uma distância equivalente a 500 vezes o comprimento C da roda. Isto é, $500 \cdot C$. Como a roda pode ser associada a uma circunferência de raio de medida 25 cm, seu comprimento é dado por: $C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 157$

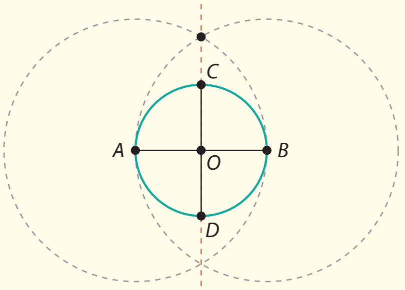
   E, como 157 cm = 1,57 m, a distância total foi de 785 m, pois $500 \cdot 1{,}57 = 785$.

2. A figura proposta pode ser construída utilizando régua e compasso: seja O o centro da circunferência. Primeiro, marca-se um diâmetro qualquer $\overline{AC}$. Em seguida, traçam-se duas circunferências utilizando o compasso, uma com a ponta-seca em A e outra com a ponta seca em C, ambas com a mesma abertura de medida AC.



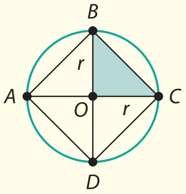
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A reta passando por O e pela intersecção desses dois círculos é perpendicular a $\overline{AB}$, e sua intersecção com a circunferência determina um diâmetro $\overline{BD}$ perpendicular a $\overline{AB}$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

O quadrado *ABCD* assim determinado decompõe-se em quatro triângulos retângulos isósceles congruentes, cujos lados perpendiculares medem a mesma medida *r* do raio.



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Assim, $AB = BC = CD = AD$. Mas, pelo teorema de Pitágoras: $r^2 + r^2 = BC^2 \Rightarrow 2r^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}\,r$. Logo, o perímetro do quadrado mede 5,64 *r*, pois: $AB + BC + CD + AD = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot r = 4 \cdot 1{,}41 \cdot r = 5{,}64r$

Por outro lado, o comprimento da circunferência é dado por 6,28*r*, pois $2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 6{,}28r$. A diferença entre este comprimento e o perímetro do quadrado é, portanto, 0,64*r*, pois: $6{,}28r - 5{,}64r = 0{,}64r$

4. Se ℓ é o comprimento do diâmetro em centímetros, organizamos o seguinte quadro, por meio da regra de três:

Polegadas	Centímetros
1	2,5
$\frac{3}{4}$	ℓ

Obtemos a seguinte proporção: $\dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2{,}5}{\ell} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{2{,}5}{\ell} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\ell = 3 \cdot 2{,}5 \Rightarrow \ell = \frac{3 \cdot 2{,}5}{4} = 1{,}875$$

Assim, a medida equivale a 1,875 cm.

6. A circunferência total da praça mede 370,52 m, pois: $C = \pi d = 3{,}14 \cdot 118 = 370{,}52$. Logo, se Ari percorreu 192,52 m, Edu percorreu 178 m ($370{,}52 - 192{,}52 = 178$), uma distância menor do que a percorrida por Ari. Portanto, Ari é mais rápido.

7. Se adicionarmos as distâncias percorridas por Teca e Lia, obteremos o comprimento total da circunferência da praça. Portanto, $C = 376{,}8$ m, pois: $180 + 196{,}8 = 376{,}8$. Se *r* é a medida do raio da praça, $C = 2\pi r$. Logo:

$$r = \frac{C}{2} = \frac{376{,}8}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{376{,}8}{6{,}28} = 60$$

Portanto, o raio mede aproximadamente 60 m.

8. A largura da pista é a diferença $R - r$ entre os raios de medida R da circunferência externa e de medida *r* da interna. Como a circunferência externa é a maior, temos $2\pi R = 1\,500$. Portanto, $R = \dfrac{1500}{2\pi} = \dfrac{1500}{6{,}28} \simeq 238{,}85$, comprimento de cerca de 238,85 m. Analogamente, $r \simeq 191{,}08$ m. Portanto, a largura é de, aproximadamente, 47,77 m, pois: $238{,}85 - 191{,}08 = 47{,}77$

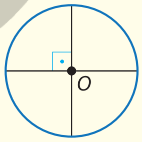
10. Resposta pessoal. Problemas envolvendo circuitos circulares, como pistas de corrida, ou a distância percorrida ao longo de um movimento orbital, são algumas possibilidades.

11. Nesse caso, conhecendo $\alpha = 40°$ e $r = 12$ cm, temos a proporção: $\dfrac{2\pi r}{\ell} = \dfrac{360}{40} \Rightarrow \dfrac{2\pi \cdot 12}{\ell} = \dfrac{360}{40} \Rightarrow \dfrac{24\pi}{\ell} = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9\ell = 24\pi \Rightarrow \ell \simeq \frac{8 \cdot 3{,}14}{3} \simeq 8{,}37$$

Assim, o arco mede aproximadamente 8,4 cm.

12. Diâmetros perpendiculares dividem a circunferência em quatro arcos de mesmo comprimento, cada um deles com ângulo central reto.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, o comprimento ℓ dos arcos correspondentes respeita à seguinte razão: $\dfrac{2\pi r}{\ell} = \dfrac{360}{\alpha} \Rightarrow \dfrac{2\pi \cdot 3}{\ell} =$

$$= \frac{360}{90} \Rightarrow \frac{6\pi}{\ell} = 4 \Rightarrow \ell \simeq \frac{3 \cdot 3{,}14}{2} \simeq 4{,}71$$

Portanto, cerca de 4,71 cm.

13. a) Se a circunferência é dividida em 12 arcos congruentes (ou seja, de mesmo comprimento), o comprimento total é determinado multiplicando-se o comprimento de um desses arcos por 12. Ou seja, 36π cm, pois: $12 \cdot 3\pi = 36\pi$

13. b) Pelo item **a**, o comprimento da circunferência é de 36π cm. Portanto, o raio de medida *r* satisfaz $2\pi r = 36\pi$. Dividindo-se ambos os lados da equação por 2π, segue $r = 18$ cm.

14. O raio da circunferência mede $r = 1{,}8$ cm. Assim, para o arco $\overset{\frown}{AB}$, o ângulo central mede $\alpha = 30°$, e o comprimento ℓ correspondente satisfaz à proporção:

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = \frac{360}{30} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}8\pi}{\ell} = 6 \Rightarrow \ell \simeq 0{,}9$$

Portanto, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 0,9 cm.

Para o arco $\widehat{BC}$, o ângulo central mede $\alpha = 45°$, e o comprimento ℓ correspondente satisfaz à proporção:

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = \frac{360}{45} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}8\pi}{\ell} = 4 \Rightarrow \ell \simeq 1{,}4$$

Então, $\widehat{BC}$ mede cerca de 1,4 cm.

Para o arco $\widehat{CD}$, o ângulo central mede $\alpha = 60°$, e o comprimento ℓ correspondente satisfaz à proporção:

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = \frac{360}{60} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 1{,}8}{\ell} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}8\pi}{\ell} = 3 \Rightarrow \ell \simeq 1{,}9$$

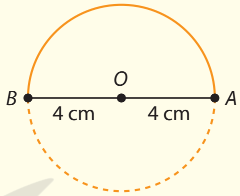
Então, $\widehat{CD}$ mede cerca de 1,9 cm.

15. Medindo os três raios dos arcos representados: R_1, R_2 e R_3, obtemos, aproximadamente: 12,7 cm, 9,3 cm e 6,3 cm. A linha é formada por arcos com ângulo central de medida 180°; portanto, seu comprimento será

$$\frac{2\pi R_1}{2} + \frac{2\pi R_2}{2} + \frac{2\pi R_3}{2} = \pi(R_1 + R_2 + R_3).$$

Como 1,3 + 0,9 + 0,65 = 2,85, o comprimento procurado é aproximadamente 8,95 cm, pois: 3,14 · 2,85 = 8,949

16. Se O é o centro da circunferência, e A e B são os pontos nos quais o diâmetro toca a circunferência, a figura resultante tem como perímetro a soma da medida do arco $\widehat{AB}$ com a medida do segmento $\overline{AB}$:



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

A medida do arco $\widehat{AB}$ é metade do comprimento da circunferência. Ou seja, 12,56 cm, pois: $2\pi r : 2 = \pi r \simeq 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$. Além disso, $\overline{AB}$ é um diâmetro e, portanto, tem comprimento 8 cm. Portanto, o perímetro da figura é aproximadamente 20,56 cm, pois: 12,56 + 8 = 20,56

17. Dados o raio $r = 6$ cm e o comprimento $\ell = 6{,}28$ cm do arco, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 6}{6{,}28} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 12\pi\alpha = 360 \cdot 6{,}28 \Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 6{,}28}{12\pi} \simeq \frac{360 \cdot 6{,}28}{12 \cdot 3{,}14} =$$

$$= \frac{(30 \cdot 12) \cdot (2 \cdot 3{,}14)}{12 \cdot 3{,}14} \Rightarrow \alpha \simeq 30 \cdot 2 = 60$$

Portanto, a medida aproximada do ângulo é 60°.

18. Dados o raio $r = 15$ cm e o comprimento $\ell = 9{,}42$ cm do arco, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 15}{9{,}42} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 30\pi\alpha = 360 \cdot 9{,}42 \Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 9{,}42}{30\pi} \simeq \frac{360 \cdot 9{,}42}{30 \cdot 3{,}14} =$$

$$= \frac{(30 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 3{,}14)}{30 \cdot 3{,}14} \Rightarrow \alpha \simeq 12 \cdot 3 = 36$$

Portanto, a medida aproximada do ângulo é 36°.

19. Dados o raio $r = 18$ cm e o ângulo $\alpha = 40°$, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 18}{\ell} = \frac{360}{40} \Rightarrow \frac{36\pi}{\ell} = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9\ell = 36\pi \Rightarrow \ell = \frac{36\pi}{9} = 4\pi \Rightarrow \ell \simeq 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$$

Portanto, o arco tem medida aproximada de 12,56 cm.

20. Pela figura, identificamos o arco descrito pelo pêndulo como o arco de ângulo de medida $\alpha = 20°$ de uma circunferência de raio de medida $r = 30$ cm. Assim, temos a proporção:

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 30}{\ell} = \frac{360}{20} \Rightarrow \frac{60\pi}{\ell} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\ell = 60\pi \Rightarrow \ell = \frac{60\pi}{18} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \pi}{6 \cdot 3} = \frac{10 \cdot \pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell \simeq \frac{10 \cdot 3{,}14}{3} \simeq 10{,}5$$

Então, o peso percorreu um percurso de medida aproximada de 10,5 cm.

21. Dados o raio de medida $r = 10$ cm e o comprimento $\ell = 7{,}85$ cm do arco, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\pi \cdot 10}{7{,}85} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow 20\pi\alpha = 360 \cdot 7{,}85 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 7{,}85}{20\pi} = \frac{(20 \cdot 18) \cdot 7{,}85}{20\pi} = \frac{18 \cdot 7{,}85}{\pi} \Rightarrow$$

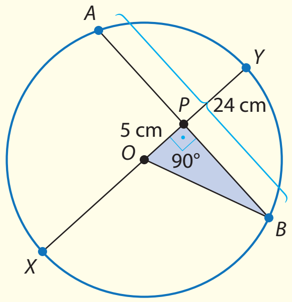
$$\Rightarrow \alpha \simeq \frac{18 \cdot 7{,}85}{3{,}14} = \frac{18 \cdot (2{,}5 \cdot 3{,}14)}{3{,}14} = 18 \cdot 2{,}5 \Rightarrow \alpha \simeq 45$$

Logo, a medida do arco é 45°.

24. **a)** Pela figura, os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ têm ângulo interno de mesma medida. Logo, têm o mesmo comprimento. Portanto, pela 1ª propriedade, as cordas subentendidas por eles são congruentes. Assim, $CD = AB = 1{,}2$ cm.

24. **b)** O ângulo $B\hat{O}C$ se decompõe nos ângulos adjacentes $A\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}D$. Mas $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes. Logo, $m(C\hat{O}D) = m(A\hat{O}B) = 45°$. Por fim, como a medida $m(A\hat{O}D) = 65°$ é dada, temos: $m(B\hat{O}C) = 45° + 65° + 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(B\hat{O}C) = 155°$

25. Esboçando a situação descrita, temos:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Pela 2ª propriedade, $AP = BP$. Logo, cada um deles tem medida igual à metade de $AB = 24$ cm. Ou seja, $AP = BP = 12$ cm. Como o triângulo BPO é retângulo, com catetos $\overline{BP}$ e $\overline{OP}$, cuja hipotenusa $\overline{OB}$ é um raio da circunferência, temos: $BP^2 + OP^2 = OB^2 \Rightarrow 12^2 + 5^2 = OB^2 \Rightarrow OB^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow OB = 13$.

Portanto, o raio da circunferência mede 13 cm.

28. Dados o raio $r = 40$ cm e o ângulo $\alpha = 80°$, temos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 40}{\ell} = \frac{360}{80} \Rightarrow \frac{80\pi}{\ell} = \frac{9 \cdot 40}{2 \cdot 40} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{80\pi}{\ell} = \frac{9}{2} \Rightarrow 9\ell = 160\pi \Rightarrow \ell = \frac{160\pi}{9} \simeq \frac{160 \cdot 3{,}14}{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell \simeq 55{,}8$

Portanto, o comprimento do arco mede aproximadamente 55,8 cm.

29. Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo retângulo mede 6 cm, pois: $\sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{20 + 16} = \sqrt{36} = 6$. Essa hipotenusa é um diâmetro da circunferência que circunscreve o triângulo. Logo, o raio dessa circunferência mede 3 cm. Como a mediana relativa à hipotenusa é um raio da circunferência que circunscreve o triângulo. Assim, essa mediana mede 3 cm.

30. A mediana relativa à hipotenusa é um raio da circunferência que circunscreve o triângulo. Assim, o raio dessa circunferência mede 4 cm. Como a hipotenusa do triângulo é um diâmetro do círculo que o circunscreve, sua medida é 8 cm. Como um dos catetos mede $\sqrt{15}$ cm, pelo teorema de Pitágoras, o outro cateto mede 7 cm, pois: $\sqrt{8^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49} = 7$

31. A mediana relativa à hipotenusa é um raio da circunferência que circunscreve o triângulo. Assim, o raio dessa circunferência mede $r = 12$ cm. O comprimento da circunferência é 75,36 cm, pois: $C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \simeq 75{,}36$

33. a) Recordando que um triângulo inscrito em uma semicircunferência (e, portanto, em uma circunferência) é retângulo, o triângulo ABC é retângulo, com $m\left(A\hat{C}B\right) = 90°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos: $m\left(B\hat{A}C\right) + m\left(A\hat{B}C\right) + m\left(A\hat{C}B\right) = 180° \Rightarrow 30° + m\left(A\hat{B}C\right) + 90° = 180° \Rightarrow m\left(A\hat{B}C\right) + 120° = 180° \Rightarrow m\left(A\hat{B}C\right) = 180° - 120° \Rightarrow m\left(A\hat{B}C\right) = 60°$. Agora, como $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são ambos raios da circunferência, o triângulo OBC é isósceles. Portanto, os ângulos $B\hat{C}O$ e $O\hat{B}C$ são congruentes. Mas$m\left(O\hat{B}C\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$. Logo, $m\left(B\hat{C}O\right) = m\left(O\hat{B}C\right) = m\left(A\hat{B}C\right) = 60°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, no triângulo OBC temos: $m\left(B\hat{O}C\right) + m\left(B\hat{C}O\right) + m\left(O\hat{B}C\right) = 180° \Rightarrow m\left(B\hat{O}C\right) + 60° + 60° = 180° \Rightarrow m\left(B\hat{O}C\right) = 60°$. Por fim, como O está sobre o segmento $\overline{AB}$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ juntos formam um ângulo raso. Portanto: $m\left(A\hat{O}C\right) + m\left(B\hat{O}C\right) = 180° \Rightarrow m\left(A\hat{O}C\right) + 60° = 180° \Rightarrow m\left(A\hat{O}C\right) = 120°$

33. b) $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios da circunferência. Portanto, $OB = OC = 3$ cm. Como os três ângulos internos do triângulo AOC medem 60°, ele é equilátero. Portanto, $\overline{BC}$ também mede 3 cm. Agora, $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência. Portanto, mede o dobro do raio, isto é, 6 cm. Por fim, como o triângulo ACB é reto, temos:
$m(AC)^2 + m(BC)^2 = m(AB)^2 \Rightarrow m(AC)^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(AC)^2 + 9 = 36 \Rightarrow m(AC)^2 = 27 \Rightarrow m(AC) =$
$= \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Logo, $\overline{AC}$ mede $3\sqrt{3}$ cm.

33. c)

Triângulo	Ângulos	Lados
ABC	Retângulo, pois o ângulo $A\hat{C}B$ é reto.	Escaleno, pois todos os seus lados possuem medidas distintas.
AOC	Obtusângulo, pois o ângulo $A\hat{O}C$ tem medida maior do que 90°.	Isósceles, pois $AO = OC$.
OBC	Acutângulo, pois seus três ângulos medem 60°.	Equilátero, pois seus três lados são congruentes.

34. Pela 1ª relação métrica:

34. a) $6 \cdot 9 = 3 \cdot x \Rightarrow x = 2 \cdot 9 \Rightarrow x = 18$

34. b) $x \cdot (x + 1) = 2 \cdot 10 \Rightarrow x^2 + x = 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

Portanto, $x = 4$ ou $x = -5$. Como medidas não podem ser negativas, $x = 4$.

34. c) $x \cdot (2x) = 3 \cdot (4x) \Rightarrow 2x^2 = 12x \Rightarrow 2x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x \cdot (x - 6) = 0$

Portanto, $x = 0$ ou $x = 6$. Como x é uma medida não nula, $x = 6$.

34. d) Supondo que O é o centro da circunferência, o raio mede 8. Portanto, a corda passando pelo ponto O mostrada na figura é dividida pela outra corda em um segmento de medida 2 e outro de medida 14 $(16 - 2 = 14)$. Portanto: $4 \cdot x = 2 \cdot 14 \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$

35. Chamando P ao ponto de interseção do diâmetro $\overline{CD}$ com a base $\overline{AB}$, que também é uma corda, temos $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Como são dados $PA = PB = 6$ cm e $PD = 4$ cm, temos: $6 \cdot 6 = PC \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot PC = 36 \Rightarrow PC = 9$

Como $\overline{AB}$ é a base e $\overline{PC}$ é a altura do triângulo ABC, sua área é dada por: $\frac{1}{2} AB \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$

A área mede 54 cm².

36. A 1ª relação métrica implica $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. Utilizando passos como unidade de medida, temos $PA = 30$, $PD = 20$ e $PB = 72$. Assim: $30 \cdot PC = 72 \cdot 20 \Rightarrow PC = 48$

Portanto, 48 passos.

37. Pela 2ª propriedade, o diâmetro bissecta a corda em dois segmentos de 3 cm cada. Se o raio da circunferência mede r, o diâmetro é dividido pela corda em um segmento de medida $r + 4$ e outro de medida $r - 4$. Assim, pela 1ª relação métrica: $(r + 4) \cdot (r - 4) = 3 \cdot 3 \Rightarrow r^2 - 16 = 9 \Rightarrow r^2 = 25$. Como a área do círculo é dada por πr^2, ela mede 25π cm².

38. Pela 2ª relação métrica:

38. a) $3 \cdot x = 4 \cdot 12 \Rightarrow x = 4 \cdot 4 = 16$

38. b) $12 \cdot (x + 3 + 12) = 9 \cdot (27 + 9) \Rightarrow 12 \cdot (x + 15) = 9 \cdot 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12x + 180 = 324 \Rightarrow 12x = 324 - 180 \Rightarrow 12x = 144 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 12$

38. c) $x \cdot (x + x + 4) = 8 \cdot (8 + 22) \Rightarrow x \cdot (2x + 4) = 8 \cdot 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 4x = 240 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 240 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x^2 + 2x -$
$- 120) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x - 10) \cdot (x + 12) = 0$

Portanto, $x = 10$ ou $x = -12$. Como medidas não podem ser negativas, $x = 10$.

39. As estradas cortam o canteiro circular como dois segmentos secantes à circunferência que o delimita. Na primeira estrada, a parte externa mede 50 m, e o segmento secante mede 144 m (50 + 94 = 144). Já na LP-132, a parte externa mede 48 m, e o segmento secante mede 48 m + x. Pela 2ª relação métrica: $48 \cdot (48 + x) = 50 \cdot 144 \Rightarrow 2\,304 + 48x = 7\,200 \Rightarrow 48x = 4\,896 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 102$

40. Pela 3ª propriedade métrica:

40. a) $x^2 = 4 \cdot (21 + 4) \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 25 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$
Como x é um número positivo, $x = 10$.

40. b) $9^2 = x \cdot (8x + x) \Rightarrow 81 = x \cdot (9x) \Rightarrow 81 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm 3$
Como x é um número positivo, $x = 3$.

Exercícios complementares

2. A volta completa dada pelo ponteiro pode ser associada a uma circunferência de raio $r = 9$ cm. Portanto, tem comprimento $C = 18\pi$ cm, pois $2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 9 = 18\pi$. Como o ponteiro é o dos minutos, em 20 minutos, que é um terço de hora, ele terá percorrido um terço desse comprimento. Ou seja, 6π cm (pois $18\pi : 3 = 6\pi$).

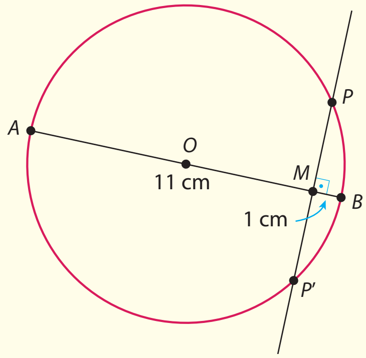
4. Pela 1ª relação métrica, $MC \cdot MD = MA \cdot MB$. Substituindo as medidas indicadas na figura: $2x \cdot (x + 3) =$ $= (2x + 3) \cdot (x + 1) \Rightarrow 2x^2 + 6x = 2x^2 + 2x + 3x + 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 6x = 5x + 3 \Rightarrow x = 3$
Em particular, $MA = 9$ cm, pois $AM = 2x + 3 =$ $= 6 + 3 = 9$; $MB = 4$ cm, pois $MB = x + 1 = 3 + 1 = 4$.
Logo: $AB = MA + MB = 9$ cm $+ 4$ cm $= 13$ cm
Alternativa **e**.

5. Pela 1ª relação métrica, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Como P é ponto médio do raio, $PA = r : 2 = 4 : 2 = 2$. Como $\overline{AB}$ é um diâmetro: $AB = 2r \Rightarrow PA + PB = 2 \cdot 4 \Rightarrow 2 + PB = 8 \Rightarrow PB = 6$
Por fim, pelo enunciado, $PC = 2 \cdot PD$. Logo, substituindo todas as informações: $2 \cdot 6 = (2 \cdot PD) \cdot PD \Rightarrow 12 = 2 \cdot PD^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow PD^2 = 6$
Como PD é um número positivo, $PD = \sqrt{6}$.
Por fim: $CD = PC + PD = 2 \cdot PD + PD = 3 \cdot PD = 3\sqrt{6}$
Alternativa **b**.

6. Pela 1ª relação métrica aplicada à corda $\overline{AB}$, que também é lado do quadrado, e à outra corda mostrada na figura: $x \cdot x = 3 \cdot 8 \Rightarrow x^2 = 24$. Como $AB = 2x$, a medida da área do quadrado é dada por $AB^2 = (2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2 =$ $= 4 \cdot (24) = 96$. Então, a medida da área é 96 cm².

7. Se r é a medida do raio da circunferência, a intersecção do diâmetro pela corda o divide em um segmento de medida $r + 2,5$ e outro de medida $r - 2,5$. O de medida $r + 2,5$ é o maior deles. Portanto, $r + 2,5 = 7$ ou, ainda, $r = 7 - 2,5 = 4,5$.
Logo, 4,5 cm.

8. Fazendo a construção indicada, percebemos que a perpendicular a $\overline{AB}$ pelo ponto M intercepta a circunferência no ponto P e, também, em P'. Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, temos $MP = MP'$. Além disso, a 1ª relação métrica implica: $MP \cdot MP' = MA \cdot MB \Rightarrow$ $\Rightarrow MP \cdot MP = 11 \cdot 1 \Rightarrow MP^2 = 11$. Logo, como a medida deve ser positiva, $PM = MP = \sqrt{11}$; assim, o segmento $\overline{PM}$ é a representação geométrica do número $\sqrt{11}$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

9. Da figura, podemos afirmar que os triângulos AHE e DGE são semelhantes. Assim:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{HE}{GE} \Rightarrow \frac{9,5}{6} = \frac{HE}{5,7} \Rightarrow HE = 9,025$$

Assim, a altura procurada mede 9,025 cm.

Verificando

1. Conhecendo o comprimento $C = 31,4$ km da pista, o raio de medida r é tal que: $C = 2\pi r$. Assim: $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{31,4}{2\pi} \simeq$ $\simeq \frac{31,4}{2 \cdot 3,14} \Rightarrow r \simeq 5$
Alternativa **d**.

2. Sabendo que aro é o jargão automotivo para o diâmetro d, temos $d = 17" = 17 \cdot 1" = 17 \cdot 2,54 = 43,18$. O comprimento correspondente é 135,6 cm, pois:
$C = \pi d \simeq 3,14 \cdot 43,18 \simeq 135,6$
Alternativa **c**.

3. Dados o raio $r = 4,5$ m e o ângulo central de medida $\alpha = 45°$, o comprimento ℓ do arco correspondente satisfaz à proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 4,5}{\ell} = \frac{360}{45} \Rightarrow \frac{9\pi}{\ell} = 8 \Rightarrow 8\ell = 9\pi \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = \frac{9\pi}{8} \simeq \frac{9 \cdot 3,14}{8} \Rightarrow \ell \simeq 3,53$
Alternativa **c**.

4. Quando um triângulo retângulo é inscrito em uma circunferência, sua hipotenusa é um diâmetro dessa circunferência. Portanto, sua medida é 30 cm ($d = 2r =$ $= 2 \cdot 15 = 30$).
Alternativa **a**.

5. Pela 1ª relação métrica, temos:
$(2x) \cdot 5 = 3 \cdot 8 \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = 2,4$
Alternativa **b**.

6. Pela 3ª relação métrica: $5 \cdot (5 + x) = 12^2 \Rightarrow 25 + 5x = 144 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 144 - 25 \Rightarrow 5x = 119 \Rightarrow x = 23,8$
Portanto, o comprimento de uma circunferência que tenha x como medida de raio é:
$C = 2\pi x \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 23,8 \simeq 149,46$
Alternativa **d**.

7. Pela 2ª relação métrica: $7 \cdot (7 + x) = 6 \cdot (6 + 9) \Rightarrow 49 + 7x =$ $= 6 \cdot 15 \Rightarrow 49 + 7x = 90 \Rightarrow 7x = 90 - 49 \Rightarrow 7x = 41 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{41}{7}$
A área de um quadrado que tenha x como medida de lado é: $x^2 = \left(\frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1681}{49} \simeq 34,31$
Alternativa **c**.

8. No gráfico de semicoroa circular, 100% correspondem a 180°. Portanto, 50%, que é metade de 100%, correspondem à metade de 180°, que é 90°
Alternativa **a**.

Organizando

a) O valor constante da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é o número π (lê-se “pi”), um número irracional que vale aproximadamente 3,14.

b) Uma das propriedades é o diâmetro. Pelo item **a**, vemos que a relação é $C = \pi d$, em que C é o comprimento da circunferência. A outra propriedade é o raio, que é, por definição, metade do diâmetro. Como, equivalentemente, o diâmetro é o dobro do raio, temos:
$C = \pi d = \pi \cdot (2r) = 2\pi r$.

Capítulo 12 - Polígonos regulares e áreas

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer e utilizar os elementos e as relações métricas nos polígonos regulares.
- Aplicar o teorema de Pitágoras na determinação de elementos de polígonos regulares inscritos em uma circunferência.
- Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras envolvendo polígonos regulares.
- Descrever algoritmo por escrito e por meio de fluxograma para a construção de um polígono regular.
- Relacionar arcos de uma circunferência e ângulos centrais de polígonos regulares inscritos nessa circunferência.
- Resolver problemas envolvendo área de um polígono regular, números reais, cálculo de áreas e volumes, relações de proporcionalidade no cálculo da área de um setor circular, área de um círculo, de uma coroa circular e de um setor circular.
- Analisar gráficos com elementos que induzem a erros de leitura e de interpretação.

Neste capítulo, ampliamos o trabalho sobre polígonos regulares e seus elementos ao apresentar as relações métricas entre elementos de um polígono regular e a circunferência a que ele está inscrito. Desenvolvemos o estudo de polígonos regulares com o uso da linguagem algébrica e questões de construção geométrica de figuras. Tratamos da medida da área de um polígono regular, de um círculo e de suas partes; e da medida do volume de alguns sólidos geométricos, relacionando as Unidades Temáticas **Geometria** e **Grandezas e medidas** e contribuindo para a consolidação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. Assim, o trabalho realizado favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3** e **5**.

O contexto da abertura deste capítulo possibilita desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, pois os estudantes podem pesquisar e debater sobre o carimbó que é uma manifestação artística que pode representar o multiculturalismo brasileiro, visto que reúne elementos de diferentes culturas, contribuindo para o trabalho com a **competência geral 3**.

Na seção *Trabalhando a informação* exploramos a leitura de gráficos, com destaque para elementos que possam induzir a erros de leitura, o que contribui com a **competência geral 4** e as **competências específicas 4** e **5.**

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação as atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, à vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

Os conhecimentos abordados neste capítulo referem-se à Unidade Temática **Geometria**, ampliando o estudo dos polígonos regulares iniciado no livro do 8º ano (EF08MA16).

Além disso, o capítulo desenvolve assuntos vinculados à Unidade Temática **Grandezas e medidas**, oportunidade para que seja ampliado o trabalho com medidas de área (com a área de polígono regular e área de partes de um círculo) e medidas de volume, de modo a consolidar e aprofundar os conhecimentos construídos em anos anteriores, em especial no 8º ano (EF08MA19 e EF08MA21), contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF09MA14), (EF09MA15), (EF09MA17) e (EF09MA19).

As conexões com as demais Unidades Temáticas estão presentes nas diversas atividades propostas no capítulo. A relação com a Unidade Temática **Números** se dá nos cálculos com números reais utilizados na determinação de volumes de prisma e de cone; a conexão com a Unidade Temática **Álgebra** aparece ao utilizar relações de proporcionalidade no cálculo da área de um setor circular; e a articulação com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística** ocorre na seção *Trabalhando a informação*, favorecendo o desenvolvimento das habilidades (EF09MA11) e (EF09MA21).

• Comentários e resoluções

Apresentamos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1\. a) Tomando a relação para quadrados inscritos na circunferência: $\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3\sqrt{2}$. Usando aproximação: $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, $\ell \simeq 3 \cdot 1{,}4 \Rightarrow \ell \simeq 4,2$

1\. b) Tomando a relação para quadrados inscritos na circunferência: $a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2\. Como $a = 6\sqrt{2}$ e $a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, então: $\frac{r\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 12$

Portanto, a diagonal do quadrado, que é o dobro do raio, mede 24 cm, pois $12 \cdot 2 = 24$.

3\. Como a diagonal do quadrado inscrito mede $d = 5\sqrt{2}$ cm; a medida do raio do círculo que o circunscreve é $\frac{d}{2}$, ou seja $r = 2{,}5\sqrt{2}$.

A medida do apótema é dada por:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{(2{,}5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{2{,}5 \cdot 2}{2} \Rightarrow a = 2{,}5$$

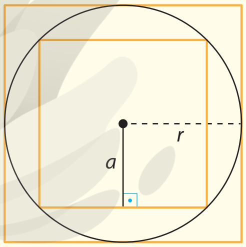
4\. A medida do raio da circunferência é metade da medida do lado do quadrado circunscrito: $r = \frac{\ell}{2} \Rightarrow r = 4$

4\. a) $\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 4\sqrt{2}$, então $4\sqrt{2}$ cm

4\. b) $d = 2 \cdot r \Rightarrow d = 2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

5\. Seja p_1 a medida do perímetro do quadrado circunscrito, p_2 a medida do perímetro do quadrado inscrito, a_2 a medida do apótema do quadrado inscrito. Como $p_1 = 4 \cdot \ell$ e $\ell = 2r$ (raio da circunferência), $p_1 = 4 \cdot 2r = 8 \cdot r \cdot p_2 = 4 \cdot (2 \cdot a_2)$, tomando: $a_2 = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{8 \cdot r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p_2 = 4r\sqrt{2} \Rightarrow p_1 - p_2 =$

$= 8r - 4r\sqrt{2} \Rightarrow p_1 - p_2 = \left(8 - 4\sqrt{2}\right)r$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

6\. a) A medida do lado do quadrado maior é igual à medida da diagonal do quadrado menor (d). Pelo teorema de Pitágoras: $d^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow d^2 = 200 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 10\sqrt{2}$

O lado do quadrado maior mede $10\sqrt{2}$ cm.

6\. b) A medida da faixa vermelha é dada pela adição da medida do perímetro do quadrado maior com a medida do perímetro do quadrado menor:

$p_{\text{menor}} = 4\ell \Rightarrow p_{\text{menor}} = 40$. $p_{\text{maior}} = 4\ell \Rightarrow 40\sqrt{2}$

Então, a faixa vermelha tem medida $(40 + 40\sqrt{2})$ cm, pois: $p_{\text{menor}} + p_{\text{maior}} = (40 + 40\sqrt{2})$ cm

6\. c) Obtemos a medida da área dos quatro triângulos subtraindo a medida da área do quadrado menor da medida da área do quadrado maior. Sejam A_1 a medida da área do quadrado maior e A_2 a medida da área do quadrado menor.

$A_1 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow A_1 = 100 \cdot 2 \Rightarrow A_1 = 200$

$A_2 = 10^2 \Rightarrow A_2 = 100$

Então, $A_1 - A_2 = 100$, a medida da área dos triângulos é 100 cm².

7\. Como o lado do quadrado mede 60 cm e seus lados são tangentes à circunferência, a medida do diâmetro da circunferência se relaciona com a medida do lado do quadrado: $d = 60 \Rightarrow r = 60 : 2 = 30$

Como $\ell = r \Rightarrow \ell = 30$, o lado mede 30 cm. Então: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{30\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 15\sqrt{3}$

Assim, a medida da área do hexágono é: $A = 6\frac{\ell \cdot a}{2} \Rightarrow$

$A = 6 \cdot \frac{30 \cdot 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 1\,350\sqrt{3}$

Então, a área mede $1\,350\sqrt{3}$ cm².

8\. a) $\ell = r \Rightarrow \ell = 3{,}2$ cm

8\. b) Seja $2p$ a medida do perímetro e ℓ a medida do lado do hexágono regular: $2p = 6 \cdot \ell \Rightarrow 2\,p = 19{,}2$

Então, o perímetro mede 19,2 cm.

8\. c) $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3{,}2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 1{,}6\sqrt{3}$

Então, o apótema mede $1{,}6\sqrt{3}$ cm.

9\. Dado: $a = 9\sqrt{3}$, como $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, então: $\frac{r\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow$

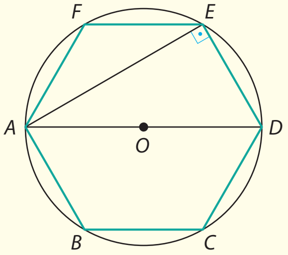
$\Rightarrow r\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \Rightarrow r = 18$

O lado de medida ℓ do quadrado será dado por:

$\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 18\sqrt{2}$

Portanto, tem medida $18\sqrt{2}$ cm.

10\. Considere o esquema a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

$\overline{AE}$ é a menor diagonal, então mede $12\sqrt{3}$ cm. Também $DE = r$ e $AD = 2r$. Pelo Teorema de Pitágoras: $(AE)^2 =$ $= (DE)^2 + (AD)^2 \Rightarrow \left(12\sqrt{3}\right)^2 = r^2 + (2r)^2 \Rightarrow 432 = 3r^2 \Rightarrow r^2 =$ $= 144 \Rightarrow r = 12$

Encontremos o perímetro $2p$, sabendo que $\ell = r$, temos: $2p = 6\ell \Rightarrow 2p = 6 \cdot 12 \Rightarrow 2p = 72$

Então, o perímetro mede 72 cm.

11. O triângulo inscrito é equilátero: $d = 10$ e $r = 5$. Pelo teorema de Pitágoras, com ℓ medida do lado do triângulo inscrito: $d^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = \ell^2 + 5^2 \Rightarrow 100 - 25 = \ell^2 \Rightarrow 75 = \ell^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = 5\sqrt{3}$

Portanto, $5\sqrt{3}$ cm.

12. Seja ℓ a medida do lado do hexágono e q a medida do lado do quadrado, $\ell = r = 5 \Rightarrow q = 2r \Rightarrow q = 10 \Rightarrow 2p =$ $= 4\ell \Rightarrow 2p = 40$

Logo, o perímetro mede 40 cm.

14. a) $\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 3\sqrt{3}$ **cm**

14. b) $a = \frac{r}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1{,}5$

Logo, o apótema mede 1,5 cm.

15. a) $a = \frac{r}{2} = \sqrt{12} \Rightarrow r = 2\sqrt{12} \Rightarrow \ell = r\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{36} \Rightarrow \ell = 12$

Portanto, 12 cm.

15. b) $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$

Portanto, $6\sqrt{3}$ cm.

16. a) $a = \frac{r}{2} \Rightarrow a = 4$

Apótema mede 4 cm.

16. b) $r + a = 4 + 8 = 12$

Soma é 12 cm.

16. c) $\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 8\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 12$

Altura mede 12 cm.

16. d) Como foi observado em **b** e **c**: $h = r + a$, então, sim.

18. a_1: apótema do quadrado; a_2: apótema do triângulo

$a_1 = 3{,}5\sqrt{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \Rightarrow r = 7$

$a_2 = \frac{r}{2} = 3{,}5$

Então, o apótema do triângulo mede 3,5 cm.

19. ℓ_1: medida do lado do quadrado; ℓ_2: medida do lado do hexágono

Como $\ell_1 = 15\sqrt{3}$, temos: $r\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \Rightarrow r = 15$

Como $\ell_2 = r \Rightarrow \ell_2 = 15$, o lado mede 15 cm.

21. $\ell = 20 = r$. Como $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{20\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 10\sqrt{3}$ e também $2p = 6 \cdot 20 \Rightarrow 2p = 120$. Então $p = 60$. Usando a relação: $A = p \cdot a \Rightarrow A = 60 \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow A = 600\sqrt{3}$, então o apótema mede $10\sqrt{3}$ cm e a área mede $600\sqrt{3}$ cm².

22. Primeiro, achar o semiperímetro, sendo n o número de lados e ℓ a medida do lado do pentágono: $2p = n \cdot \ell \Rightarrow p =$ $= \frac{5 \cdot 20}{2} \Rightarrow p = 50$

Agora, calculando a medida a_c do ângulo central, temos:

$a_c = \frac{360°}{n} \Rightarrow = a_c = \frac{360°}{5} \Rightarrow = a_c = 72°$

Para calcular a medida do apótema usaremos a tangente da metade da medida do ângulo central: tg 36° =

$= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{10}{0{,}73} \Rightarrow a \simeq 13{,}7$

Finalmente: $A = p \cdot a \Rightarrow A = 50 \cdot 13{,}7 \Rightarrow A \simeq 685$

Portanto, a área mede aproximadamente 685 cm².

23. Eneágono regular tem 9 lados de mesma medida. Para descobrirmos a área pedida, encontraremos o semiperímetro e o apótema, pois: Área = $p \cdot a$. Assim:

$a_c = \frac{360°}{9} = 40°$, então usaremos o cosseno de 20°, que é metade de a_c: $\cos 20° = \frac{a}{r} \Rightarrow 0{,}93 = \frac{a}{18} \Rightarrow a = 16{,}74$.

Para encontrar ℓ, usaremos a relação seno: sen 20° =

$= \frac{\frac{\ell}{2}}{r} \Rightarrow 0{,}34 = \frac{\frac{\ell}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\ell}{2} = 6{,}12 \Rightarrow \ell = 12{,}24$

Agora, encontraremos o semiperímetro:

$2p = 9\ell \Rightarrow 2p = 2 \cdot 12{,}24 \Rightarrow p = 55{,}08$

Finalmente: $A = p \cdot a \Rightarrow A = 55{,}08 \cdot 16{,}74 \Rightarrow A \simeq 922{,}04$

Portanto, a área mede cerca de 922 cm².

24. Como o diâmetro mede 3,6 cm, o raio mede 1,8 cm (3,6 : 2 = = 1,8). A área será dada por $A = p \cdot a$, com $p = \frac{3\ell}{2}$.

Encontremos, então, a medida do lado: $\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = 1{,}8\sqrt{3} \Rightarrow p = \frac{3\ell}{2} \Rightarrow p = \frac{3 \cdot 1{,}8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = 2{,}7\sqrt{3}$

Também: $a = \frac{r}{2} \Rightarrow a = \frac{1{,}8}{2} \Rightarrow a = 0{,}9$

Então: $A = p \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2{,}7\sqrt{3} \cdot 0{,}9 \Rightarrow A = 2{,}43\sqrt{3}$

Portanto, a área tem medida de $2{,}43\sqrt{3}$ cm².

25. $\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3\sqrt{2}$

A medida da área da base mede 18 cm², pois é dada por: $A_b = \ell_2 \Rightarrow A_b = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow A_b = 18$

A medida da área da superfície lateral é 72 cm², pois é dada por: $A_{sl} = 4 \cdot A_b \Rightarrow A_{sl} = 4 \cdot 18 \Rightarrow A_{sl} = 72$

26. a) **Octógono** de lado medindo 5 cm: Área = $p \cdot a$.

Assim: $a_c = \frac{360°}{8} = 45°$, então, usaremos a tangente de 22,5°, que é metade de a_c: tg 22,5° = $\frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}41 =$

$= \frac{\frac{5}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}41a = \frac{5}{2} \Rightarrow a \simeq 6{,}0975$

Agora, encontraremos o semiperímetro: $2p = 8 \cdot \ell \Rightarrow$ $\Rightarrow 2p = 8 \cdot 5 \Rightarrow p = 20$. Finalmente: $A_o = p \cdot a \Rightarrow A_o =$ $= 20 \cdot 6{,}0975 \Rightarrow A_o \simeq 121{,}95$.

Decágono (10 lados) com lado medindo 5 cm. Como Área = $p \cdot a$. Assim: $a_c = \frac{360°}{10} = 36°$

Então, usaremos a tangente de 18°, que é metade de a_c: tg 18° = $\frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}32 = \frac{\frac{5}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}32a = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \simeq 7{,}8125$

Agora, encontraremos a medida do semiperímetro:
$2p = 10 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 10 \cdot 5 \Rightarrow p = 25$

Finalmente:

$A_u = p \cdot a \Rightarrow A_u = 25 \cdot 7{,}8125 \Rightarrow A_u \simeq 195{,}31$

Triângulo de lado medindo 20 cm:

$$\text{Área} = \frac{\text{medida de base} \cdot \text{medida de altura}}{2}.$$

Sendo medida da base = 20 e medida da altura = h dada pela relação de tangente da metade do ângulo do triângulo. O triângulo equilátero tem seus ângulos de medidas iguais a 60°; então, usaremos a tangente de 30°, que é metade de a_c:

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{10}{a} \Rightarrow 0{,}58a = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \simeq 17,\,2414$$

Finalmente:

$$A_t = \frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{20 \cdot 17{,}2414}{2} \Rightarrow A_t \simeq 172{,}41$$

Hexágono com lado medindo 10 cm: Área = $p \cdot a$

$$\text{Assim: } a = \frac{r\sqrt{3}}{2}, \text{com } \ell = r \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 8{,}65$$

Agora, encontraremos a medida do semiperímetro:

$2p = 6 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 6 \cdot 10 \Rightarrow p = 30$

Finalmente:

$A_h = p \cdot a \Rightarrow A_h = 30 \cdot 8{,}65 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_h \simeq 259{,}5 \text{ cm}^2$

Pentágono com lado de medida 15 cm: Área = $p \cdot a$

$$\text{Assim: } a_c = \frac{360°}{5} = 72°$$

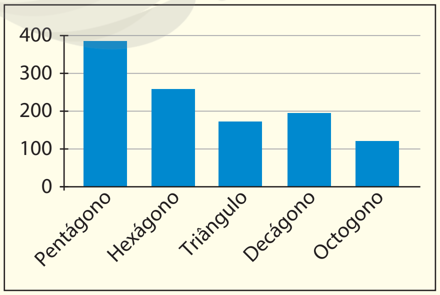
Então, usaremos a tangente de 36°, que é metade de a_c:

$$\text{tg } 36° = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{\frac{15}{2}}{a} \Rightarrow 0{,}73\,a = 7{,}5 \Rightarrow a = 10{,}274$$

Agora, encontraremos a medida do semiperímetro:
$2p = 5 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 5 \cdot 15 \Rightarrow p = 37{,}5$

Finalmente:
$A_p = p \cdot a \Rightarrow A_p = 37{,}5 \cdot 10{,}274 \Rightarrow A_p \simeq 385{,}28$

Portanto, o gráfico de colunas com esses dados é:



Dados obtidos pelo estudante.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

26. **b)** $\text{Área média} = \dfrac{\text{soma das medidas das áreas}}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Área média =

$$= \frac{385{,}28 + 259{,}50 + 172{,}41 + 195{,}31 + 121{,}95}{5} =$$

$$= \frac{1134{,}45}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Área média = 226,89

Portanto, a medida da área média é 226,89 cm².

28. $A_{círculo} = p \cdot r^2 = 16p \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$
Então, o diâmetro mede 8 cm.
Alternativa **b**.

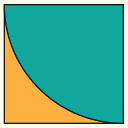
29. $A = \dfrac{AC \cdot AB}{2}$. Se $\overline{AB}$ é diâmetro, sua medida é o dobro da medida do raio. Logo $AB = 10$ cm. Vamos encontrar a medida AC usando o Teorema de Pitágoras: $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (AC)^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow (AC)^2 = 100 - 36 \Rightarrow (AC)^2 = 64 \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = 8$ Então: $A = \dfrac{AC \cdot AB}{2} \Rightarrow A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 24$
Alternativa **a**.

30. Como os três triângulos internos tem dois dos lados medindo $r = 1$, então esses três triângulos são isósceles e seus terceiros lados são congruentes. Logo, o triângulo é equilátero. Basta encontrarmos a medida de um dos lados. Como $a = b = g$, então $a = b = g = \dfrac{360°}{3} =$ $= 120°$. Podemos descobrir usando o seno de 60°, com cateto oposto igual à metade do lado do triângulo inscrito e a hipotenusa igual ao raio: $\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{1}$
Consultando o quadro de relações trigonométricas:
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \sqrt{3}$$
Alternativa **e**.

32. Considerando os dois círculos de mesmo diâmetro de medida 6 cm, o raio mede $r = 3$ cm; logo:
Área total = 2 · Área do círculo = $2 \cdot (p \cdot r^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Área total = $2 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \Rightarrow$ Área total = 56,52
Então, a área total mede 56,52 cm².

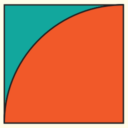
33. A parte verde é formada pela circunferência menor subtraindo-se a área de 4 semicircunferências de diâmetro igual ao raio da circunferência menor. Então, as medidas de: diâmetro da circunferência maior = 4 cm $\Rightarrow r_1 = 2$ cm e também diâmetro da circunferência maior $= 4$ cm $\Rightarrow r_1 = 2$ cm. Assim: área da circunferência maior $= \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$. Agora, encontraremos a área da parte branca: para a medida da área das quatro semicircunferências menores A_s, então: $A_s = 4 \cdot \dfrac{\pi \cdot r_2^2}{2} =$ $= 4 \cdot \dfrac{3{,}14 \cdot 1^2}{2} \Rightarrow A_s = 4 \cdot 1{,}57 = 6{,}28$
Então, área da parte verde (A_t) mede 6,28 cm², pois é dada por: $A_t = 12{,}56 - 6{,}28 = 6{,}28$.

34. Considerando separadamente os quadradinhos onde aparece verde, é possível notar que há:



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

- 4 partes como essa. Note que 4 partes como essa formam uma circunferência de raio de medida $r = 3$ cm.



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

- 4 partes como essa. Note que 4 partes como essa são formadas pela área de um quadrado de lado 6 subtraindo-se a área de uma circunferência inscrita de raio 3 cm.

Como Área do círculo = $p \cdot r^2 \Rightarrow$ Área do círculo = $= 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26$ e também Área do quadrado = $\ell^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Área do quadrado = $6^2 = 36$.

Então: Área do círculo = 28, 26 + (36 – 28, 26) ⇒

⇒ Área do círculo = 36

A área mede 36 cm².

35. A área pintada de roxo é igual à medida da área de um hexágono (A_h) inscrito subtraída da medida da área do triângulo inscrito (A_t). Para a área do hexágono: $\ell = r$ e

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = 6 \cdot \ell = 6r \Rightarrow A_h = p \cdot a \Rightarrow A_h = 6r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A_h = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Para a área do triângulo: $\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow a \; \dfrac{r\sqrt{3} \cdot \dfrac{3r}{2}}{2} \Rightarrow$

$$h = r + a \Rightarrow h = \frac{3r}{2} \Rightarrow A_t = \frac{\ell \cdot h}{2} \Rightarrow A_t = \frac{3 \cdot r^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim: Área roxa = $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3 \cdot r^{2\sqrt{3}}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Área roxa = $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

Então, a medida da área roxa é $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}u^2$.

36. a) $a_c = \dfrac{360°}{12} \Rightarrow a_c = 30°$

36. b) Usando a relação cosseno para calcular o apótema (cateto adjacente ao ângulo de 15°). A hipotenusa tem medida igual à do raio.

$$\cos 15° = \frac{a}{10} \Rightarrow 0{,}97 = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9{,}7$$

Usando a relação seno para calcular a medida do lado (cateto oposto ao ângulo de 15°). A hipotenusa tem medida igual ao raio.

$$\text{sen } 15° = \frac{\frac{\ell}{2}}{10} \Rightarrow 0{,}26 = \frac{\ell}{20} \Rightarrow \ell = 5{,}2$$

Portanto, o apótema mede 9,7 cm e o lado mede 5,2 cm.

36. c) $C = 2 \cdot p \cdot r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \Rightarrow C = 62{,}8$; $2\,p = 12 \cdot \ell \Rightarrow$ $\Rightarrow 2p = 12 \cdot 5{,}20 \Rightarrow 2p = 62{,}4$

Então, a diferença é de 0,4 cm, pois: $C - 2p =$ $= 62{,}8 - 62{,}4 = 0{,}4$

36. d) $A = p \cdot a$

p é metade da medida do perímetro; logo, $p = 31{,}2$ cm.

$A = 31{,}2 \cdot 9{,}70 \Rightarrow A = 302{,}64$

A área mede 302,64 cm².

37. Como a medida $A_{\text{coroa circular}} = p\,(R^2 - r^2)$ e aproximando $p \simeq 3{,}14$.

37. a) $p\,(R^2 - r^2) = \text{p}\,(3^2 - 2^2) = \text{p}\,(9 - 4) = 5\text{p}$

Portanto:

$A_{\text{coroa circular}} = 15{,}7$ cm²

37. b) $\dfrac{\pi(5^2 - 1^2)}{2} = \dfrac{\pi(25 - 1)}{2} = \dfrac{24\pi}{2}$

Portanto, a área mede 37,68 cm².

38. $A_{\text{coroa circular}} = p\,(R^2 - r^2) = p\,(6^2 - 2^2) = p\,(36 - 4) = 32p$

Portanto:

$A_{\text{coroa circular}} = 100{,}\ 48$ cm²

41. a) Encontraremos, primeiro, a fração $\dfrac{1}{x}$ que esse arco representa no arco da circunferência:

$$C_{\text{setor}} = \frac{2\pi r}{x} \Rightarrow 10\text{p} = \frac{2\pi \cdot 15}{x} \Rightarrow x = 3$$

Logo, o arco, e portanto o ângulo, desse setor representa $\dfrac{1}{3}$ da circunferência: $a_c = \dfrac{360°}{3} = 120°$

41. b) Sendo $A_{\text{setor circular}}$ a medida procurada:

$$\frac{\pi \cdot r^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{\alpha} \Rightarrow \frac{\pi \cdot 15^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{120°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot A_{\text{setor circular}} = 225\pi \Rightarrow A_{\text{setor circular}} = 75\pi$$

Portanto, 75π cm².

42. Ao triplicar o raio r de uma circunferência, obtemos $3r$. Então, a medida de sua área será:

$A_{3r} = \pi(3r)^2 \Rightarrow A_{3r} = 9 \cdot \pi r^2$

Como $A_r = \pi r^2$, então $A_{3r} = 9 \cdot Ar$

Como $C_r = 2 \cdot \pi \cdot r$, temos: $C_{3r} = 2 \cdot \pi \cdot (3r) \Rightarrow C_{3r} = 3 \cdot 2\pi r \Rightarrow$ $\Rightarrow C_{3r} = 3 \cdot C_r$

Alternativa **c.**

43.
- **Figura 1:**

  $A_{\text{coroa circular}} = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow A = \pi(5^2 - 3^2) = 16 \cdot \pi \Rightarrow A_1 \simeq 50{,}24$

- **Figura 2:** $A_2 = A_{\text{círculo}} - A_{\text{triângulo}}$ e considerando $r = 3$ cm e altura h do triângulo como $h = 4{,}85$ cm, então:

  $A_2 = \pi \cdot 3^2 - \dfrac{2 \cdot 4{,}82}{2} \Rightarrow A_2 = 9\pi - 4{,}82 \Rightarrow A_2 \simeq 23{,}44$

- **Figura 3:** $A_3 = A_{\text{círculo}} - A_{\text{setor circular}}$

  Assim: $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 28{,}26$ e $\dfrac{\pi \cdot r^2}{A_{\text{setor circular}}} =$

  $$= \frac{360°}{\alpha} \Rightarrow \frac{\pi \cdot 3^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{60°} \Rightarrow A_{\text{setor circular}} = \frac{9\pi}{6} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow A_{\text{setor circular}} = 4{,}71$

  Logo: $A_3 = 28{,}26 - 4{,}71 = 23{,}55$

- **Figura 4:** $A_4 = A_{\text{quadrado}} - A_{\text{círculo}} \Rightarrow A_4 = 6^2 - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_4 = 23{,}44$

Então, as medidas são: figura 1: 50,24 cm², figura 2: 23,44 cm²; figura 3: 23,55 cm² e figura 4: 23,44 cm². As figuras 2 e 4 são equivalentes, pois têm a mesma medida de área.

45. A área que o cavalo não conseguirá alcançar será dada pela área de um quarto de quadrado subtraída da área do setor circular de raio medindo 40 metros e ângulo de medida 90°. Logo, a medida da área sendo A, então:

$$A = 50^2 - \frac{\pi \cdot 40^2}{4} \Rightarrow A = 2\,500 - 400p \Rightarrow A \simeq 2\,500 - 1\,256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1\,244$$

Alternativa **a**.

46. A medida do volume do recipiente cilíndrico é 942 cm³ (pois $\pi \cdot 5^2 \cdot 12 \simeq 3{,}14 \cdot 25 \cdot 12 = 942$).

Assim, o cone tem medida de volume igual a um terço de 942 cm³; portanto, 314 cm³.

47. A medida do volume do grão é cerca de 0,16 cm², pois $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}16$, enquanto o depósito tem medida de volume 160 000 cm², pois $40 \cdot 40 \cdot 100 = 160\,000$. Dessa maneira, cabem 1 000 000 grãos, pois $160\,000 : 0{,}16 = 1\,000\,000$. Alternativa **d**.

48. O triângulo da base é isósceles, pois tem dois lados de mesma medida 5 cm. Portanto, a altura do triângulo é cateto de um triângulo retângulo que tem um dos lados congruentes como hipotenusa e metade da base do triângulo isósceles como o outro cateto, então, tem medida 3 cm (pois 6 : 2 = 3). Dessa maneira, a medida *h* de sua altura é 4 cm, pois:

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Então, o volume dessa peça é 144 cm³, pois:

$$\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$$

Logo, a menor quantidade de madeira necessária é quando não há sobras, para produzir 10 peças são necessários 1 440 cm³ ($144 \cdot 10 = 1\,440$).

49. a) Como a forma do cesto pode ser associada a um cilindro com *r* = 21 cm e *h* = 45 cm, a medida de sua área de superfície pode ser calculada por:

$$A = \underbrace{(\pi \cdot r^2)}_{\text{área do fundo}} + \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot h}_{\text{área lateral}}\text{, então } A = \pi r \cdot (r + 2h) =$$

$$= 3{,}14 \cdot 21\,(21 + 2 \cdot 45) = 65{,}94 \cdot 111 = 7\,319{,}34$$

Portanto, a área é aproximadamente 7 319 cm².

49. b) O volume será: $(\pi r^2) \cdot h = 3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 45 = 3{,}14 \cdot 441 \cdot 45 = 62\,313{,}3$.

Portanto, o volume mede aproximadamente 62 313 cm³.

Pense mais um pouco...

Página 293

Note que apenas as figuras dos itens **c** e **d** podem ser sobrepostas de modo que partes verdes de uma e partes brancas de outra fiquem sobrepostas, pintando assim toda a região interna da circunferência maior. A medida da área verde em **c** e **d** são iguais e valem a metade da área da circunferência maior, de raio *r* = 3. Logo, a medida da área verde é, em cm²: $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$.

Página 294

As áreas procuradas são formadas por coroas circulares concêntricas. Sendo A_n a medida da área da coroa, contando a posição *n* de fora para dentro do alvo, em cada cor:

- Área da parte verde: usando a relação $A_{\text{coroa círcular}} = \pi(R^2 - r^2)$ e $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$ (para o círculo verde interno), teremos:

  $A_1 = \pi(70^2 - 60^2) \Rightarrow A_1 = 4\,082$

  $A_2 = \pi(50^2 - 40^2) \Rightarrow A_2 = 2\,826$

  $A_3 = \pi(30^2 - 20^2) \Rightarrow A_3 = 1\,570$

  $A_4 = 10^2\pi \Rightarrow A_4 = 314$

  Então, a área verde total mede 8 792 cm² (4 082 + 2 826 + 1 570 + 314).

- Área da parte amarela:

  $A_1 = \pi(80^2 - 70^2) \Rightarrow A_1 = 4\,710$

  $A_2 = \pi(60^2 - 50^2) \Rightarrow A_2 = 3\,454$

  $A_3 = \pi(40^2 - 30^2) \Rightarrow A_3 = 2\,198$

  $A_4 = \pi(20^2 - 10^2) \Rightarrow A_4 = 942$

  Então, a área amarela total mede 11 304 cm² (4 710 + 3 454 + 2 198 + 942).

Para saber mais

Página 292

Resposta pessoal a depender do número *n* de lados escolhidos pelos estudantes. Nas duas atividades espera-se que os estudantes obtenham polígonos congruentes.

Trabalhando a informação

Páginas 296 e 297

b) Basta fazer: 19,7 : 18, 4 = 1,07 = 1 + 0,07 = 100% + 7%
Então, o emprego menos qualificado era 7 por cento maior que o emprego mais qualificado

Exercícios complementares

1. A medida do raio da circunferência é 8 cm, pois $\ell = r\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow r = 8$. Então, o apótema mede $4\sqrt{2}$ cm pois: $a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

2. No hexágono regular inscrito na circunferência, temos $\ell = r$. Como o perímetro $2p = 42$ m, então $\ell = 7$ m, pois $2p = 6 \cdot \ell \Rightarrow 42 = 6\ell \Rightarrow \ell = 7$. Logo, $r = 7$ cm.

No quadrado inscrito, $\ell = r\sqrt{2}$; assim: $\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 7\sqrt{2}$

$2p = 4 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 28\sqrt{2}$

A medida do perímetro é $28\sqrt{2}$ m.

3. *BA* = *AF* e *BD* = *DF* pois os arcos são congruentes. Se $r = 7\sqrt{2}$, sabendo que os lados de um hexágono regular inscrito na circunferência mede $\ell = r = 7\sqrt{2}$ cm, então $BA = AF = 7\sqrt{2}$ cm.

Para descobrir *DF*, podemos traçar um triângulo *DEF*, isósceles com ângulo tal que $m(D\hat{E}F) = 120°$ (ângulos internos de um hexágono regular).

Usando a relação de seno de 60°, que é metade do ângulo $D\hat{E}F$, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{m(DF)}{2}}{m(EF)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{m(DF)}{2}}{7\sqrt{2}} \Rightarrow m(DF) = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

Perímetro de *ABDF*:

$2p = 2 \cdot 7\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2}\sqrt{3} \Rightarrow 2p = 14\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

Então, a medida do perímetro é $14\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm.

4. Como, em um triângulo equilátero inscrito, $\ell = r\sqrt{3}$, e $BC = 4\sqrt{3}$, então $r = 4$. Como AB é lado de um hexágono regular, onde $\ell = r$, conclui-se que $\ell = 4$, ou seja $AB = 4$. Como AD é lado de um quadrado inscrito, onde $\ell = r\sqrt{2}$, conclui-se que $\ell = 4\sqrt{2}$, ou seja: $AD = 4\sqrt{2}$.

5. Note que $DB = AC$ = medida do raio do círculo. Esta medida é dada por $AB + AE$, como $AB = DC$, então: $DB = DC + AE \Rightarrow DB = 8 + 2 = 10$
Portanto, 10 cm.

6. a) Como $CB = 4\sqrt{2}$ e $m\left(C\hat{O}B\right) = 90°$, podemos descobrir $OB = OC$ usando a relação dos senos, em que o cateto oposto é a metade da medida CB e a hipotenusa é o raio: $\text{sen } 45° = \frac{2\sqrt{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{r} \Rightarrow r = 4$
Portanto, 4 cm.

6. b) Como $m\left(B\hat{O}A\right) = 60°$ e $AO = OB = r$, então o triângulo é equilátero. Logo: $AB = AO = OB = r = 4$
Portanto, 4 cm.

6. c) Usando a relação de seno de 60°, que é metade do ângulo de 120°:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{DC}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{DC}{2}}{4} \Rightarrow DC = 4\sqrt{3}$$

Então, a medida é $4\sqrt{3}$ cm.

8. A medida do lado de um quadrado inscrito é dada por $\ell = r\sqrt{2}$, e como $r = \sqrt{2}$, então $\ell = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
A medida do perímetro do quadrado inscrito é 8 cm por que é dada por $2p_1 = 4\ell \Rightarrow 2p = 8$.
A medida do lado do quadrado circunscrito é dada por $\ell = m$(diâmetro do círculo), então $\ell = 2\sqrt{2}$
A medida do perímetro do quadrado circunscrito é dada por $2p_2 = 4\ell \Rightarrow 2p = 8\sqrt{2}$. A diferença entre as medidas dos perímetros é $8\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm, pois é dada por: $8\sqrt{2} - 8 = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)$

9. O lado do hexágono mede 12 cm.
Podemos encontrar a medida do raio do círculo fazendo:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 \Rightarrow r = 6\sqrt{3}$$

A medida da área do círculo é 108π cm², pois é dada por: $A_c = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow A_c = 108\pi$

10. a) Podemos estimar a medida da área azul escura da seguinte maneira: $A \simeq 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2}$, com $r \simeq 1$ cm, então $A \simeq 6$ cm², pois: $A = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} \Rightarrow A \simeq 6$

10. b) Como $= \pi \cdot r^2 \Rightarrow 6 = r^2\pi \Rightarrow r^2 \simeq 1{,}91 \Rightarrow r \simeq 1{,}38$
Portanto, o círculo terá raio medindo 1,38 cm.

11. Em vermelho, temos $\frac{3}{6}$ de uma coroa circular com raios tais que $R = 2$ e $r = 1$; e também $\frac{3}{6}$ de um círculo de raio medindo $r = 1$.

Como, para as coroas circulares, temos:
$A_{cc} = \pi(R^2 - r^2) = \pi(2^2 - 1^2) \Rightarrow m(A_{cc}) = 3\pi$
Então: $\frac{3}{6} \cdot 3\pi = 1{,}5\pi \simeq 4{,}71$

A medida da área do círculo é: $A_c = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_c = \pi$
Então: $\frac{3}{6} \cdot \pi \simeq 1{,}57$.

Adicionando as medidas das áreas: $A_t = 4{,}71 + 1{,}57 = 6{,}28$
A medida total da área procurada é de aproximadamente 6,28 cm².

12. a) Na "largura" da folha que mede 18 cm conseguimos desenhar 3 círculos de diâmetro medindo 6 cm. No comprimento da folha que mede 12 cm conseguiremos desenhar 2 círculos de diâmetro medindo 6 cm.
Portanto, 6 círculos: $3 \cdot 2 = 6$.

12. b) A medida da área do papel é 216 cm², pois $12 \cdot 18 = 216$. A medida de área dos círculos é 169,56 cm², pois $6 \cdot (\pi \cdot 3^3) \simeq 6 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 169{,}56$.
A medida de área que sobra depois de os círculos serem recortados é 46,44 cm², pois $216 - 169{,}56 = 46{,}44$.

13. A medida da área da placa é 80 cm², pois: $2\sqrt{10} = (2 \cdot 4) \cdot 10 = 80$. Os círculos, por serem tangentes aos lados da placa e tangentes entre si, têm raio medindo $r = \sqrt{10}$.
Então, a área circular recortada é cerca de 63 cm², pois:
$2 \cdot \left(\pi \cdot \left(\sqrt{10}\right)^2\right) \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$
Então, a área desperdiçada tem medida aproximada de 17 cm² (80 – 63 = 17).

14. a) Como a circunferência tangencia o lado da caixa quadrada, o diâmetro da circunferência tem a mesma medida que o lado da caixa, ou seja 3,6 cm. Logo, o raio mede 1,8 cm (3,6 : 2 = 1,8).

14. b) $V = 3{,}6^2 \cdot 20 = 12{,}96 \cdot 20$
Então, $V = 259{,}2$ cm².

14. c) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 1{,}8^2 \cdot 20 \simeq 3{,}14 \cdot 3{,}24 \cdot 20$
Então, $V \simeq 203{,}5$ cm³.

15. Em um hexágono regular inscrito, temos $\ell = r$. Como $r = 5$ cm, então $\ell = 5$ cm. Usando a fórmula para calcular a medida do apótema do hexágono inscrito: $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

O lado mede 5 cm e o apótema mede $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

Verificando

1. Em um quadrado inscrito, $\ell = r\sqrt{2}$, então se $r = 12$ cm, $\ell = 12\sqrt{2}$ cm. A medida da área do quadrado será: $A = \ell^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow A = 288$

Alternativa **b**.

2. O comprimento da circunferência é 157 m, então o raio mede 25 cm, pois: $C = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow 157 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow$ $\Rightarrow r = 25$

Em um triângulo equilátero inscrito, temos $a = \frac{r}{2}$, como o raio mede $r = 25$ m, então: $a = \frac{25}{2} \Rightarrow a = 12{,}5$.

Alternativa **c**.

3. Se a medida de área do círculo é 113,04 m², então:

$$A_{círculo} = \pi \cdot r^2 = 113{,}5 \Rightarrow r^2 = \frac{113{,}5}{3{,}14} \Rightarrow r^2 \simeq 36 \Rightarrow r \simeq 6$$

Alternativa **a**.

4. O lado de um hexágono regular é dado pela relação: $\ell = r$; já o apótema de um triângulo regular é dado por: $a = \frac{r}{2}$

Logo, a diferença entre a medida do lado do hexágono e a medida do apótema de um triângulo, ambos na mesma circunferência, em que o raio é o mesmo, é dada por:

$$r - \frac{r}{2} = \frac{2r}{2} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

Alternativa **b**.

5. $A_{coroa\ circular} = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 3^2) = \pi(25 - 9)$

Então: $A_{coroa\ circular} = 16\pi \simeq 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24$

Alternativa **c**.

6. A medida da área de qualquer polígono regular é dada por $A = p \cdot a$. E a relação entre as medidas do apótema e do lado de um hexágono regular é dada por $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ e também $\ell = r$. Assim, o semiperímetro necessário para a fórmula da área será dado por: $2p = 6\ell \Rightarrow 2p = 6r \Rightarrow$ $\Rightarrow p = 3r$

Substituindo, obtemos:

$$A = p \cdot a = 3r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$$

Alternativa **a**.

7. Primeiramente, obtemos a medida da área da base. Para isso, precisamos da medida do lado desse quadrado inscrito em uma circunferência. Sabemos que $\ell = r\sqrt{2}$, como $r = 4$ cm, então $\ell = 4\sqrt{2}$ cm. Assim:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Sendo h = medida da altura, que nesse caso vale 9 m, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 96$$

Alternativa **d**.

8. $V = \frac{1}{3} \cdot$ área da base $\cdot$ altura

A medida da base é $230^2 = 52\,900$ e a medida da altura é 146.

Assim: $V = \frac{1}{3} \cdot$ área da base $\cdot$ altura $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 146 \Rightarrow V \simeq 2\,574\,466{,}6$$

Logo, o volume é de aproximadamente 2,5 milhões de metros cúbicos.

Alternativa **d**.

9. A medida do volume do cone é dada por: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Com $r = 3$ cm e $h = 10$ cm.

Então, $V \simeq \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 10 \simeq \frac{1}{3} \cdot 282{,}6 \Rightarrow V \simeq 94{,}2$

Alternativa **b**.

Sugestão de avaliação diagnóstica

Atividade 1

(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

Devido ao movimento dos planetas, a distância entre eles está sempre variando. A menor distância entre a Terra e Marte é de $5{,}4 \cdot 10^{10}$ m. Sabendo que a luz percorre cerca de $3 \cdot 10^8$ metros a cada segundo, quanto tempo ela leva para percorrer a distância entre a Terra e Marte?

a) 180 segundos.

b) 18 minutos.

c) 180 minutos.

d) 1 800 segundos.

Resposta: Alternativa **a**.

Resolução e comentários

Esta atividade avalia se o estudante compreende a notação científica e consegue operar com potências de expoentes inteiros. Para resolver o problema eles precisam determinar quantas vezes a medida da distância percorrida pela luz em 1 segundo ($3 \cdot 10^8$ metros) cabe na medida da distância entre os dois planetas ($5{,}4 \cdot 10^{10}$ metros), ou seja, devem efetuar a divisão:

$$\frac{5{,}4 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^8} = \frac{5{,}4}{3} \cdot \frac{10^{10}}{10^8} = 1{,}8 \cdot 10^2 = 180$$

Um erro comum nesse tipo de cálculo é tentar dividir os expoentes.

A vantagem do uso da notação científica para resolver a atividade pode ser discutida com os estudantes, pois, caso eles preferissem transformar os números em sua forma convencional e realizar a divisão, é fácil perceber que a grande quantidade de algarismos pode levar a erros de contagem.

$$\frac{54\,000\,000\,000}{300\,000\,000} = 180$$

Atividade 2

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

A Alometria é uma área da Biologia que estuda o crescimento de partes dos seres vivos. As relações alométricas, em geral, envolvem potências de expoentes fracionários. Por exemplo, considere que a medida da área das asas, em metro quadrado, de determinada ave é dada por:

$$A_{asas} = 0{,}1 \cdot m^{\frac{2}{3}}$$

Nessa relação, m é a medida da massa da ave.

Então, se uma ave tem massa de medida 8 kg, qual é a medida da área de suas asas?

Resposta: A área das asas mede 0,4 m².

Resolução e comentários

Na resolução desta atividade, os estudantes devem compreender a relação entre as potências de expoentes fracionários e as raízes, assim como operar com os valores obtidos. Ao substituir a medida da massa na expressão dada, conclui-se que a área das asas da ave mede 0,4 m².

$A_{\text{asas}} = 0{,}1 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

$A_{\text{asas}} = 0{,}1 \cdot \sqrt[3]{8^2}$

$A_{\text{asas}} = 0{,}1 \cdot 4$

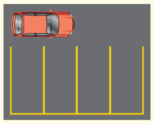
$A_{\text{asas}} = 0{,}4$

Ao realizar o cálculo da raiz cúbica, espera-se que os estudantes reconheçam que a ordem em que o cálculo é efetuado não importa, pois, se calcularem primeiro a raiz cúbica de 8, obtendo 2, e elevarem o resultado ao quadrado, obterão 4; se realizarem primeiro a potenciação 8^2, eles devem obter $\sqrt[3]{64}$, que também resulta em 4.

Atividade 3

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

O estacionamento de uma loja dispõe de 4 vagas para os clientes estacionarem seus carros. Se dois clientes chegarem sucessivamente e escolherem uma vaga cada um, de quantos modos diferentes eles podem ocupar as vagas do estacionamento?

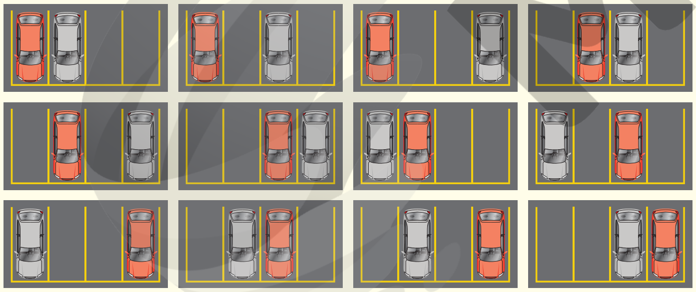


RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 12 modos diferentes.

Resolução e comentários

O problema apresentado envolve o uso do princípio multiplicativo da contagem. Nesse caso, espera-se que os estudantes reconheçam que o primeiro cliente tem 4 opções de escolha para a vaga que quer ocupar e que, qualquer que seja a vaga ocupada pelo primeiro cliente, para o próximo cliente existirão apenas 3 vagas disponíveis, de modo que o total de possibilidades de escolha das duas vagas é igual a 12 ($4 \cdot 3 = 12$). Um erro comum que pode ser cometido pelos estudantes é aplicar um raciocínio aditivo, pois podem ter dificuldades em aplicar o princípio multiplicativo. Para auxiliá-los, ao realizar a correção da atividade, mostre todas as combinações possíveis, nesse caso, apenas 12.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Na primeira fileira horizontal, o carro vermelho ocupa a primeira vaga à esquerda, deixando 3 opções para o carro branco, ou seja, para cada opção para o carro vermelho (4 possibilidades ao todo), há 3 opções disponíveis para o carro branco. Assim, a necessidade de aplicação do raciocínio multiplicativo é evidente na situação proposta.

Atividade 4

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Cláudia realizou o seguinte cálculo em sua calculadora:

$200 : 250 = 0{,}8$

Com base nesse cálculo, complete corretamente o enunciado do problema a seguir.

Laura foi a uma loja comprar um forno elétrico cujo preço era R$ 250,00, mas como nesse dia a loja fez uma promoção, o preço baixou para R$ 200,00. A fim de calcular o valor do desconto, Laura dividiu ______ por _____ obtendo _____. Isso significa que o preço atual corresponde a _____% do valor original, de modo que o desconto foi de ___%.

Resposta: 200; 250; 0,8 ; 80; 20.

Resolução e comentários

Quando os estudantes se deparam com esse tipo de problema, eles precisam mobilizar os conhecimentos sobre o significado das operações efetuadas dentro de um contexto. Com isso, esta atividade possibilita avaliar tanto a compreensão do processo de cálculo de porcentagem, como também a habilidade de interpretar e relacionar as informações entre si. O cálculo 200 : 250 representa a razão entre o valor atual e o valor original, ou seja, a fração do preço pago por Laura, 80% do preço original. Portanto, o desconto oferecido equivale a 20% (100% – 80% = 20%).

Atividade 5

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Gustavo fez uma divisão na calculadora e o resultado mostrado no visor foi 1,878787...

Obtenha um possível dividendo e um possível divisor digitados por Gustavo na calculadora.

Resposta: Um possível dividendo é 186 e um possível divisor é 99.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade é necessário compreender que obter os termos da divisão que resultaram em 1,878787… equivale a obter a fração geratriz de uma dízima periódica e aplicar o procedimento estudado para resolver o problema. Um modo de resolver o problema é identificar a dízima periódica como *x* e, depois, multiplicar ambos os lados da igualdade por 100, para, em seguida, subtrair membro a membro os valores obtidos.

$x = 1{,}878787...$

$100x = 187{,}878787...$

Subtraindo membro a membro, obtemos:

$99x = 186$

$x = \dfrac{186}{99}$

Ao discutir a resolução da atividade com os estudantes é importante verificar se eles compreendem que a potência de dez pela qual a igualdade inicial é multiplicada depende do número de casas decimais que a dízima deve ser deslocada de modo a repetir os mesmos algarismos na mesma sequência. No caso da dízima 1,878787…, se ela for multiplicada por 10, obtemos 18,787878…; assim, a subtração do valor original não tornaria a parte decimal nula. Portanto, ao multiplicar pela potência de 10 seguinte ($10^2 = 100$), a dízima torna-se 187,878787…

Atividade 6

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Considere uma sequência numérica cuja lei de formação é dada pela expressão $3x - 8$, em que x representa a posição de cada um dos termos. Por exemplo, x vale 1 para o primeiro termo, x vale 2 para o segundo termo, e assim por diante. Calcule a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor nessa sequência numérica.

Resposta: A diferença é 3.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes devem calcular o valor numérico da expressão algébrica $3x - 8$ para dois valores consecutivos de x e, depois, obter a diferença entre eles. É provável que escolham dois valores consecutivos de x para os quais o valor $3x - 8$ seja positivo.

Por exemplo, para $x = 3$, temos: $3 \cdot 3 - 8 = 1$

Para $x = 4$, temos: $3 \cdot 4 - 8 = 4$

Portanto, a diferença é igual a 3, pois $4 - 1 = 3$.

É possível que , durante a correção da atividade, os estudantes questionem o motivo pelo qual a diferença é sempre igual a 3, independente da escolha dos valores para x. Um modo de justificar o resultado é chamar a atenção para o fato de que -8 é um valor constante, de modo que a variação de um termo para outro consecutivo provém da multiplicação de x por 3; como a diferença entre os valores escolhidos para x é 1 unidade, ao ser multiplicada por 3, essa diferença resulta em $3 \cdot 1 = 3$.

Atividade 7

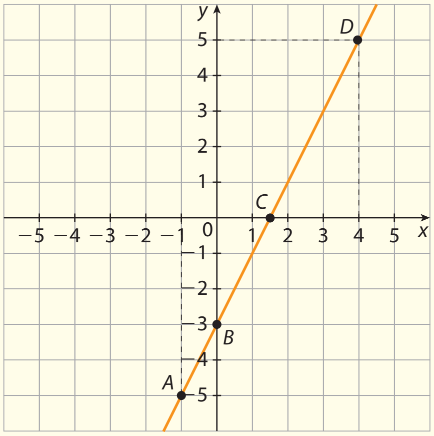
(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Complete o quadro a seguir com o valor de y associado a cada valor de x, de acordo com a expressão $y = 2x - 3$. Em seguida, localize os pontos (x, y) no plano cartesiano.

x	**$y = 2x - 3$**
–1	
0	
1,5	
4	

Resposta:

x	**$y = 2x - 3$**
–1	$y = 2 \cdot (\mathbf{-1}) - 3 = -5$
0	$y = 2 \cdot (\mathbf{0}) - 3 = -3$
1,5	$y = 2 \cdot (\mathbf{1,5}) - 3 = 0$
4	$y = 2 \cdot (\mathbf{4}) - 3 = 5$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é verificar se os estudantes conseguem calcular o valor numérico de uma expressão algébrica que depende de uma incógnita, obtendo, assim, os pares (x, y) no plano cartesiano. É esperado que os estudantes sejam capazes de verificar os resultados obtidos pela observação dos pontos do gráfico, os quais devem estar alinhados. A localização dos pontos $(0, -3)$ e $(1,5; 0)$, correspondentes à intersecção do gráfico com os eixos y e x, respectivamente, podem trazer maior dificuldade para alguns estudantes. Sugira que eles considerem as coordenadas x e y como deslocamentos sequenciais a partir da origem $(0, 0)$. Por exemplo, para localizar o ponto $(0, -3)$ desloca-se "0 unidade" ao longo do eixo x, ou seja, não há deslocamento; em seguida, desloca-se 3 unidades para baixo, ao longo do eixo y. No caso do ponto $(1,5; 0)$, desloca-se, a partir da origem, 1,5 unidade para a direita; depois, "0 unidade" ao longo do eixo y, ou seja, não há deslocamento vertical. A vantagem de pensar nas coordenadas como deslocamentos é que, por não haver intersecção de linhas a partir das coordenadas do ponto, a ocorrência de erros torna-se menos provável.

Atividade 8

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Em um jogo de basquete uma equipe fez um total de 47 pontos entre arremessos de 2 pontos e de 3 pontos, em um total de 20 arremessos. Quantos arremessos de 2 pontos e quantos de 3 pontos a equipe conseguiu?

Resposta: 13 arremessos de 2 pontos e 7 arremessos de 3 pontos.

Resolução e comentários

A resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas traz algumas dificuldades para os estudantes, como a interpretação e a tradução dos dados do problema para a linguagem algébrica e o uso de um método de resolução que envolve a manipulação de expressões algébricas. É possível que alguns estudantes abordem o problema por meio de quadros ou outro mecanismo que possibilite controlar a variação conjunta das respostas de acordo com as tentativas realizadas. Por exemplo, eles podem raciocinar que como os arremessos de 2 pontos resultam sempre em um total par, a quantidade de arremessos de 3 pontos tem de ser uma quantidade ímpar para que seja possível chegar a 47 pontos. Além disso, é necessário controlar a quantidade de arremessos, que deve ser igual a 20. A partir daí, eles podem fazer tentativas, como mostra o quadro a seguir.

Número de arremessos de 3 pontos	Número de arremessos de 2 pontos	Total de pontos
1	19	$1 \cdot 3 + 19 \cdot 2 = 41$
3	17	$3 \cdot 3 + 17 \cdot 2 = 43$
5	15	$5 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 45$

A cada acréscimo de 2 unidades na quantidade de arremessos de 3 pontos, os pontos obtidos aumentam 2 unidades; assim, para chegar a 47 pontos deve-se aumentar 2 pontos, chegando ao valor esperado. Portanto, foram 7 arremessos de 3 pontos e 13 arremessos de 2 pontos. Entretanto, é mais provável que a maioria dos estudantes utilize a tradução do problema para equações e, depois, aplique um dos métodos estudados (método da adição, método da substituição etc). Para isso, eles podem nomear a quantidade de arremessos de 2 pontos de x e os arremessos de 3 pontos de y; assim, como o total de arremessos é igual a 20, conclui-se que $x + y = 20$. Em seguida, a pontuação obtida em arremessos de 2 pontos é igual ao número desses arremessos que foram convertidos multiplicado por 2, ou seja, $2x$. Raciocínio similar possibilita concluir que o número de pontos obtidos com arremessos de 3 pontos é igual a $3y$ e, então, o total de pontos é igual à soma desses valores: $2x + 3y = 47$. Resolvendo o sistema de equações pelo método da substituição, temos:

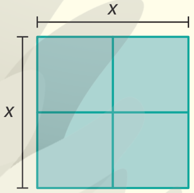
$$y = 20 - x \Rightarrow 2x + 3(20 - x) = 47 \Rightarrow 2x + 60 - 3x = 47 \Rightarrow x = 13$$

Portanto: $y = 7$

Atividade 9

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Quantos metros mede o lado de um terreno de 196 m² de área formado por 4 quadrados menores congruentes, como mostra a figura?



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 14 metros.

Resolução e comentários

Esta atividade avalia a habilidade dos estudantes de traduzir um problema envolvendo a área de um quadrado em uma equação de 2º grau incompleta, resolvê-la e selecionar a resposta que se adapta ao contexto do problema. Um modo de resolver o problema é considerar que a medida da área de cada um dos quadrados é dada por x^2. Como eles são em quatro, a medida da área total é dada por $4x^2$. Igualando a expressão para a medida da área total do terreno ao valor dado no enunciado, temos: $4x^2 = 196$

Para resolver a equação, pode-se aplicar o princípio multiplicativo das igualdades e multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{4}$, ou seja:

$$\frac{1}{4} \cdot 4x^2 = 196 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$$

O problema envolve a medida da área de um terreno; portanto, a solução $x = -7$ é desconsiderada. Como o lado do terreno mede $2x$, a resposta é 14 metros.

Outra possibilidade é que os estudantes considerem a medida $2x$ para o lado do terreno e façam $(2x)^2 = 196$, obtendo $4x^2 = 196$, como na estratégia anterior.

Atividade 10

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

Obtenha o número de quadradinhos azuis da 20ª figura da sequência ilustrada a seguir.

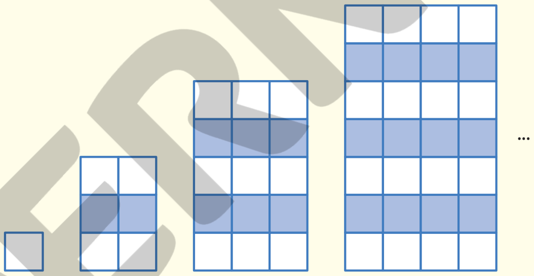


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 380 quadradinhos azuis.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes precisam reconhecer a regularidade que envolve o número de fileiras com quadradinhos azuis em cada figura e, também, a quantidade desses quadradinhos em cada uma dessas fileiras. É possível que eles organizem as informações de um modo similar ao mostrado no quadro a seguir.

Número da figura	Número de fileiras de quadradinhos azuis	Número de quadradinhos azuis em cada fileira	Total de quadradinhos azuis
2	1	2	$1 \cdot \mathbf{2} = 2$
3	2	3	$2 \cdot \mathbf{3} = 6$
4	3	4	$3 \cdot \mathbf{4} = 6$

Com base nos dados organizados dessa ou de outra forma similar, os estudantes podem reconhecer que para uma figura de número n há $(n - 1)$ fileiras com n quadradinhos azuis em cada uma. Assim, na 20ª figura, haverá 380 quadradinhos azuis ($19 \cdot 20 = 380$).

Atividade 11

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

As figuras a seguir foram construídas desenhando-se segmentos de reta de acordo com uma regularidade. Indique a alternativa que representa a regularidade que possibilita obter um termo da sequência recursiva a partir do segundo termo.


Figura 1

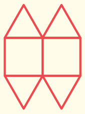


Figura 2

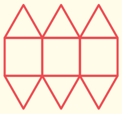


Figura 3

a) Multiplicar por 2 o termo anterior.
b) Adicionar 7 unidades ao termo anterior.
c) Multiplicar por 7 o termo anterior e, depois, subtrair 1.
d) Elevar ao quadrado o termo anterior e subtrair 1.

Resposta: Alternativa **b**.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução e comentários

Espera-se que os estudantes reconheçam que , ao construir cada nova figura, apenas 7 novos segmentos são acrescentados. Apesar da sequência ser expressa por meio de recursividade, também seria possível obter uma lei de formação não recursiva de seus termos.

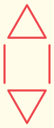


Figura 1

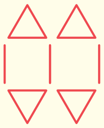


Figura 2

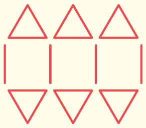


Figura 3

Número da figura	Número de triângulos	Número de segmentos verticais	Total de segmentos
1	2	2	$(2 \cdot 3) + 2 = 8$
2	4	3	$(4 \cdot 3) + 3 = 15$
3	6	4	$(6 \cdot 3) + 4 = 22$
n	$2n$	$n + 1$	$(2n \cdot 3) + (n + 1) = 7n + 1$

Portanto, a lei de formação para a enésima figura é dada por $7n + 1$.

Atividade 12

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

Um automóvel gastou 35 litros de combustível para fazer uma viagem de 280 km. Considerando o mesmo consumo de combustível, quantos quilômetros ele percorrerá dispondo de 28 litros?

Resposta: 224 km

Resolução e comentários

Para resolver esta atividade, os estudantes precisam compreender que a relação entre as duas grandezas é de proporcionalidade direta, pois, ao diminuir a quantidade de combustível, a distância percorrida pelo veículo diminuirá de modo proporcional. Assim, a medida da distância (d) está relacionada à medida do volume de combustível (V) por um fator constante k, tal que:

$$d = k \cdot V$$

Substituindo os valores de d por 280 e o de V por 35, obtém-se:

$$k \cdot 35 = 280 \Rightarrow k = \frac{280}{35} = 8$$

Assim, podemos substituir a constante k por seu valor numérico 8.

$$d = 8 \cdot V$$

Observe que o valor obtido para a constante k corresponde à quantidade de quilômetros percorridos por litro de combustível, denominado coeficiente de proporcionalidade, pois estabelece a relação entre as duas grandezas. Assim, para determinar a distância percorrida com 28 litros de combustível, basta substituir V por seu valor numérico 28.

$$d = 8 \cdot 28 = 224$$

Portanto, o veículo percorrerá 224 km.

Durante a correção da atividade com os estudantes, enfatize a importância de compreender o significado da relação observada entre as grandezas nessa situação. O uso de métodos práticos, como a regra de três, tende a tornar a resolução mecanizada e desprovida de significado, fazendo com que, por vezes, um erro cometido não seja percebido, pois a compreensão da situação foi prejudicada pela execução de procedimentos de cálculo sem o acompanhamento da necessária reflexão.

Atividade 13

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Quatro torneiras iguais enchem um reservatório em 6 horas. Se for retirada uma torneira, em quanto tempo as torneiras restantes realizam a mesma tarefa?

Resposta: 8 horas.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar a habilidade do estudante em identificar a relação de proporcionalidade envolvida no problema e o emprego de estratégias que possibilitem chegar à sua solução. Um modo é reconhecer que a relação entre as grandezas número de torneiras n e tempo t é de proporcionalidade inversa e, assim, o produto delas é um valor constante k.

$$n \cdot t = k$$

Substituindo os valores $n = 4$ e $t = 6$ na relação, obtém-se $k = 24$.

O tempo t, em hora, em que 3 torneiras preenchem o reservatório será dado por:

$$3 \cdot t = k \Rightarrow 3 \cdot t = 24 \Rightarrow t = 8$$

Ainda que os estudantes não tenham se apropriado da relação existente entre duas grandezas inversamente proporcionais, eles podem resolver o problema de outras maneiras. Por exemplo, se 4 torneiras enchem o reservatório em 6 horas, então, em 1 hora, as mesmas 4 torneiras encherão $\frac{1}{6}$ dele. Então, cada uma das 4 torneiras terá sido responsável por preencher, em 1 hora, $\frac{1}{4}$ dessa fração, ou seja, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ do reservatório. Como essas 24 partes do reservatório serão preenchidas por 3 torneiras, essas torneiras restantes realizam a mesma tarefa em 8 horas ($24 : 3 = 8$).

Atividade 14

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Com base nessa informação, foi realizada a demonstração de que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Acompanhe a demonstração e, depois, indique a alternativa que completa corretamente as etapas que faltam.

Considerando um paralelogramo *ABCD*, traça-se a diagonal $\overline{BD}$.

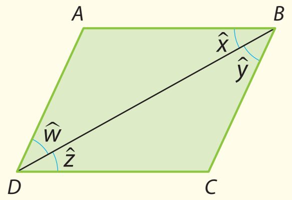
Como os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e cortados pela reta transversal que passa por $\overline{BD}$, pode-se concluir que $x = z$, pois eles são ângulos ________________.

Assim, $y = w$, pois formam um par de ângulos ______________.

O lado $\overline{BD}$ é comum aos triângulos *ABD* e *CDB*.

Comparando os triângulos *ABD* e *CDB*, eles são congruentes, devido ao critério _____ de congruência de triângulos.

Conclui-se, portanto, que $AB =$ ___ e $AD =$ __.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) alternos internos; alternos internos; ALA; *CD*; *BC*

b) correspondentes; correspondentes; LAL; *CD*; *BC*

c) alternos internos; alternos internos; LLL; *CD*; *BC*

d) opostos pelo vértice; opostos pelo vértice; LAL; *CD*; *BC*

Resposta: Alternativa **a**.

Resolução e comentários

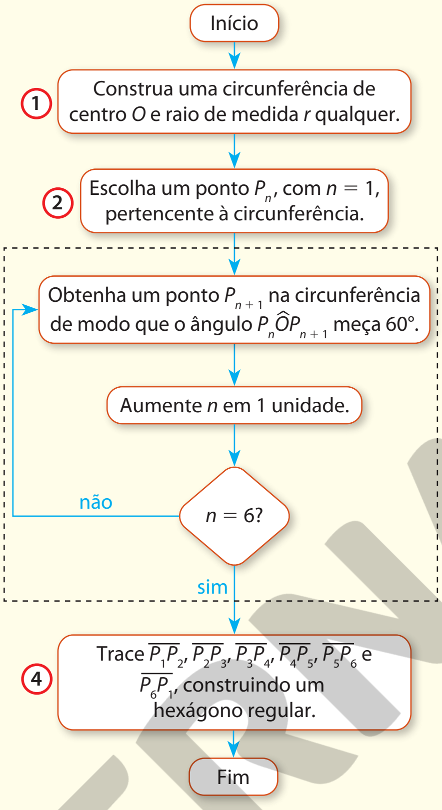
Para responder a esta atividade, os estudantes devem acompanhar a sequência de passos da demonstração e, com base nas informações apresentadas, selecionar a alternativa que dê significado ao encadeamento das etapas. As duas primeiras respostas exigem que os estudantes identifiquem a nomenclatura dos ângulos, no caso, cada um dos pares são alternos internos; depois, o critério de congruência associado à situação é o ângulo-lado-ângulo, pois o lado comum $\overline{BD}$ está entre os dois ângulos $\hat{x}$ e $\hat{w}$ que são respectivamente congruentes a $\hat{z}$ e $\hat{y}$. Ao final da demonstração, eles devem reconhecer que $AB = CD$ e $AD = BC$, ou seja, os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Atividade 15

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

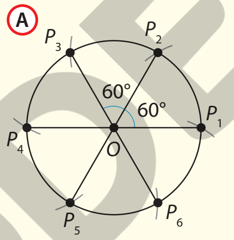
(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

O fluxograma a seguir mostra como construir um hexágono regular a partir da medida de seu raio. Associe cada bloco de instrução numerado de 1 a 4 a cada uma das 4 etapas da construção: A, B, C e D.

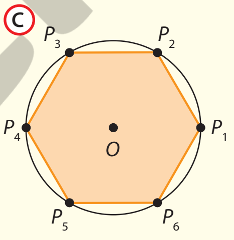


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

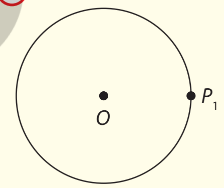
A



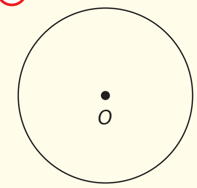
C



B



D



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 1 – D, 2 – B, 3 – A, 4 – C.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível verificar a habilidade dos estudantes em reconhecer as diferentes etapas de um fluxograma que mostra como construir um hexágono regular. Espera-se que os estudantes compreendam que o algoritmo sugere que se construa uma circunferência e, para obter os vértices do hexágono, eles devem manter o mesmo espaçamento entre os pontos, o que pode ser obtido fazendo 360° : 6 = 60°. Assim, são construídos ângulos consecutivos de 60° de modo a obter todos os 6 vértices, daí a presença do bloco de tomada de decisão, que tem por objetivo indicar quando o procedimento de construção dos ângulos deve ser encerrado.

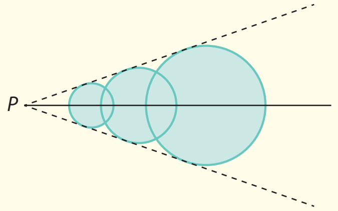
Nos anos posteriores, os estudantes aprenderão que em um hexágono regular a medida do lado é igual à do raio da circunferência em que ele está inscrito, de modo que outro modo de fazer a construção seria marcar um ponto inicial na circunferência e, com o compasso com abertura igual à medida do raio, fazer marcas sucessivas sobre a circunferência, obtendo os 6 vértices.

Atividade 16

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Leia as situações descritas a seguir.

Ana quer desenhar uma sequência de circunferências decorativas que tocam cada uma das duas linhas tracejadas em um único ponto, como mostra a figura a seguir. Ela quer obter a linha que parte do ponto *P* e contém os centros das circunferências.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Murilo quer encontrar o ponto no mapa que está à mesma distância dos municípios paraibanos de Campina Grande, Barra de Santa Rosa e Boa Vista.

Municípios paraibanos de Campina Grande, Barra de Santa Rosa e Boa Vista

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Mapa elaborado com base em: FERREIRA, Graça Maria Lemos. **Atlas geográfico**: espaço mundial. 5. ed. rev. e atual. São Paulo: Moderna, 2019.

As construções geométricas que devem ser utilizadas para que Ana e Murilo resolvam seus problemas, são, respectivamente:

a) mediatriz e bissetriz.

b) mediatriz e mediatriz.

c) bissetriz e bissetriz.

d) bissetriz e mediatriz.

Resposta: Alternativa **d**.

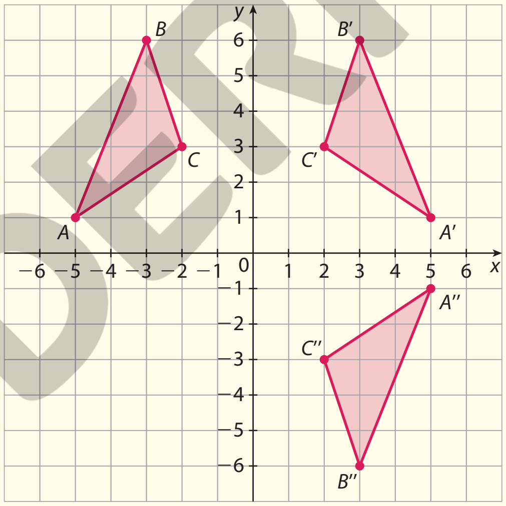
Resolução e comentários

Esta atividade avalia se os estudantes compreendem as propriedades que caracterizam a bissetriz de um ângulo e a mediatriz de um segmento, para que eles associem as situações-problema apresentadas ao uso de cada uma dessas construções geométricas. Como cada ponto da bissetriz está à mesma distância dos lados do ângulo bissectado, essa construção possibilita a obtenção da linha que contém os centros das circunferências de Ana. No caso do problema de Murilo, como cada ponto da reta mediatriz de um segmento é equidistante das suas extremidades (os pontos correspondentes a cada município), a intersecção das mediatrizes de dois segmentos, por exemplo, Boa Vista – Campina Grande e Boa Vista – Barra de Santa Rosa, estará equidistante dos 3 pontos. É importante observar se o fato de ambas as construções, bissetriz e mediatriz, envolverem a ideia de equidistância não causa confusão de seus significados, pois em uma delas a equidistância é em relação a duas retas concorrentes (a bissetriz) e na outra a equidistância é em relação a pontos (a mediatriz).

Atividade 17

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Na figura a seguir é possível observar a reflexão do triângulo *ABC* em relação ao eixo *y* , obtendo-se o triângulo *A'B'C',* o qual, por sua vez, também sofre reflexão em relação ao eixo *x*, resultando no triângulo *A''B''C''*.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A transformação que poderia substituir as duas reflexões levando *ABC* em *A''B''C''* é:

a) uma reflexão de *ABC* em relação à mediatriz do lado $\overline{BC}$.

b) uma translação que leva *ABC* diretamente a *A''B''C''*.

c) uma rotação de 180° em relação ao ponto (0, 0).

d) uma rotação de 90° no sentido horário em relação ao ponto *A*.

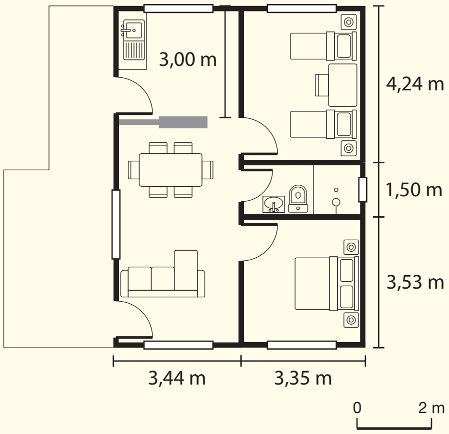
Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes devem compreender diferentes transformações geométricas para relacionar a figura final e a figura inicial, de modo a reconhecer qual foi a transformação equivalente a duas reflexões em relação aos eixos coordenados. Espera-se que eles verifiquem que a translação pode ser entendida como um "deslizamento" ao longo de uma direção, em que a orientação da figura não é alterada. Por esse motivo, não é possível que o ponto *C*, ao ser transladado (*C''*) fique à esquerda de *A''* e *B''*. A reflexão mencionada na alternativa **a** também não levaria o triângulo *ABC* à posição ocupada por *A''B''C''*, de modo que restam as alternativas que consideram uma rotação em torno de um centro. Como os estudantes estudaram o conceito de giro de 180°, espera-se que eles reconheçam que essa é a alternativa correta.

Atividade 18

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Qual alternativa apresenta a melhor aproximação para a medida da área da sala da casa representada na planta baixa? Desconsidere a espessura das paredes.

a) 17 m^2

b) 22 m^2

c) 32 m^2

d) 40 m^2

Resposta: Alternativa **b**.

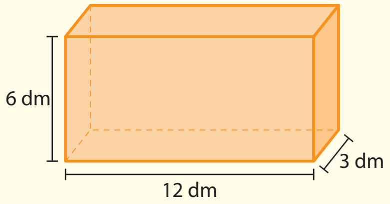
Resolução e comentários

A situação apresentada na atividade envolve o cálculo da medida da área de um cômodo de uma residência em uma planta baixa, em que o estudante tem de interpretar os dados fornecidos a fim de obter uma medida desconhecida e realizar o cálculo corretamente. É importante abordar questões desse tipo para que os estudantes reconheçam que, em situações reais, nem sempre todas as medidas são fornecidas diretamente, e que algumas delas devem ser obtidas a partir de outras. No caso desta atividade, para calcular a medida da área é preciso conhecer a medida do comprimento total da sala, mas a figura mostra apenas uma parte, que corresponde, em metro, a $3{,}53 +$ $+ 1{,}50 = 5{,}03$. A parte que falta pode ser obtida calculando a diferença $4{,}24 - 3{,}00 = 1{,}24$ e adicionando-a ao valor parcial obtido anteriormente: $5{,}03 + 1{,}24 = 6{,}27$. Assim, a área da sala mede aproximadamente 21,57 m^2 ($6{,}27 \cdot 3{,}44 \simeq 21{,}57$). Portanto, a alternativa **b** é a que apresenta o valor mais próximo de 21,57 m^2.

Atividade 19

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

Uma cisterna, inicialmente vazia, tem formato de bloco retangular e suas medidas, em decímetro, estão indicadas na figura a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Se, nessa cisterna, uma torneira despeja 8 litros de água a cada minuto, em quanto tempo a cisterna ficará cheia?

Resposta: 27 minutos.

Resolução e comentários

Para resolver a atividade os estudantes devem saber como obter a medida do volume de um bloco retangular e conhecer a relação de conversão entre a unidade de medida de volume; 1 $dm^3 = 1$ L. Como as medidas da cisterna estão em decímetro, ao multiplicar as medidas de comprimento, largura e altura, o resultado será em decímetro cúbico. Assim: $6 \cdot 12 \cdot 3 = 216$.

Como a torneira tem vazão de 8 litros por minuto, para determinar o tempo necessário para encher a cisterna vazia, basta fazer $216 : 8 = 27$. Portanto, a cisterna ficará cheia em 27 minutos.

Atividade 20

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Em alguns países de clima seco, os habitantes utilizam a superfície de uma laje de formato retangular sobre a residência para coletar e armazenar a água da chuva. Se essa laje tiver 5 m de comprimento por 3 m de largura e recolher água da chuva até a altura de 8 cm, quantos litros de água serão coletados?

Resposta: 1 200 litros.

Resolução e comentários

Nesta atividade, os estudantes devem calcular a medida da capacidade de um recipiente com formato de um bloco retangular, em metro cúbico, e converter essa medida em litro, atribuindo, assim, significado à quantidade calculada de água coletada da chuva. Antes de iniciar o cálculo, é importante que eles reconheçam a necessidade de converter a medida 8 cm para metro, ou seja, 0,08 m. Como a medida do volume, em m^3, é 1,2 m^3 ($5 \cdot 3 \cdot 0{,}08 = 1{,}2$), com base na relação 1 $m^3 = 1\,000$ L, pode-se concluir que serão coletados 1 200 litros de água. Ao discutir a resolução da atividade com os estudantes, comente que em uma área relativamente pequena de uma residência é possível coletar uma quantidade significativa de água, o que possibilita que eles percebam o potencial para a coleta de água em áreas maiores. Para contextualizar as informações, comente que, de acordo com os meteorologistas, se no período de 1 hora a água da chuva atingir de 0,5 cm a 6 cm de altura, a chuva é considerada forte, o que corresponde aos dados dessa atividade.

Atividade 21

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Em uma loja de chocolates, se o cliente gasta pelo menos R$ 30,00 em compras, ele ganha uma caixa que contém 4 bombons com recheios de morango, coco, cereja e abacaxi. O cliente, então, diz quais são seus dois sabores preferidos, em ordem de preferência, e pega, ao acaso, 2 bombons da caixa, um de cada vez; se os bombons sorteados forem os de sua preferência, nessa ordem, ele ganha outra caixa de bombons. Qual é a probabilidade de o cliente ganhar a segunda caixa de bombons?

Resposta: $\frac{1}{12}$

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes podem construir o espaço amostral indicando as possíveis escolhas de dois sabores (1º sabor preferido, 2º sabor preferido) e, em seguida, indicar a probabilidade por meio da fração correspondente.

Resultados possíveis: {(morango, coco), (morango, cereja), (morango, abacaxi), (coco, morango), (coco, cereja), (coco, abacaxi), (cereja, morango), (cereja, coco), (cereja, abacaxi), (abacaxi, morango), (abacaxi, coco), (abacaxi, cereja)}.

Como há 12 diferentes possibilidades e somente 1 delas corresponde àquela do cliente, a probabilidade é igual a $\frac{1}{12}$. Outra maneira para a determinação da quantidade de elementos do espaço amostral é aplicar o princípio multiplicativo. Existem 4 possíveis escolhas para o 1º sabor preferido e somente 3 outras opções para o 2º sabor, de modo que o total de elementos é $4 \cdot 3 = 12$.

Atividade 22

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Considere as três diferentes situações em que os dados foram coletados e, em seguida, serão apresentados na forma de um gráfico.

- **I.** Acompanhamento mensal do número de vagas de trabalho oferecidas em um município.
- **II.** Valores percentuais dos tipos de doenças que mais causam internações em um hospital.
- **III.** Quantidade de estudantes de uma turma que preferem cada tipo de gênero musical.

O gráfico mais adequado para representar os dados dessas situações são, respectivamente:

- **a)** gráfico de barras verticais; gráfico de setores; gráfico de linha.
- **b)** gráfico de barras verticais; gráfico de linha; gráfico de setores.
- **c)** gráfico de linha; gráfico de setores; gráfico de barras verticais.
- **d)** gráfico de linha; gráfico de barras verticais; gráfico de setores.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Apesar de não haver a obrigatoriedade do uso de cada tipo de gráfico em determinadas situações, é possível reconhecer a adequação de cada um deles para a representação dos dados. A situação **I** apresenta dados em uma sequência temporal, para a qual é importante reconhecer as tendências em cada período ao qual os dados se referem; assim, o gráfico de linha é a escolha que possibilita realçar os indicativos de crescimento, decrescimento ou estabilidade da variação de acordo com a inclinação dos segmentos que compõem o gráfico. Na situação **II** é importante que o gráfico favoreça não apenas os valores percentuais, mas também cada um dos valores em relação ao todo e, nesse caso, o gráfico de setores é o mais adequado.

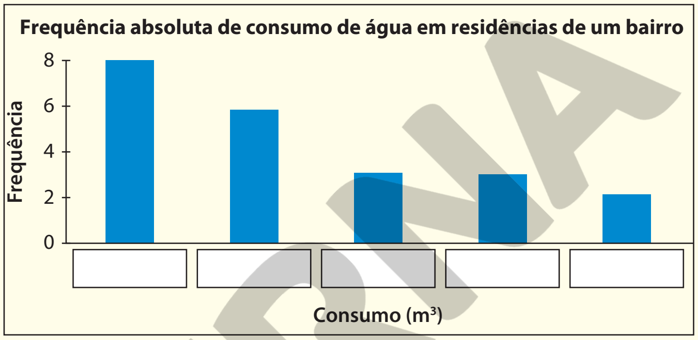
Atividade 23

(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.

Uma pesquisa sobre o consumo médio de água nos últimos 12 meses, em metro cúbico, realizada com 22 residências de um mesmo bairro apresentou os seguintes resultados.

12,3	20,4	14,5	16,5	20,8	13,8	16,7	34,5
25,6	34,3	17,9	12,4	28,0	19,9	28,6	
21,2	26,6	30,1	15,3	24,7	17,6	16,3	

O gráfico a seguir indica a frequência absoluta de consumo, o qual foi dividido em 5 faixas. Complete o gráfico com os dados que faltam.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados fictícios.

Resposta: 12,0 – 16,9; 17,0 – 21,9; 22,0 – 26,9; 27,0 – 31,9; ≥ 32,0

Resolução e comentários

Nesta atividade é avaliada a habilidade dos estudantes em agrupar dados contínuos em uma quantidade adequada de categorias de modo que não haja um grande número de categorias que dificultem a compreensão do panorama geral mostrado pelos dados nem em quantidade muito pequena que agrupe um excesso de dados em uma mesma categoria. Não há um critério adotado universalmente para essa escolha, mas uma possibilidade é tomar a amplitude total, no caso, $34,5 - 12,3 = 22,2$, e obter o valor inteiro mais próximo da raiz quadrada da amplitude, no caso, aproximadamente 5. Assim, agrupam-se os dados em 5 categorias. Os intervalos correspondentes poderiam ser:

Consumo (m³)	Frequência
12,0 – 16,9	8
17,0 – 21,9	6
22,0 – 26,9	3
27,0 – 31,9	3
≥ 32,0	2

Ao verificar as respostas dos estudantes, observe se eles realizaram a contagem dos elementos corretamente, adicionando as frequências absolutas e conferindo se a amplitude de cada uma das categorias é igual à amplitude das demais.

Atividade 24

(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Uma equipe de futebol quer contratar um atacante e, para isso, analisou o número de gols que cada um fez ao longo das últimas oito partidas.

Jogador	Gols em cada uma das últimas oito partidas							
João	0	2	1	3	3	1	4	2
Ricardo	1	1	0	5	4	3	0	2

Com base nesses dados é possível concluir que:

a) os dois jogadores têm a mesma média de gols por jogo, mas o desempenho de João é mais regular do que o de Ricardo, cujo número de gols marcados tem maior oscilação.

b) a média de gols de João é maior do que a de Ricardo e, por esse motivo, seu desempenho pode ser considerado o melhor entre os dois.

c) a média de gols de Ricardo é maior do que a de João e, por esse motivo, seu desempenho pode ser considerado o melhor entre os dois.

d) os dois jogadores têm a mesma média de gols por jogo, mas o desempenho de Ricardo é mais regular do que o de João, cujo número de gols marcados oscilou mais ao longo das partidas.

e) não é possível calcular a média de gols dos jogadores porque cada um deles tem jogos nos quais não marcaram gols.

Resposta: Alternativa **a**.

Resolução e comentários

Esta atividade avalia a compreensão dos estudantes sobre o cálculo da média aritmética e a interpretação informal de dados que mostram a mesma média aritmética, mas diferentes variações dos dados. É esperado que os estudantes calculem corretamente a média aritmética e, ao se depararem com o mesmo valor, analisem o conjunto de dados em cada caso e observem que o número de gols de João está mais bem distribuído ao longo dos jogos do que os de Ricardo, que concentra muitos gols em poucas partidas. Apesar de os estudantes não estudarem as fórmulas para o cálculo de indicadores de variabilidade, é possível que eles reconheçam a maior variabilidade de Ricardo com base em uma rápida inspeção dos números. Ao discutir a resolução da atividade com os estudantes, sugira que eles desenhem uma reta numérica para cada um dos jogadores e marquem nela 16 pontos correspondentes aos gols que cada jogador marcou nas últimas partidas, para que percebam visualmente a maior dispersão dos pontos no caso de Ricardo.

Atividade 25

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

Analise as situações descritas a seguir.

I. A Polícia Rodoviária quer saber se os veículos que trafegam sentido litoral na rodovia estão com todos os itens de segurança em condições satisfatórias.

II. Pesquisa para atualizar os dados dos moradores de um condomínio de prédios.

III. Pesquisa sobre a idade do público de um *show* de música realizado em um estádio de futebol.

O tipo mais adequado de pesquisa a ser adotado para cada situação apresentada é, respectivamente:

a) censitária; censitária; amostral.

b) amostral; amostral; censitária.

c) amostral; censitária; amostral.

d) censitária; amostral; censitárias.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Espera-se que os estudantes reconheçam que, em alguns casos, apesar de sua realização não ser impossível, uma pesquisa censitária pode ser dispendiosa em termos de recursos e tempo; assim, a melhor opção é uma pesquisa amostral. No caso da situação **I**, uma abordagem policial para verificar todos os carros que trafegam em uma rodovia exigiria a interrupção de todo o tráfego; portanto, a pesquisa amostral é mais adequada. No caso da situação **II**, a atualização de dados cadastrais pressupõe a coleta de informações sobre todos os moradores do condomínio, de modo que deve ser realizada uma pesquisa censitária. No caso da situação **III**, o fato de haver milhares de pessoas em um *show* de música torna a escolha de uma amostra do público presente a melhor.

Edwaldo Bianchini
Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto,
da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo,
no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI

9º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Roberta Stoppe
Preparação de texto: Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Serpentine Pavilion, 2017; Kensington Gardens, Londres, Inglaterra. Desde novembro de 2017 a obra integra o acervo da ILHAM Gallery em Kuala Lumpur, Malásia.
© Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Foto: Jim Stephenson.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade, Junior Rozzo
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

```
    Bianchini, Edwaldo
       Matemática Bianchini : 9º ano / Edwaldo
    Bianchini. -- 10. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

       Componente curricular: Matemática.
       ISBN 978-85-16-13574-4

       1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-115272                                CDD-372.7
```

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

O Pavilhão Serpentine, em Londres (Reino Unido), é um espaço dedicado à instalação de uma obra arquitetônica temporária. Em 2017, o arquiteto escolhido para a exposição foi Diébédo Francis Kéré. Sua obra, uma estrutura suspensa de aço coberta por um material transparente, foi inspirada em uma grande árvore de sua cidade natal, em Burkina Fasso, e no sentido de comunidade e de conexão com a natureza de seu povo.

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem.

Para tornar mais simples o entendimento, a teoria é apresentada por meio de situações cotidianas. Assim, você vai notar quanto a Matemática faz parte do nosso dia a dia e nos possibilita compreender melhor o mundo que nos rodeia.

Por isso, aproveite ao máximo todo o conhecimento que este livro pode lhe oferecer. Afinal, ele foi feito especialmente para você!

Faça dele um parceiro em sua vida escolar!

O autor

CARBALLO/SHUTTERSTOCK

CONHEÇA SEU LIVRO

Seu livro está organizado em 12 capítulos. A estrutura de cada capítulo é muito simples e possibilita localizar com facilidade os assuntos estudados, os exercícios e as seções enriquecedoras. Observe a seguir.

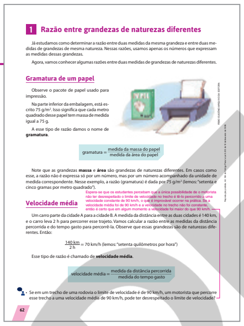
Página de abertura

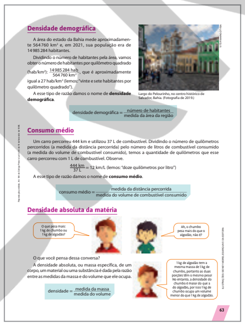
O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.


Capítulo 12 Polígonos regulares e áreas

Apresentação dos conteúdos

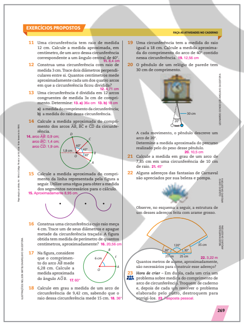
Os conteúdos são apresentados em linguagem clara e objetiva e acompanhados de exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados.

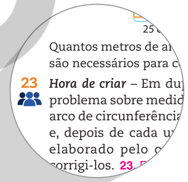

1 Razão entre grandezas de naturezas diferentes


Densidade demográfica

Exercícios

O livro traz exercícios variados, organizados após os conteúdos na seção **Exercícios Propostos** e, ao final de cada capítulo, na seção **Exercícios Complementares**.

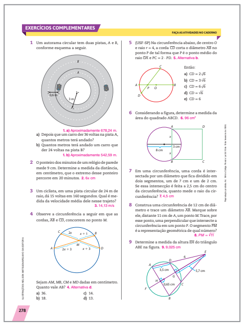

EXERCÍCIOS PROPOSTOS


25

Quantos metros de a
são necessários para c

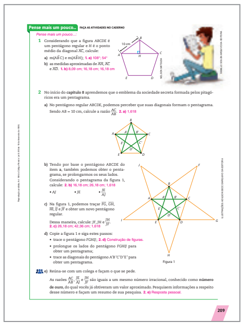
23 *Hora de criar* – Em du
problema sobre medi
arco de circunferênci
e, depois de cada u
elaborado pelo c
corrigi-los. 23.

Hora de criar – Atividades em que você elabora um problema com base no assunto estudado.


EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

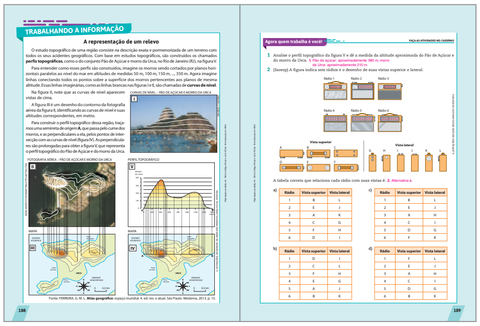
Pense mais um pouco...

Propõe atividades desafiadoras que possibilitam aprofundar conteúdos ao longo do capítulo.



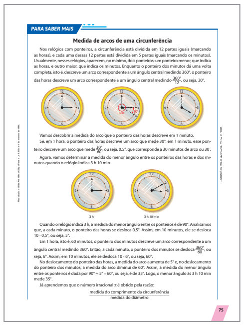
Trabalhando a informação

Esta seção possibilita que você trabalhe com informações apresentadas em diferentes linguagens.



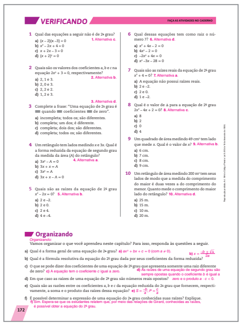
Para saber mais

É uma seção que traz textos sobre Geometria e História da Matemática para enriquecer e explorar diversos conteúdos matemáticos estudados.



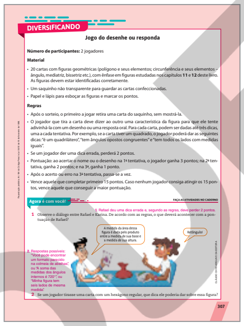
Verificando

Nesta seção, você poderá avaliar seu aprendizado e organizar seu conhecimento sobre o que foi estudado em cada capítulo.



Diversificando

Esta seção oferece a você a oportunidade de entrar em contato com temas variados, em diferentes contextos e áreas do saber.

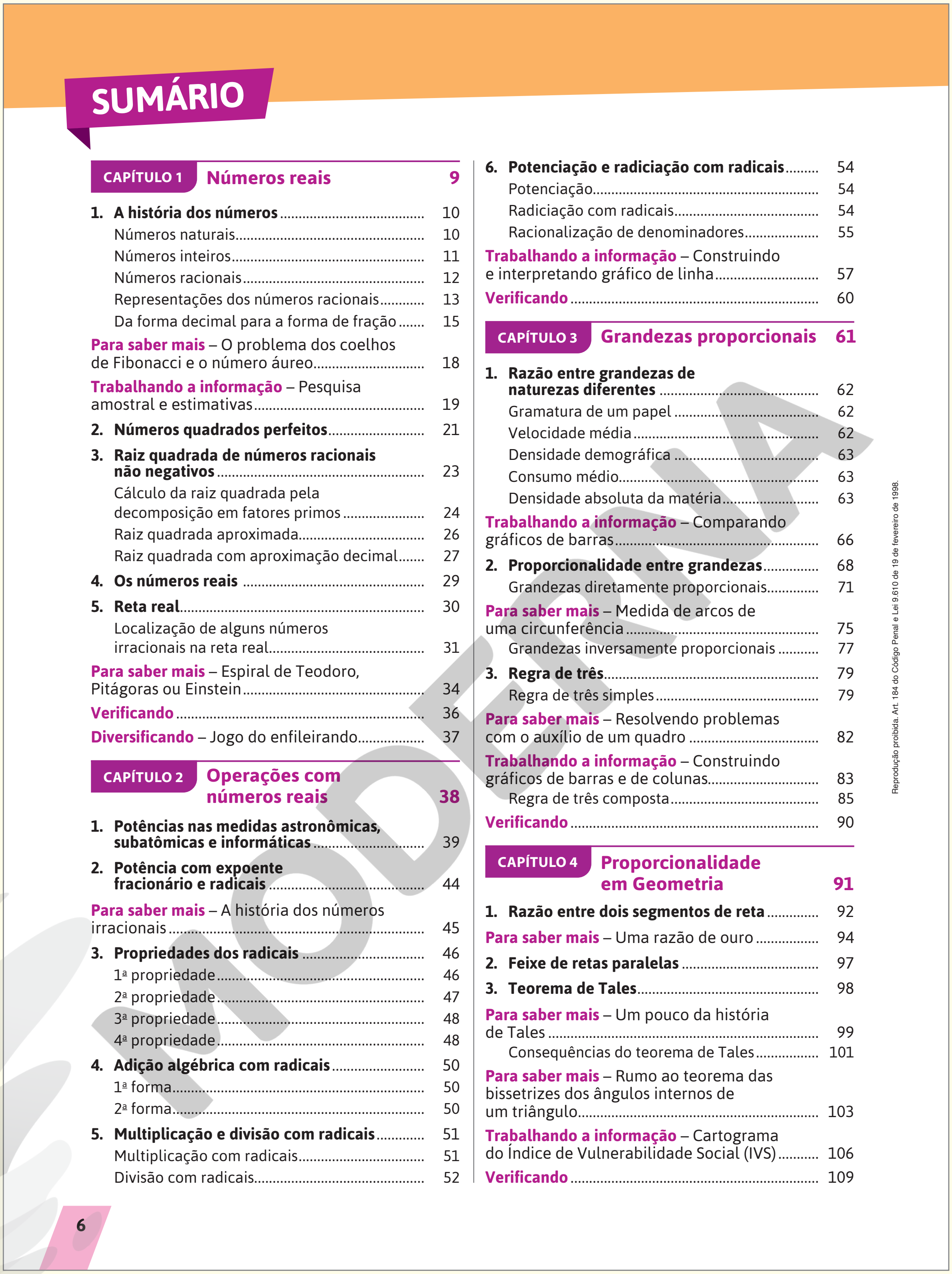


Macroáreas temáticas dos Temas Contemporâneos Transversais na BNCC

- Meio ambiente
- Economia
- Saúde
- Cidadania e civismo
- Multiculturalismo
- Ciência e Tecnologia

Ícones da coleção

- Atividade oral
- Atividade em dupla ou em grupo
- Cálculo mental
- Calculadora



SUMÁRIO

CAPÍTULO 5 Semelhança 110

CAPÍTULO 6 Um pouco mais sobre Estatística 133

CAPÍTULO 7 Equações do 2º grau 146

CAPÍTULO 8 Triângulo retângulo 173

CAPÍTULO 9 Razões trigonométricas nos triângulos retângulos 197

CAPÍTULO 10 Estudo das funções 219

CAPÍTULO 11 Circunferência, arcos e relações métricas 262

CAPÍTULO 12 Polígonos regulares e áreas 280

Capítulo 1

Números reais

Observe a fotografia e responda às questões no caderno.

a) Para $a = 1$, qual deve ser o valor de b para que estejam à razão áurea?

b) Com os valores de a e de b considerados no item anterior, determine uma aproximação para o número ϕ.

c) Pesquise sobre o número de ouro e debata com os colegas sobre a razão áurea representar um padrão de beleza.

LUCKY-PHOTOGRAPHER/ALAMY/FOTOARENA

O Partenon, em Atenas, Grécia. (Fotografia de 2019.)

Será que a estrutura espiral das conchas de moluscos, o Partenon em Atenas, na Grécia, as pirâmides em Gizé, no Egito, e a obra **Mona Lisa**, de Leonardo da Vinci, têm algum elemento em comum?

Muitos afirmam que essas e outras obras de arte ou de arquitetura apresentam, em suas composições, segmentos cujas medidas a e b, com $a > b$, estão à razão:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Dizemos que as razões dessa proporção são a razão áurea, cujo valor numérico é representado pela letra grega ϕ (fi), o número de ouro. Para que isso ocorra, a e b devem ser tais que:

$$b = \frac{a\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

a) $b \simeq 0{,}618033$
b) $\phi \simeq 1{,}62$
c) Resposta pessoal.

Capítulo 1 – Números reais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo retoma e amplia a evolução da ideia de número ao longo da história e sua aplicação para atender às necessidades do ser humano no que se refere à sua organização social e à compreensão dos fenômenos da natureza. Desse modo, o capítulo revisa os números racionais e apresenta os números irracionais e o conjunto dos números reais; trata da reta real e da localização de números irracionais nela com o auxílio de triângulos retângulos e do teorema de Pitágoras; resgata a noção de quadrados perfeitos e explora cálculos com raízes quadradas de números racionais não negativos (exatas e com aproximação). Além disso, o capítulo também explora o cálculo de porcentagens sucessivas.

O tema motivador da abertura do capítulo é o número de ouro, que será explorado no desenvolvimento do capítulo no contexto da sequência de Fibonacci.

Ao trabalhar com a abertura deste capítulo, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 3** e para uma reflexão sobre o Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com esse tema, sugerimos:

NETO, P. R. S.; SILVEIRA, M. R. A.; MELO, L. A. S. Os aspectos “ver e ver-como” e o número de ouro na perspectiva wittgensteiniana da linguagem. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1-18, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e57939/40049. Acesso em: 13 jun. 2022.

Nesse artigo, os autores apresentam a perspectiva wittgensteiniana acerca das expressões ver e ver-como, com foco voltado para o ensino e a aprendizagem da Matemática, destacando o conceito de número de ouro, na perspectiva da linguagem, por meio de um breve histórico e sua constituição como objeto matemático propriamente dito, além de suas aplicações em outros ramos do conhecimento.

1. A história dos números

Habilidades da BNCC: **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Este tópico retoma e possibilita aos estudantes ampliar a compreensão dos números naturais, inteiros e racionais, preparando-os para o estudo dos números irracionais e, ainda, para associar os números reais ao conjunto que envolve todos esses números, além de poderem compreender a ideia de reta real. Assim, eles desenvolvem as habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04).

Números naturais

Inicie o trabalho com esse tópico, propondo aos estudantes atividades em grupo que os motivem a mobilizar seus conhecimentos acerca dos números naturais e das características do sistema de numeração decimal. Eles podem:

- elencar as características do sistema de numeração decimal;
- dizer onde ele surgiu, como foi difundido e o motivo de sua prevalência em relação aos demais sistemas das civilizações antigas;
- dizer qual é o uso de um número natural;
- caracterizar o conjunto dos números naturais;
- discutir as limitações das operações com números naturais; entre outras tarefas.

Em seguida, cada grupo apresenta suas conclusões aos demais. No final, faça um encerramento do tema com os estudantes, em uma roda de conversa.

1 A história dos números

Desde a invenção da escrita, há cerca de 4 mil anos, o ser humano começou a usar símbolos para representar quantidades como resultado da contagem de objetos: quantidade de aves que criava, de peixes que pescava, de cereais que colhia etc.

Cunha: objeto que vai diminuindo de grossura e é utilizado para rachar lenha, fender pedras etc.

Os babilônios, por exemplo, muitos séculos antes de Cristo, empregavam símbolos em forma de **cunha** para representar números:

- Uma cunha "em pé" (𒁹) representava o número 1 e podia ser repetida até nove vezes.
- Uma cunha "deitada" (𒀸) representava o número 10 e podia ser repetida até cinco vezes.

Esses símbolos eram talhados em tábuas de argila, como a da fotografia.


BIBLIOTECA DE LIVROS E MANUSCRITOS RAROS, UNIVERSIDADE DE COLUMBIA, NOVA YORK

Tábua de argila da civilização babilônica, do período entre 1900 a.C. e 1600 a.C. Universidade Columbia, Nova York, Estados Unidos.

Outros povos, como os egípcios e os romanos, tinham seus próprios símbolos e suas próprias regras para registrar quantidades.

Atualmente, a maioria dos povos adota o **sistema de numeração decimal**, composto de dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), denominados **algarismos indo-arábicos**.

Números naturais

Números naturais são aqueles que expressam o resultado de uma contagem.

O **conjunto dos números naturais**, representado por $\mathbb{N}$, pode ser indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Com os números naturais, efetuamos qualquer adição ou multiplicação. As subtrações, no entanto, só serão possíveis quando o minuendo for maior ou igual ao subtraendo, e as divisões, quando o dividendo for múltiplo do divisor.

São exemplos de operações impossíveis de ser realizadas só com números naturais:

a) a subtração 6 – 7 (não há número natural que adicionado a 7 resulte 6);

b) a divisão exata 8 : 5 (não há número natural que multiplicado por 5 resulte 8).

Os números naturais não são suficientes para representar todas as situações do dia a dia. Com eles, não é possível representar, por exemplo, temperaturas abaixo de zero grau Celsius nem a medida do comprimento do nosso palmo em metro.

Para atender a situações como essas, foram criados outros conjuntos numéricos, que estudaremos ao longo deste capítulo.

Números inteiros

Os números inteiros são números relativos (positivos ou negativos) criados pelo ser humano, em decorrência de necessidades impostas pelo comércio e de situações cotidianas que exigiram a representação de quantidades em relação ao referencial zero.

Acompanhe exemplos em que recorremos aos números inteiros.

a) Nos termômetros, para indicar temperaturas abaixo de zero grau Celsius (números negativos) ou acima de zero grau Celsius (números positivos). O referencial é 0 °C.

PEDRO MORAES/SHUTTERSTOCK

Pessoa em pista de corrida em Curitiba, Paraná. (Fotografia de 2021.)

b) Para descrever o saldo de gols de times em um campeonato de futebol, podemos utilizar os números inteiros positivos para indicar os gols realizados, e os inteiros negativos, para os gols sofridos.

Saldo de gols de alguns times do campeonato de futebol da escola

	Gols realizados	Gols sofridos	Saldo de gols
Time A	3	−4	−1
Time B	2	−1	1
Time C	5	−3	2
Time D	6	−6	0

Fonte: anotações realizadas pelo professor de Educação Física.

O **conjunto dos números inteiros**, representado por $\mathbb{Z}$, pode ser indicado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$$

Os símbolos **+** e **−** à esquerda dos números passam a indicar a posição que eles ocupam em relação ao zero, quando organizados em ordem crescente ou decrescente: os números menores do que zero são negativos, e os maiores do que zero, positivos. O número zero não é positivo nem negativo.

Os números inteiros não negativos (0, +1, +2, +3, …) são associados aos números naturais, tanto na ordenação como nas operações, então, esses números passarão a ser indicados simplesmente por 0, 1, 2, 3, 4, …

Por esse motivo, podemos dizer que qualquer número natural é um número inteiro:

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, \underbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}_{\textbf{números naturais}}\}$$

Com a criação do conjunto dos números inteiros, tornou-se possível efetuar subtrações em que o minuendo é menor do que o subtraendo. Por exemplo: (6 − 7 = −1) e (0 − 3 = −3).

Os números inteiros, no entanto, não são suficientes para representar o resultado de qualquer divisão. Por exemplo: (10 : 3) e [(−5) : 7].

Números inteiros

Antes de começar o trabalho com esse tópico, peça aos estudantes que listem exemplos de utilização de números positivos e de números negativos, retomando o que são os números inteiros. Podem surgir, por exemplo: nos painéis de elevadores, para registrar saldo de pontos em competições esportivas, altitude de montes e profundidades (considerando o nível do mar como referência e valores inteiros das medidas), gols marcados e gols sofridos por um time em uma partida de futebol, entre outros.

O trabalho com os números inteiros pode ser semelhante ao sugerido com os números naturais. Proponha aos estudantes que caracterizem o conjunto dos números inteiros antes da leitura do texto desta página. Retome as ideias de antecessor e de sucessor, de oposto e de módulo de um número inteiro, além da inclusão dos números naturais no conjunto dos números inteiros.

Sugira também que conversem sobre as limitações das operações com os números inteiros, retomando a potenciação com expoente inteiro negativo.

Números racionais

Explore a necessidade dos números racionais em situações de medição. Proponha na lousa uma ampliação do quadro apresentado. Peça aos estudantes que digam alguns números e depois falem se eles são números racionais.

Desenhe na lousa uma reta numérica e proponha a localização de números naturais, números inteiros negativos e números racionais na forma de fração. Se julgar necessário, mostre alguns exemplos antes de pedir aos estudantes que façam atividades sobre esse conteúdo.

Exercícios propostos

Para resolver os **exercícios 1** e **2**, os estudantes podem se reunir em duplas. A troca de ideias favorece o levantamento de hipóteses e a argumentação, bem como o desenvolvimento das **competências gerais 7** e **9**. Socialize as respostas, validando-as com os estudantes.

Esses dois exercícios abordam as limitações matemáticas das subtrações e da divisão com números naturais e, assim, mostram que essas operações só serão sempre possíveis com a ampliação dos conjuntos numéricos. Converse com os estudantes sobre alguns exemplos cotidianos em que os números naturais não podem ser aplicados.

As operações apresentadas nos **itens b**, **e**, **g** e **h** do **exercício 1** não podem ser realizadas apenas utilizando o conjunto dos números naturais.

Acompanhe a resolução do **exercício 3**:

- a) Utilizando como referência o nível do mar, obtemos: +5,8 km e –0,24 km.
- b) 5,8 e 0,24 são números racionais escritos na forma decimal.

Números racionais

Considere os números a seguir.

1,25 0,777... –13 –0,75

Eles são exemplos de **números racionais**, pois podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$ com um número inteiro no numerador e um número inteiro não nulo no denominador. Observe.

$$1{,}25 = \frac{5}{4} \qquad 0{,}777... = \frac{7}{9} \qquad -13 = -\frac{13}{1} \qquad -0{,}75 = -\frac{3}{4}$$

Com os números racionais, podemos representar o resultado da divisão de quaisquer dois números inteiros, com o divisor não nulo. O **conjunto dos números racionais**, representado por $\mathbb{Q}$, pode ser indicado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0\right\}$$

Observe o quadro a seguir, com alguns exemplos de números racionais.

	Número natural	Número inteiro	Número racional
3	✓	✓	✓
–8		✓	✓
$\mathbf{\frac{1}{3}}$			✓
–0,7555...			✓

Agora, note como podemos representar alguns números racionais na reta numérica.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Identifique, entre as operações a seguir, quais não podem ser realizadas apenas com números naturais. **1.** Alternativas **b**, **e**, **g**, **h**.

a) 3 + 7
b) 5 – 235
c) 0 – 0
d) 7 – 0
e) 3 : 7
f) 3 · 7
g) 8 : 3
h) 7 : 10

2 Responda às questões a seguir. **2. a)** Porque não há número natural que multiplicado por 3 dê 7.

a) Por que é impossível efetuar a divisão exata 7 : 3 dispondo apenas de números naturais?
b) E 3 – 7? Por que é impossível efetuá-la, considerando apenas os naturais?

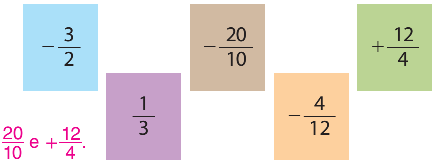
2. b) Porque não há número natural que adicionado a 7 dê 3.

3 Enquanto um avião sobrevoa a uma altitude de medida igual a 5,8 km, um submarino está a uma profundidade medindo 0,24 km. **3. a)** +5,8 km; –0,24 km; nível do mar.

a) Represente essas medidas com números relativos e explique qual foi o referencial utilizado.
b) Os números que aparecem no enunciado (5,8 e 0,24) são números racionais? Eles estão escritos na forma de fração? **3. b)** Sim; não, eles estão escritos na forma decimal.

5. f) Falsa, pois, por exemplo, –1 não é um número natural.
5. g) Falsa, pois, por exemplo, 0,5 não é número inteiro.

4 Entre os números a seguir, quais são inteiros?



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

4. $-\frac{20}{10}$ e $+\frac{12}{4}$.

5 Identifique as sentenças falsas e justifique com um exemplo. **5. a)** Verdadeira.

a) Todo número natural é inteiro.
b) Todo número inteiro é racional.
c) Todo número natural é racional.

5. b) Verdadeira. **5. c)** Verdadeira.

d) Todo número que pode ser escrito na forma de fração de inteiros, com denominador não nulo, é racional. **5. d)** Verdadeira.
e) Todo número natural é um número inteiro positivo. **5. e)** Falsa, pois zero não é um número inteiro positivo.
f) Todo número inteiro é natural.
g) Todo número racional é inteiro.

6 Reúna-se com um colega e respondam quantos números inteiros existem:

a) entre dois números inteiros consecutivos;
b) entre 1 e 9, entre –1 e 1, entre –9 e 9;
c) entre 0 e 10, entre 0 e 100, entre 0 e 1 000 000.

6. a) Nenhum. **6. b)** 7; 1; 17. **6. c)** 9; 99; 999 999.

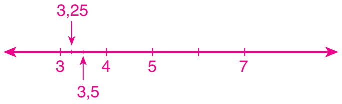
Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Pense mais um pouco...: **a)** 5; 4; 3,5; 3,25.

a) Calculem os números racionais:
   - *a*, que é a média aritmética de 3 e 7;
   - *b*, que é a média aritmética de 3 e *a*;
   - *c*, que é a média aritmética de 3 e *b*;
   - *d*, que é a média aritmética de 3 e *c*.

b)



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

b) Representem os números racionais 3, *a*, *b*, *c*, *d* e 7 em uma mesma reta numérica.
c) As médias aritméticas de dois números obtidas no item **a** estão entre esses dois números? **c)** Sim.
d) É possível calcular os números *e*, *f*, *g*, *h*, ..., que sejam as médias aritméticas, respectivamente, de 3 e *d*, de 3 e *e*, de 3 e *f*, de 3 e *g*, e assim por diante? **d)** Espera-se que os estudantes respondam afirmativamente.
e) Considerando os itens anteriores, use sua percepção para dizer quantos números racionais existem entre 3 e 7 e quantos números racionais existem entre dois números racionais distintos quaisquer.
e) Espera-se que os estudantes respondam que existem infinitos números racionais.

Representações dos números racionais

Com essa breve retomada sobre a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos, podemos constatar que os algarismos indo-arábicos servem para representar todos os números que constituem esses conjuntos.

Notamos, também, que há mais de uma representação possível para todos os números racionais: a fracionária e a decimal.

No quadro a seguir, há algumas representações fracionárias e decimais de alguns números racionais.

Número racional	Algumas representações	
–2	$-\frac{18}{9}$	–2,0
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}$	0,25
$\frac{4}{11}$	$\frac{8}{22}$	0,3636...

Número racional	Algumas representações	
–5,3	$-\frac{53}{10}$	–5,300
$\frac{32}{15}$	$2\frac{2}{15}$	2,1333...
6	$\frac{12}{2}$	6,000

Exercícios propostos

Antes de resolver o **exercício 4**, se necessário, retome a definição de número inteiro. Nesse exercício, os estudantes devem dividir o numerador pelo denominador de cada fração para descobrir se o número é inteiro ou não. Os números inteiros dentre os apresentados são $-\frac{20}{10}$ e $+\frac{12}{4}$.

Aproveite o **exercício 5** para explorar a noção de contraexemplo, esclarecendo que é útil para corroborar a falsidade das sentenças, mas não serve como prova das sentenças verdadeiras.

No **exercício 6**, destaque o que há de diferentre entre as expressões "de 1 a 9" e "entre 1 e 9":

- de 1 a 9, incluem-se o 1 e o 9: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9;
- entre 1 e 9, excluem-se o 1 e o 9: 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

Pense mais um pouco...

Essa seção pretende retomar o conceito de média aritmética para tratar de um conceito fundamental no estudo dos conjuntos numéricos: o conjunto dos números racionais é um conjunto denso.

As resoluções dessa seção estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Representações dos números racionais

Explore as diferentes representações de um número racional e a conversão de uma forma para a outra: a forma de fração e a forma decimal. Se julgar adequado, retome a forma percentual, associada a frações centesimais.

Exercícios propostos

Os **exercícios 7** e **8** articulam-se para levar os estudantes a elaborar, com suas palavras, um regra prática para escrever frações decimais na forma decimal.

Para resolver o **exercício 9**, é suficiente efetuar a divisão entre o numerador e o denominador de cada fração, obtendo-se um número decimal. Se necessário, sugira aos estudantes que confiram as respostas utilizando uma calculadora.

No **exercício 10**, os estudantes devem perceber que, no **item a**, obterão a dízima periódica 7,55555..., pois em 2,444... haverá sempre 4 na parte decimal, indefinidamente, e em 5,111... haverá sempre 1, levando a parte decimal da soma desses dois números a ser sempre 5, indefinidamente. E, no **item b**, obterão a dízima periódica 5,7222... pois 2,5 é um número decimal com 5 na parte decimal, e em 3,222... haverá sempre 2 na parte decimal, indefinidamente.

No **exercício 11**, usamos a calculadora para explorar a dízima periódica. No **item e**, incentive os estudantes a efetuar a subtração das frações e, depois que obtiverem o resultado na forma de fração, registrá-lo como um número decimal efetuando a divisão. No **item f**, destaque que a parte decimal de ambos os números é sempre igual a 2 e, por isso, se anulam na subtração proposta.

Muitos números racionais podem ser representados por uma fração decimal, isto é, de denominador 10, 100, 1 000 etc., como os números a seguir.

$$-2 = -\frac{20}{10} \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \qquad -5{,}3 = -\frac{53}{10} \qquad 6{,}000 = \frac{6\,000}{1\,000}$$

frações decimais

Já os números $\frac{4}{11}$ e $\frac{32}{15}$ não podem ser representados por uma fração decimal. No entanto, eles podem ser escritos na forma decimal.

Note que, nas representações 0,3636… e 2,1333…, as reticências indicam infinitas casas decimais e periódicas. Por exemplo: em 0,3636…, as reticências indicam que 36, chamado de **período**, continua se repetindo indefinidamente. Já em 2,1333…, temos uma representação decimal periódica de período 3.

A representação decimal periódica recebe o nome de **dízima periódica**.

Uma dízima periódica pode ser escrita abreviadamente, colocando-se um traço sobre o período. Note a representação abreviada de algumas dízimas periódicas.

a) $2{,}555\ldots = 2{,}\overline{5}$
b) $-0{,}1313\ldots = -0{,}\overline{13}$
c) $1{,}2777\ldots = 1{,}2\overline{7}$
d) $0{,}21888\ldots = 0{,}21\overline{8}$
e) $-8{,}612612\ldots = -8{,}\overline{612}$
f) $4{,}0979797\ldots = 4{,}0\overline{97}$

8. A quantidade de zeros no denominador de uma fração decimal é igual à quantidade de casas após a vírgula na representação decimal dessa fração.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11. Oriente os estudantes a, antes de iniciar o item **e**, limpar a memória da calculadora, digitando a tecla **MC**.

7 Escreva no caderno a representação decimal das frações a seguir.

a) $\frac{35}{10}$ **7. a)** 3,5
b) $\frac{28}{100}$ **7. b)** 0,28
c) $-\frac{7}{100}$ **7. c)** –0,07
d) $-\frac{321}{10\,000}$ **7. d)** –0,0321
e) $\frac{542}{100}$ **7. e)** 5,42
f) $\frac{12}{1\,000}$ **7. f)** 0,012

8 Observando os resultados do exercício anterior, estabeleça a relação existente entre a quantidade de zeros do denominador de uma fração decimal e a quantidade de casas após a vírgula na representação decimal dessa fração.

9 Represente no caderno cada fração na forma decimal.

a) $\frac{2}{5}$ **9. a)** 0,4
b) $\frac{5}{6}$ **9. b)** 0,8333...
c) $\frac{11}{3}$ **9. c)** 3,666...
d) $-\frac{45}{8}$ **9. d)** –5,625
e) $-\frac{11}{90}$ **9. e)** –0,1222...
f) $\frac{52}{25}$ **9. f)** 2,08

10 Adicionando os dois números de cada item, obtemos outro número na forma de dízima periódica. Determine em cada caso essa dízima periódica na forma abreviada.

a) 2,444… e 5,111… **10. a)** $7{,}\overline{5}$
b) 2,5 e 3,222… **10. b)** $5{,}7\overline{2}$

11 Usando uma calculadora, faça o que se pede.

a) Escreva no caderno o número que aparece no visor após digitar estas teclas: **11. a)** 3,66666...

3 3 ÷ 9 =

b) Reserve esse resultado na memória aditiva, digitando a tecla M⁺.

c) Escreva no caderno o número que aparece no visor após digitar estas teclas: **11. c)** 1,66666...

1 5 ÷ 9 =

d) Para subtrair o resultado do item **c** do resultado do item **a**, basta digitar as teclas M⁻ da memória subtrativa e MRC, que recupera o último resultado da memória. Escreva no caderno o número que aparece no visor. **11. d)** 2

e) Efetue $\frac{20}{9} - \frac{47}{9}$ e, em seguida, com uma calculadora, confira o resultado. **11. e)** –3

f) Calcule o valor da expressão:
5,222… – 2,222… **11. f)** 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Da forma decimal para a forma de fração

Já trabalhamos com a transformação de um número escrito na forma de fração para a forma decimal. Para isso, basta efetuar o algoritmo da divisão, como neste exemplo.

$$\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0{,}2 \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}2 \\ \hline 10 & \\ -10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Agora, vamos acompanhar como transformar um número na forma decimal para a forma de fração.

1º caso: Quando o número tem finitas casas decimais, sua leitura fornece uma boa indicação de como expressá-lo na forma de fração.

Observe alguns exemplos.

a) $0{,}2 = \underbrace{\text{dois décimos}}_{\text{leitura}} = \frac{2}{10}$

um zero

uma casa decimal

b) $\underbrace{5{,}325}_{\text{três casas decimais}} = \underbrace{\text{cinco inteiros, trezentos e vinte e cinco milésimos}}_{\text{leitura}} = 5\frac{325}{\underbrace{1\,000}_{\text{três zeros}}}$

2º caso: Quando o número tem infinitas casas decimais, como o número 0,55555…, procedemos do seguinte modo.

- Primeiro, chamamos o número 0,55555… de x, obtendo a igualdade:

$$x = 0{,}55555\ldots \qquad \text{(I)}$$

- Em seguida, multiplicamos os dois membros por 10, chegando a uma nova igualdade:

$$10x = 5{,}5555\ldots \qquad \text{(II)}$$

- E, finalmente, subtraímos (I) de (II), membro a membro, obtendo:

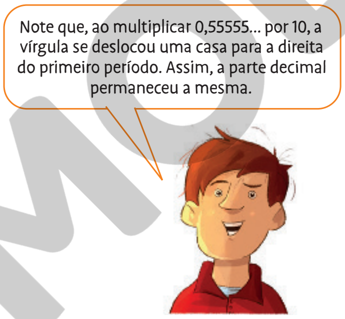
$$10x - x = 5{,}555\ldots - 0{,}555\ldots$$

$$9x = 5$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{5}{9}$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Logo: $0{,}55555\ldots = \frac{5}{9}$



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, os dois membros da primeira igualdade foram multiplicados por 10. De modo geral, eles devem ser multiplicados por uma potência de 10 conveniente (10, 100, 1 000, …) a fim de se deslocar a vírgula para a direita do primeiro período.

Da forma decimal para a forma de fração

Como sugestão, organize os estudantes em duplas para trabalhar com esse tópico. Algumas duplas podem fazer a leitura do 1º caso, enquanto outras leem o 2º caso. Depois, sorteie um estudante do grupo de duplas que trabalhou com um dos casos, e outro do grupo do outro caso para irem à lousa explicar o que foi discutido em sua dupla. Nesse momento, as demais duplas que exploraram o caso apresentado podem ajudar o colega em sua explicação.

Em seguida, proponha a cada dupla atividades relativas ao caso que não foi trabalhado, para determinarem a forma de fração de números racionais dados na forma decimal pelo processo explicado na lousa.

Da forma decimal para a forma de fração

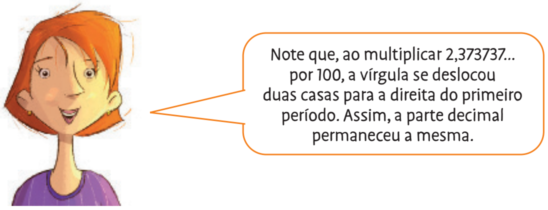
Reproduza os dois exemplos na lousa, explorando os passos com os estudantes. Peça a eles que antecipem o que deve ser feito em cada exemplo e por quê. A justificativa do processo mostra o grau de entendimento que os estudantes têm do procedimento.

Caso algum estudante ainda apresente dúvidas, mostre-lhe outros exemplos na lousa. É importante que esse tipo de transformação seja bem compreendido pelos estudantes.

Acompanhe outro exemplo, com o número 2,373737…

- Chamando 2,373737… de x, obtemos a igualdade $x = 2,373737…$
- Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100, obtemos uma nova igualdade:

$$100x = 237,3737…$$



- Subtraindo a primeira igualdade da segunda, membro a membro, temos:

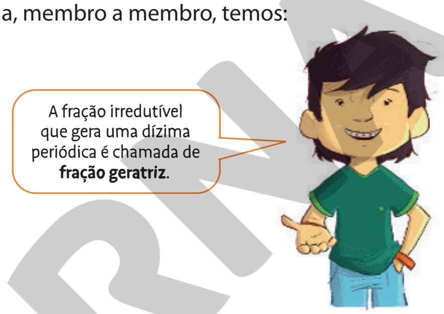
$$100x - x = 237,3737... - 2,3737...$$

$$99x = 235$$

$$\frac{99x}{99} = \frac{235}{99}$$

$$x = \frac{235}{99}$$

Logo: $2,3737... = \frac{235}{99}$



Agora, acompanhe o caso da dízima composta 6,8424242... com um algarismo (8) após a vírgula, além do período 42.

- A partir da igualdade $x = 6,8424242...$, devemos obter duas outras igualdades em que, no segundo membro, as partes decimais sejam iguais. Dessa maneira, na subtração de uma pela outra, essas partes decimais se anulam.
- Como há um algarismo (8) após a vírgula que não faz parte do período, multiplicamos ambos os membros por 10 e, depois, por 1 000:

$$10x = 68,424242... \quad \text{e} \quad 1\,000x = 6\,842,424242...$$

- Subtraindo a primeira igualdade da segunda, membro a membro, temos:

$$1\,000x - 10x = 6\,842,424242... - 68,424242... \leftarrow \text{as partes decimais são iguais e se anulam}$$

$$990x = 6\,842 - 68 = 6\,774$$

$$990x = 6\,774$$

$$x = \frac{6\,774}{990} \leftarrow \text{podemos simplificar a fração dividindo por 6 o numerador e o denominador}$$

$$x = \frac{1\,129}{165} \leftarrow \textbf{fração geratriz}$$

Portanto, temos: $6,8424242... = \frac{1\,129}{165}$

ILUSTRAÇÕES: SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

12 Em uma calculadora, digite as teclas mostradas a seguir e escreva no caderno o resultado.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

9 ÷ 6 6 = **12.** 0,13636...

12. a) A resposta depende da calculadora utilizada.

a) Para o último algarismo do número que aparece no visor, sua calculadora faz algum arredondamento?

b) Represente o número obtido na forma de fração irredutível. **12. b)** $\frac{3}{22}$

13 Escreva no caderno as frações irredutíveis que representam: o número 0,36, o número 0,04 e a adição 0,36 + 0,04. **13.** $\frac{9}{25}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{2}{5}$.

14 Expresse os números a seguir na forma de fração.

a) 3,444... **14. a)** $\frac{31}{9}$

b) $-12,\overline{5}$ **14. b)** $-\frac{113}{9}$

c) $0,\overline{45}$ **14. c)** $\frac{5}{11}$

d) −0,31222... **14. d)** $-\frac{281}{900}$

15 Determine a fração irredutível que representa o valor de cada expressão a seguir.

a) $0,2 + 0,\overline{3}$ **15. a)** $\frac{8}{15}$

b) $0,2\overline{7} + 2,\overline{3}$ **15. b)** $\frac{47}{18}$

c) $0,3\overline{8} + 1,4\overline{5}$ **15. c)** $\frac{83}{45}$

d) $1,\overline{8} \cdot \frac{2}{17}$ **15. d)** $\frac{2}{9}$

16 Dividindo um número *x* por um número *y*, obtém-se 2,555... Determine no caderno o valor de *x* e de *y*, sabendo que eles são números primos entre si. **16.** $x = 23$ e $y = 9$.

17 ***Hora de criar*** – Escreva o número 7 como:

a) a soma de dois números racionais na forma de fração;

b) a diferença de dois números racionais na forma decimal, cada um com duas casas decimais;

c) a soma de duas dízimas periódicas.

18 Em uma caixa, há sete bolas numeradas de 1 a 7. Márcio retira três bolas consecutivas, sem recolocá-las na caixa, para representar um número A. O número retirado na primeira bola representará as unidades de A; o número da segunda bola representará os décimos de A; e o da terceira bola, os centésimos.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

18. a) 6,42; $\frac{321}{50}$.

a) Márcio retirou os números 6, 4 e 2, nessa ordem. Qual é o número A formado nesse caso? Indique-o por uma fração irredutível.

b) Se, em seguida, Márcio retirar mais três bolas, qual é o maior número A possível que poderá ser formado com a retirada dessas bolas? E o menor? **18. b)** 7,53; 1,35.

17. Respostas possíveis: **17. a)** $\frac{13}{2} + \frac{1}{2}$; **17. b)** 9,42 – 2,42; **17. c)** $4,\overline{8} + 2,\overline{1}$.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe as expressões a seguir.

Pense mais um pouco...:

a) $1 + \frac{1}{2}$ **a)** $\frac{3}{2}$

b) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$ **b)** $\frac{5}{3}$

c) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$ **c)** $\frac{8}{5}$

Calcule no caderno o valor das expressões dadas e, seguindo o padrão, escreva a quarta expressão e calcule seu valor. $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{13}{8}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 12** a **15** e dos **exercícios 17** e **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 16**, comente com os estudantes o significado de números primos entre si: aqueles cujo máximo divisor comum é 1, ou seja, não há fatores primos comuns a esse grupo de números. Segue uma possível resolução desse exercício:

Note que, se $\frac{x}{y} = 2,555...$, então $\frac{x}{y}$ é uma geratriz da dízima 2,555... .

Além disso, como *x* e *y* são primos entre si, a fração $\frac{x}{y}$ é irredutível, ou seja, não pode ser simplificada.

Assim, para determinar *x* e *y*, precisamos determinar a fração geratriz irredutível dessa dízima. Fazendo 2,555... = *a*, obtemos:

$a = 2,555...$

$10a = 25,555...$

$10a - a = 25,555... - 2,555...$

$9a = 23$

$a = \frac{23}{9}$

$\frac{23}{9}$ é uma fração irredutível.

Logo, $x = 23$ e $y = 9$.

Pense mais um pouco...

A seção tem um aspecto interessante e lúdico que pode ser explorado: o número de ouro (1,618033...) e a sequência de Fibonacci. A sequência de expressões dada converge para o número de ouro. Apresente também aos estudantes a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...) e mostre-lhes que o valor de cada expressão é uma fração cujo numerador e denominador são números consecutivos dessa sequência:

$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, ...$

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho, sugerimos:

LIVIO, M. **Razão áurea**. Rio de Janeiro/São Paulo: Record, 2007.

Nesse livro, o autor propõe uma jornada pela Arte e a Arquitetura, Botânica e Biologia,Física e Matemática. Ele relata curiosidades sobre uma série de personalidades fixadas no número ϕ, como os pitagóricos – defensores da tese em que a proporção áurea revelaria segredos dos deuses – Johannes Kepler, que considerava o número de ouro um dos maiores tesouros da Geometria, e Leonardo Fibonacci de Pisa, criador da sequência que leva seu nome.

Para saber mais

Para trabalhar com essa seção, organize os estudantes em grupos e peça-lhes que leiam o texto e escrevam um pequeno comentário sobre o que entenderam em relação à reprodução dos coelhos. Ao final, em uma roda de conversa, peça a eles que compartilhem suas conclusões.

Essa seção explora a sequência de Fibonacci.

Agora é com você!

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

A **atividade 3** propicia aos estudantes relacionar a sequência ao número de ouro, ampliando o trabalho da seção anterior **Pense mais um pouco...** .

Se julgar conveniente, peça previamente aos estudantes que pesquisem sobre a sequência de Fibonacci e suas aplicações, o que poderá contribuir para o desenvolvimento dessa seção na sala de aula.

Sugestões de leitura

Para enriquecer o trabalho com essa seção, sugerimos:

BELUSSI, G. M. *et al*. **Número de ouro**. Disponível em: http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf. Acesso em: 13 jun. 2022.

SILVA, A. L. A sequência da natureza e a matemática de Fibonacci. **Jornal Biosferas**. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/biosferas/Art0075.html. Acesso em: 13 jun. 2022.

Essas duas sugestões de leitura tratam da sequência de Fibonacci, razão áurea e número de ouro.

PARA SABER MAIS

O problema dos coelhos de Fibonacci e o número áureo

Leonardo de Pisa (c. 1170-1240), conhecido como Fibonacci, publicou, em 1202, o famoso livro *Liber Abaci* (*Livro do ábaco*), em que explicou a notação indo-arábica que usamos hoje.

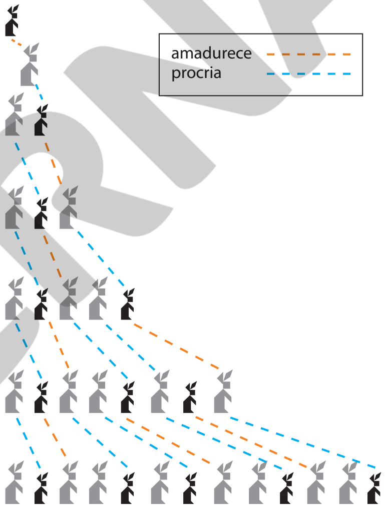
No capítulo XII, ele propôs o seguinte problema, que originou a sequência de Fibonacci:

> Um homem pôs um par de coelhos em um lugar cercado de todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

O que nos interessa apresentar aqui é a sequência de Fibonacci. Por isso, vamos apenas iniciar a resolução dos primeiros passos do problema.

Observe a figura na qual um coelho grande representa um par de coelhos maduros (férteis) e um coelho pequeno representa um par de coelhos jovens (que não procriam).

- Vamos começar com um par de coelhos jovens.
- Esse par amadurece durante o 1º mês.
- Após o 1º mês, o 1º par dá à luz outro par, assim ficamos com 2 pares.
- Após o 2º mês, o par maduro dá à luz outro par jovem, enquanto o par de filhotes amadurece. Assim ficam 3 pares.
- Após o 3º mês, cada um dos 2 pares maduros dá à luz outro par, e o par de filhotes amadurece. Temos agora 5 pares.
- Após o 4º mês, cada um dos 3 pares maduros dá à luz outro par, e os 2 pares de filhotes crescem. Agora temos 8 pares.
- Após o 5º mês, temos 1 par de filhotes de cada um dos 5 pares adultos, mais 3 pares crescendo. Total: 13 pares.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos, então, observar a sequência de números de Fibonacci: **1**, **1**, **2**, **3**, **5**, **8**, **13**, ...

Dados obtidos em: LIVIO, Mario. **Razão áurea**. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. p. 116.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Compare a soma de dois números consecutivos da sequência com o número seguinte.
1. Espera-se que os estudantes percebam que a soma é igual ao próximo número da sequência.

2 Quais são os próximos quatro números da sequência? **2.** Espera-se que os estudantes obtenham 21, 34, 55 e 89.

3 Com os onze números (n_1, n_2, n_3, n_4, ...) da sequência agora conhecidos, calcule a razão de um número pelo termo anterior com aproximação até a terceira casa após a vírgula. Consulte a abertura do capítulo e diga de qual número os quocientes obtidos se aproximam.

3. $\frac{n_2}{n_1} = 1{,}000$; $\frac{n_3}{n_2} = 2{,}000$; $\frac{n_4}{n_3} = 1{,}500$; $\frac{n_5}{n_4} = 1{,}667$; $\frac{n_6}{n_5} = 1{,}600$; $\frac{n_7}{n_6} = 1{,}625$; $\frac{n_8}{n_7} = 1{,}615$; $\frac{n_9}{n_8} = 1{,}619$; $\frac{n_{10}}{n_9} = 1{,}618$; $\frac{n_{11}}{n_{10}} = 1{,}618$. Aproximam-se do número áureo.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Pesquisa amostral e estimativas

Violência contra mulheres

A violência contra as mulheres se manifesta de diversas formas. De fato, o próprio conceito definido na Convenção de Belém do Pará (1994) aponta para esta amplitude, definindo violência contra as mulheres como "qualquer ação ou conduta, baseada no gênero, que cause morte, dano ou sofrimento físico, sexual ou psicológico à mulher, tanto no âmbito público como no privado" (Art. 1º). Além das violações aos direitos das mulheres e a sua integridade física e psicológica, a violência impacta também no desenvolvimento social e econômico de um país.

SUBSECRETARIA DE POLÍTICAS PÚBLICAS PARA MULHERES. **Violência contra a mulher**. Mato Grosso do Sul, [2021?]. Disponível em: https://www.naosecale.ms.gov.br/violencia-contra-a-mulher/. Acesso em: 2 abr. 2022.

ACERVO DO MINISTÉRIO PÚBLICO DO ESTADO DE MATO GROSSO DO SUL

Em 2021, o Instituto DataSenado, em parceria com o Observatório da Mulher contra a Violência, realizou uma pesquisa, com 3 mil brasileiras de 16 anos ou mais, denominada "Violência doméstica e familiar contra a mulher – 2021".

Para 71% das entrevistadas, o Brasil é um país muito machista, e 68% conhecem uma ou mais mulheres vítimas de violência doméstica ou familiar, enquanto 27% declaram já ter sofrido algum tipo de agressão por um homem.

Note, nas tabelas a seguir, outros dados sobre essa pesquisa.

Tabela 1: De forma geral, você acha que as mulheres são tratadas com respeito no Brasil?

	Amostra observada	População estimada
Sim	130	3 422 511
Às vezes	1 280	37 719 799
Não	1 574	49 490 883
Não sei/Prefiro não responder	16	581 707
Total	3 000	91 214 900

Fonte: BRASIL. Senado Federal. **Violência doméstica e familiar contra a mulher**, Brasília, DF: Senado Federal, 2021. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/publicacaodatasenado?id=violencia-domestica-e-familiar-contra-a-mulher-2021. Acesso em: 2 abr. 2022.

Tabela 2: Alguma amiga, familiar ou conhecida já sofreu algum tipo de violência doméstica ou familiar?

	Amostra observada	População estimada
Sim, mais de uma	1 638	45 041 306
Sim, conheço uma	533	17 279 570
Não conheço	813	28 464 935
Não sei/Prefiro não responder	16	429 089
Total	3 000	91 214 900

Fonte: BRASIL. Senado Federal. **Violência doméstica e familiar contra a mulher**, Brasília, DF: Senado Federal, 2021. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/publicacaodatasenado?id=violencia-domestica-e-familiar-contra-a-mulher-2021. Acesso em: 2 abr. 2022.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC:
EF09MA22.

Ao propor aos estudantes atividades em que eles devem escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade (EF09MA22).

A seção trata de pesquisa amostral e estimativas com o tema "Violência contra mulheres".

Para explorar o Tema Contemporâneo Transversal **educação em direitos humanos**, os estudantes podem pesquisar e conversar sobre o tema e, para isso, podem ser incentivados a responder perguntas como: O que é preciso mudar na sociedade para que os casos de violência contra as mulheres acabem? Por que as mulheres, mesmo com suas importantes conquistas, ainda são vítimas de assédio sexual, atos de violência doméstica física e/ou psicológica, feminicídio? Como romper o modelo estrutural que coloca as mulheres em posições de inferioridade e situações de opressão?

As reflexões que devem ser feitas para mudar essa situação são muitas, mas o descondicionamento desses pilares deve começar na educação dos estudantes.

Uma sugestão é formar grupos com estudantes e profissionais da escola que trabalhem sistematicamente o tema, promovendo discussões e questionamentos sobre as causas da violência contra as mulheres, procurando envolver todos e desconstruir ideias preconcebidas, que vão contra qualquer ideia de humanismo e de justiça. Podem ser discutidas outras questões com a finalidade de promover a educação inclusiva e solidária, combatendo todo tipo de *bullying*, mas, neste contexto. A escola, como centro de convívio e de formação cidadã, tem responsabilidade nas propostas de mudança visando a uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva. Esse trabalho está alinhado e favorece o desenvolvimento das **competências gerais 8**, **9** e **10**.

Agora quem trabalha é você!

Essas atividades podem ser realizadas de maneira coletiva; utilize-as para direcionar uma roda de conversa com os estudantes e incentive-os a debater o assunto, pesquisar e apresentar outros dados sobre o tema que fundamentem os argumentos que apresentarem.

6. Observando o conjunto de dados é possível perceber que, para esse grupo de 16 pessoas, os dados da tabela 1 foram arredondados para um valor maior, e os da tabela 2, para um valor menor. Após estudarem o capítulo 3 é possível retornar a esta questão e perceber que, se os valores fossem proporcionais, ou seja, se não fossem consideradas as margens de erro, o valor seria de aproximadamente 486 480 mulheres (16 · 91 214 900 : 3 000 ≃ 486 480).

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O que diz a Convenção de Belém do Pará (1994) sobre o que caracteriza a violência contra as mulheres? **1.** Qualquer ação ou conduta, baseada no gênero, que cause morte, dano ou sofrimento físico, sexual ou psicológico à mulher, tanto no âmbito público como no privado.

2 Segundo a pesquisa, que percentual das entrevistadas consideram o Brasil um país machista? **2.** 71%

3 De acordo com os dados, é possível dizer que as entrevistadas acham que as mulheres são tratadas com respeito no Brasil? Justifique sua resposta. **3.** Não, pois mais da metade das entrevistas (1 574) responderam que não.

4 A maioria das entrevistadas conhece alguma mulher que já sofreu alguma violência? Justifique sua resposta. **4.** Sim, pois 2 171 entrevistadas (que correspondem a cerca de 72% das entrevistadas) responderam que conhecem pelo menos uma mulher que sofreu violência.

5 Nas tabelas, foram identificadas a amostra observada e a população estimada. A amostra corresponde ao número de entrevistadas e, com base nesses valores e análises estatísticas, estimou-se a população feminina brasileira com 16 anos ou mais, correspondente a cada resposta.

FABIO EIJI SIRASUMA/
ARQUIVO DA EDITORA

A partir de uma pesquisa por amostragem é possível estimar a população correspondente. Para isso, são feitas análises estatísticas dos resultados, estabelecendo margens de erro e um índice de confiança de todo o resultado.

No caso dos dados apresentados na pesquisa “Violência doméstica e familiar contra a mulher – 2021”, o índice de confiança é 95%, e cada grupo de dados apresenta uma margem de erro.

Note que, para as duas perguntas apresentadas nas tabelas, 16 pessoas responderam não sei/prefiro não responder. Mas a estimativa para a população correspondente não foi a mesma. Isso ocorreu porque a margem de erro foi diferente para cada conjunto de dados. Qual foi a população estimada para cada um desses casos? **5.** Tabela 1: 581 707 mulheres; tabela 2: 429 089 mulheres.

6 Considerando as 16 pessoas, em qual caso a população foi estimada para um valor maior e em qual caso foi estimada para um valor menor?

7 Você já tomou conhecimento de alguma pesquisa que apresente margem de erro? Converse com o professor e os colegas sobre essas pesquisas. **7.** Espera-se que os estudantes respondam que em pesquisas eleitorais é comum o uso do termo *margem de erro*.

8 Considerando a temática apresentada pela pesquisa, procure outras informações sobre o assunto e converse com os colegas e o professor sobre ações que entidades governamentais podem fazer para conscientizar a população sobre esse tipo de violência. **8.** Resposta pessoal.

9 Em grupos, elaborem cartazes de conscientização sobre a violência contra as mulheres. Com a permissão da escola e de outros estabelecimentos que frequentam, colem esses cartazes em lugares de grande visibilidade. **9.** Resposta pessoal.

2 Números quadrados perfeitos

Se um número natural é a segunda potência de outro número natural, ele é chamado de **quadrado perfeito**. Então, um quadrado perfeito pode ser escrito como quadrado de outro número natural.

Observe alguns exemplos.

a) 4 é quadrado perfeito, pois $4 = 2^2$.

b) 81 é quadrado perfeito, pois $81 = 9^2$.

O número 32 não é quadrado perfeito, pois ele não é quadrado de nenhum número natural. Observe que 32 está entre dois quadrados perfeitos:

$$25 < 32 < 36,$$

em que $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, e entre 5 e 6 não há nenhum número natural.

Assim, para produzir quadrados perfeitos, basta escolher um número natural e elevá-lo ao quadrado. Por exemplo, 12 é um número natural; então, $12^2 = 144$, que é um quadrado perfeito.

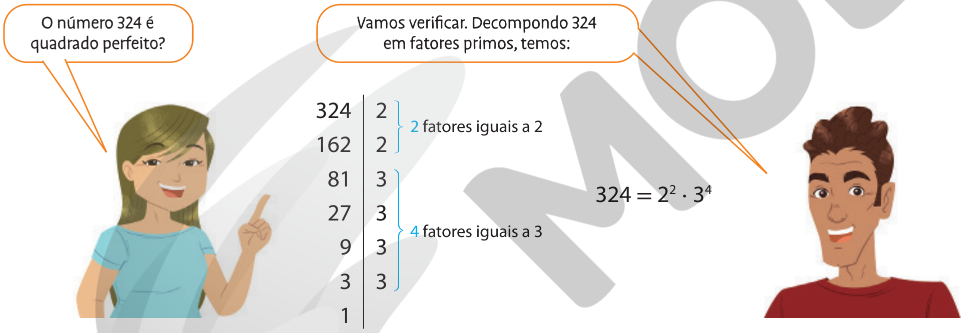
Observe o que acontece quando decompomos 12 e 144 em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}12\\6\end{array} & \left.\begin{array}{l}2\\2\end{array}\right\}\text{ 2 fatores iguais a 2}\\
3 & 3 \rightarrow \text{ 1 fator igual a 3}\\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}144\\72\\36\\18\end{array} & \left.\begin{array}{l}2\\2\\2\\2\end{array}\right\}\text{ 4 fatores iguais a 2}\\
\begin{array}{r}9\\3\end{array} & \left.\begin{array}{l}3\\3\end{array}\right\}\text{ 2 fatores iguais a 3}\\
1 &
\end{array}$$

Observe que 144 tem o dobro de fatores primos de 12:

- 12 tem **2** fatores iguais a 2 e **1** fator igual a 3;
- 144 tem **4** fatores iguais a 2 e **2** fatores iguais a 3.

Podemos verificar se um número é quadrado perfeito decompondo-o em fatores primos e verificando se a quantidade de cada um desses fatores é par.



$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r}324\\162\end{array} & \left.\begin{array}{l}2\\2\end{array}\right\}\text{ 2 fatores iguais a 2}\\
\begin{array}{r}81\\27\\9\\3\end{array} & \left.\begin{array}{l}3\\3\\3\\3\end{array}\right\}\text{ 4 fatores iguais a 3}\\
1 &
\end{array}
\qquad 324 = 2^2 \cdot 3^4$$

ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Note que todos os expoentes dos fatores são pares. Então, 324 é um quadrado perfeito.

2. Números quadrados perfeitos

Habilidades da BNCC: **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Retome com os estudantes a noção de quadrado perfeito e a fatoração de números naturais. Para decidir se um número é ou não quadrado perfeito, eles devem compreender que o algarismo das unidades do número pode dar pistas. Ressalte que:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$10^2 = 100$

Assim, um número quadrado perfeito só pode terminar em 1, 4, 9, 6, 5 e zero. Os quadrados perfeitos que terminam em:

- 1 são obtidos apenas com bases terminadas em 1 ou 9 ($1^2 = 1$ e $9^2 = 81$);
- 4, apenas com bases terminadas em 2 ou 8 ($2^2 = 4$ e $8^2 = 64$);
- 5, apenas com bases terminadas em 5 ($5^2 = 25$);
- 6, apenas com bases terminadas em 4 ou 6 ($4^2 = 16$ e $6^2 = 36$);
- 9, apenas com bases terminadas em 3 ou 7 ($3^2 = 9$ e $7^2 = 49$);
- 0, além do próprio zero, são potências de base 10 e de expoente par: $100 = 10^2$, $10\,000 = (100)^2$ etc., ou são produtos de quadrados perfeitos por essas potências de base 10: $900 = 9 \cdot 100$; $160\,000 = 16 \cdot 10\,000$ etc.

Também é importante reconhecerem os quadrados perfeitos de 1 a 100: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. A identificação de quadrados perfeitos ou dos mais próximos de um número natural dado é a base para o cálculo de raízes quadradas.

Números quadrados perfeitos

Explore com os estudantes a decomposição em fatores primos como mais um processo de reconhecimento de quadrados perfeitos, principalmente para números maiores que 100.

A associação de um número quadrado perfeito com a possibilidade de obter um quadrado com a mesma quantidade de quadradinhos dá significado ao aprendizado desse tema. Forneça malhas quadriculadas e peça aos estudantes que representem os quadrados perfeitos de 1 a 100 pelo respectivo quadrado que pode ser formado.

Exercícios propostos

No **exercício 19**, para determinar os quadrados perfeitos entre 100 e 200, podem-se determinar as seguintes potências:

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$

Que representam os quadrados perfeitos solicitados.

No **exercício 20**, temos:

a) $225 = 3^2 \cdot 5^2$

b) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

c) $441 = 3^2 \cdot 7^2$

d) $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

e) $576 = 2^6 \cdot 3^2$

f) $784 = 2^4 \cdot 7^2$

O **exercício 21**, ao propor aos estudantes que imaginem uma figura e apliquem a reversibilidade da potenciação, antecipa o cálculo da raiz quadrada.

Acompanhe uma resolução desse exercício:

Como os quadradinhos devem formar um quadrado maior, os lados devem ter a mesma quantidade de quadradinhos. Logo, procuramos um número que elevado ao quadrado resulte em 144. Esse número é o 12.

Portanto, em cada linha desse novo quadrado deve haver 12 quadradinhos.

Uma ampliação dessa atividade pode ser feita ao perguntar aos estudantes quantos quadradinhos há em cada coluna desse quadrado maior. Eles devem concluir que há 12 quadradinhos em cada coluna.

Acompanhe como podemos encontrar o número que gerou o quadrado perfeito 324:

$$324 = 2^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot (3^2)^2 = (2 \cdot 3^2)^2 = 18^2$$

Então, podemos dizer que 324 é quadrado perfeito, porque existe o número natural 18, que, elevado ao quadrado, resulta 324.

ILUSTRAÇÕES: SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

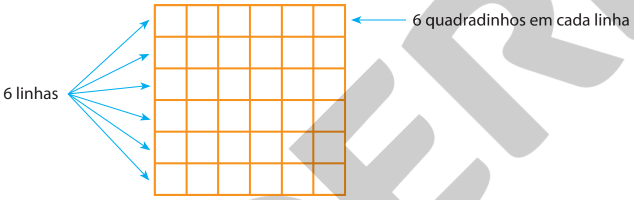
ímpar

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

Note que 72 tem um número ímpar de fatores iguais a 2. Então, 72 não é um quadrado perfeito.

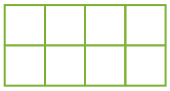
Podemos representar geometricamente um número quadrado perfeito. Por exemplo, com 36 quadradinhos iguais é possível formar um quadrado maior, porque 36 é um número quadrado perfeito.

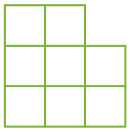
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



total de quadradinhos: $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$

Note que, com 8 quadradinhos iguais, não é possível formar um quadrado maior, pois 8 não é quadrado perfeito.





EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19 Determine os quadrados perfeitos entre 100 e 200. **19.** 121, 144, 169 e 196.

20 Efetuando a decomposição em fatores primos, verifique entre os números a seguir quais são quadrados perfeitos. **20.** Alternativas **a**, **c**, **e**, **f**.

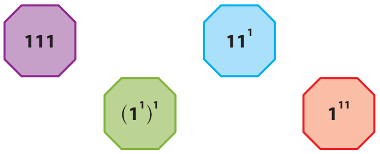
a) 225 **c)** 441 **e)** 576

b) 360 **d)** 480 **f)** 784

21 Com 144 quadradinhos iguais e justapostos, Fernando pode construir um quadrado maior. Quantos quadradinhos há em cada linha desse novo quadrado?
21. 12 quadradinhos.

22 Com quantos quadradinhos iguais posso construir um quadrado maior que tenha 8 quadradinhos justapostos em cada linha? **22.** 64 quadradinhos.

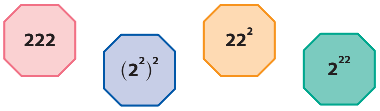
23 Reúna-se com um colega e leiam o texto a seguir. Vamos usar três algarismos iguais para formar alguns números. A única operação que pode ser utilizada é a potenciação. Ao usar três algarismos iguais a 1, obtemos os números:



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

É fácil verificar que o maior desses números é 111, pois $(1^1)^1 = 1^1 = 1$; $11^1 = 11$ e $1^{11} = 1$.

Com três algarismos iguais a 2, obtemos os números:



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Agora, respondam às questões a seguir no caderno.

23. a) $2^{22} = 4\,194\,304$

a) Qual é o maior desses números?

b) Quais destes números são quadrados perfeitos: 2^{22}, $(2^2)^2$ ou 22^2? Justifiquem a resposta.

24 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado por vocês, sobre quadrados perfeitos. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **24.** Resposta pessoal.

23. b) Todos, pois $2^{22} = (2^{11})^2$, $(2^2)^2 = 2^4$ e 22^2 já está na forma de quadrado perfeito.

3 Raiz quadrada de números racionais não negativos

Quando calculamos o quadrado de um número natural, estamos determinando um número quadrado perfeito. Por exemplo:

$$15^2 = 225$$

Nesse caso, podemos dizer:

- 225 é o quadrado de 15;
- 15 é a raiz quadrada de 225, que indicamos da seguinte maneira: $15 = \sqrt{225}$

Isso ocorre com qualquer número racional não negativo. Observe alguns exemplos.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$\frac{4}{25}$ é o quadrado de $\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$ é a raiz quadrada de $\frac{4}{25}$, isto é, $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

b) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, pois $(1{,}2)^2 = 1{,}44$

c) $13^2 = 169$; então, $13 = \sqrt{169}$

Da mesma maneira que representamos os números quadrados perfeitos pela quantidade de quadradinhos que formam um quadrado maior, também podemos relacionar o quadrado de um número racional não negativo à medida da área de uma região quadrada cujo lado tem a medida representada por esse número (em determinada unidade de medida de comprimento).

Exercícios propostos

No **exercício 22**, como cada linha do novo quadrado deverá ter 8 quadradinhos, devemos elevar o número 8 ao quadrado para obter a quantidade de quadradinhos que formam o novo quadrado.

Como $8^2 = 64$, o novo quadrado terá 64 quadradinhos.

No **exercício 23**, os números apresentados são 222, $(2^2)^2 = 4^2 = 16$, $22^2 = 484$ e $2^{22} = 4\,194\,304$. Destes, o maior é 2^{22}.

Proponha aos estudantes outros grupos de números: 333, 33^3, $(3^3)^3$ e 3^{33}.

Nesse caso, nenhum deles é quadrado perfeito porque não é possível expressá-los por uma potência de expoente 2:

- 333 termina em 3; logo, não é quadrado perfeito.
- $33^3 = (3 \cdot 11)^3$ não pode ser expresso por potência de expoente 2.
- $(3^3)^3 = 3^9 = 3^8 \cdot 3$ não pode ser expresso por potência de expoente 2 por causa do fator 3.
- $3^{33} = 3^{3 \cdot 11}$ não pode ser expresso por potência de expoente 2.

3. Raiz quadrada de números racionais não negativos

Habilidades da BNCC: **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Estendemos a relação de potências de expoente 2 com a formação de quadrados para bases racionais positivas, associando agora à noção de área do quadrado e, dessa maneira, ampliamos o desenvolvimento das habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04) para, depois, estender sua aplicação a qualquer número real positivo.

Inicialmente, retome com os estudantes o cálculo de raízes quadradas exatas de números inteiros não negativos, usando como base o que foi visto anteriormente sobre os quadrados perfeitos. Por exemplo:

- 144 é um quadrado perfeito porque $12^2 = 144$; então, podemos dizer que a raiz quadrada de 144 é 12, isto é, o número que elevado ao quadrado resulta em 144 é o 12.
- 200 não é um quadrado perfeito (200 = 2 · 100, e 2 não é quadrado perfeito). Isso significa que não há número natural que elevado ao quadrado resulta em 200, ou seja, 200 não tem raiz quadrada exata.
- 400 é quadrado perfeito, pois é 4 · 100, ou seja, pode ser expresso por $(2 \cdot 10)^2$. Isso significa que o número 20 elevado ao quadrado resulta em 400; então, podemos dizer que a raiz quadrada de 400 é 20, isto é, o número que elevado ao quadrado resulta em 400 é o 20.

Raiz quadrada de números racionais não negativos

Para o cálculo de raiz quadrada, podemos usar o procedimento de situar o número dado entre quadrados perfeitos terminados em zero (para facilitar) e descobrir que números poderiam ser as raízes. Calculando o quadrado dessas possíveis raízes, comprovamos qual é o número procurado. Por exemplo:

- Qual é a raiz quadrada de 576? O problema se resume a procurar um número que elevado ao quadrado resulte em 576.

Vamos situar o 576 entre dois quadrados perfeitos (terminados em zeros para facilitar):

$$\underset{\underset{20^2}{\downarrow}}{400} < 576 < \underset{\underset{30^2}{\downarrow}}{900}$$

Então, se a raiz quadrada de 576 for exata, ela é um número entre 20 e 30. Mas como 576 tem final 6, as únicas possibilidades de isso ocorrer seriam potências cujas bases tivessem final 4 ou 6, isto é, haveria as possibilidades 24 ou 26. Como 400 é mais próximo de 576, testamos primeiro o 24 : $24 \cdot 24 = 576$. Podemos concluir que 24 elevado ao quadrado resulta em 576, isto é, a raiz quadrada de 576 é 24.

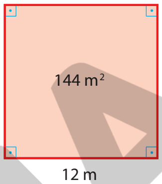
Comente com os estudantes que, caso a raiz quadrada procurada seja de um número racional positivo expresso na forma de fração, podemos trabalhar com o numerador e o denominador separadamente para depois montar a fração que será a raiz quadrada procurada. Se esse número racional estiver expresso na forma decimal, fazemos sua representação na forma de fração e seguimos o que já foi exposto.

Observação

- No estudo que faremos, vamos sempre nos referir à medida da área da região poligonal simplesmente por medida da área do polígono. Por exemplo, a medida da área de uma região quadrada será denominada área do quadrado.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

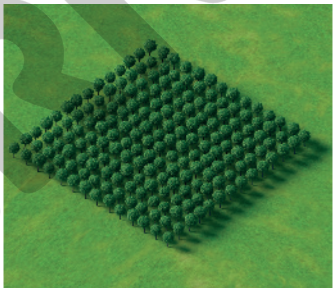
Uma região quadrada com área medindo 144 m² tem o lado com 12 m de medida de comprimento, pois $12^2 = 144$.

Então, $12 = \sqrt{144}$.

Assim, para encontrar a medida ℓ do lado de um quadrado, sabendo que a medida de sua área é A, basta encontrar a raiz quadrada de A.

$$\ell = \sqrt{A}, \text{ pois } \ell^2 = A$$

Situação 2



ENOT-POLOSKUN/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

A área de uma plantação, que tem o formato de um quadrado, mede 256 m². Para determinar a medida do lado do terreno dessa plantação, temos de calcular $\sqrt{256}$, pois $\ell^2 = 256$.

Como o número ℓ gera o quadrado perfeito 256, ele pode ser calculado ao decompor 256 em fatores primos. Assim, podemos escrever:

$$256 = 2^8 = (\underbrace{2^4}_{\ell})^2 = 16^2$$

Portanto, o lado do terreno dessa plantação mede 16 m.

Cálculo da raiz quadrada pela decomposição em fatores primos

Vimos que, para identificar um número quadrado perfeito, verificamos se ele tem uma quantidade par de cada um de seus fatores primos.

Isso também nos possibilita encontrar o número que gerou o quadrado perfeito. Esse número gerador é a raiz quadrada do quadrado perfeito dado.

Acompanhe um exemplo.

$$225 \text{ é quadrado perfeito, pois } 225 = \overbrace{3^2 \cdot 5^2}^{\text{número par de fatores}} = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$$

Então, $225 = 15^2$ e, portanto, $15 = \sqrt{225}$.

Esse procedimento constitui um meio de determinar a raiz quadrada de um número quadrado perfeito.

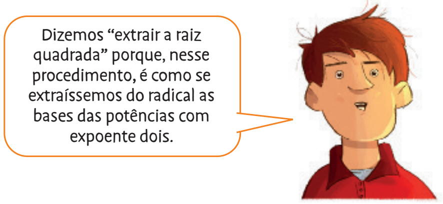
Agora, para dar mais um exemplo, vamos determinar $\sqrt{576}$. Ao decompor 576 em fatores primos, obtemos:

$$576 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3^1)^2 = 24^2$$

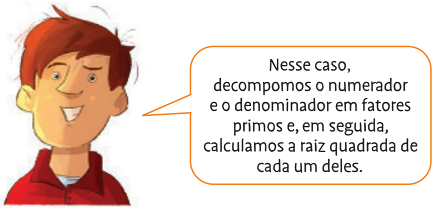
Como $576 = 24^2$, concluímos que $\sqrt{576} = 24$.

Observe que 24, decomposto em fatores primos ($24 = 2^3 \cdot 3^1$), apresenta metade dos fatores primos de 576.

Assim, de modo prático, podemos dizer que, para extrair a raiz quadrada de números quadrados perfeitos, primeiro decompomos o número em fatores primos; em seguida, dividimos cada expoente por 2; e, finalmente, efetuamos a multiplicação obtida.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Observe mais alguns exemplos.

a) $\sqrt{\dfrac{36}{625}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3^2}{5^4}} = \dfrac{2 \cdot 3}{5^2} = \dfrac{6}{25}$

b) $\sqrt{12{,}96} = \sqrt{\dfrac{1\,296}{100}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 5^2}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 5} = \dfrac{4 \cdot 9}{10} = \dfrac{36}{10} = 3{,}6$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

25 Justifique cada igualdade a seguir.

a) $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ **25. a)** $(0{,}8)^2 = 0{,}64$

b) $\sqrt{2^{10} \cdot 3^2} = 2^5 \cdot 3$ **25. b)** $(2^5 \cdot 3)^2 = 2^{10} \cdot 3^2$

26 Extraia a raiz quadrada de cada número a seguir pela decomposição em fatores primos.

a) 256 **26. a)** 16
b) 196 **26. b)** 14
c) 484 **26. c)** 22
d) 729 **26. d)** 27
e) 1 600 **26. e)** 40
f) 1 024 **26. f)** 32

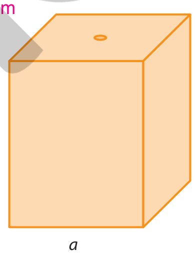
27 (Unirio-RJ) O valor de

$\sqrt{15 - \sqrt{32 + \sqrt{25 - \sqrt{81}}}}$ é: **27.** Alternativa **c.**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

28 Um paliteiro de base quadrada tem o formato da figura a seguir. Sabendo que a soma das medidas das áreas das faces laterais do paliteiro é igual a 162 cm² e que a área de todas as faces mede 202,5 cm², determine a medida *a* do lado da base desse paliteiro.

28. $a = 4{,}5$ cm



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Cálculo da raiz quadrada pela decomposição em fatores primos

Apresente o procedimento da decomposição em fatores primos como outro modo de determinar as raízes quadradas exatas de números racionais envolvidos.

Seguem alguns exemplos:

- $\sqrt{\dfrac{1}{25}} = ?$

Note que $1 = 1^2$ e $25 = 5^2$. Assim, concluímos que $\dfrac{1}{25} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$. Logo:

$$\sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$$

- $\sqrt{0{,}2116} = ?$

Como o número racional está na forma decimal, vamos expressá-lo na forma de fração:

$$0{,}2116 = \dfrac{2\,116}{10\,000}$$

Agora, precisamos procurar o número que elevado ao quadrado resulta em $\dfrac{2\,116}{10\,000}$.

Sabemos que $10\,000 = (100)^2$. Então, precisamos decompor o número 2 116 em fatores primos e expressá-lo com uma potência de expoente 2, se possível.

$2\,116 = 4 \cdot 529 = 4 \cdot 23 \cdot 23 =$
$= 2^2 \cdot 23^2 = (2 \cdot 23)^2 = 46^2$

Utilizando a calculadora, pode-se verificar que:

$46 \cdot 46 = 2\,116$

Assim, concluímos que

$\dfrac{2\,116}{10\,000} = \left(\dfrac{46}{100}\right)^2$; logo:

$\sqrt{0{,}2116} = \sqrt{\dfrac{2\,116}{10\,000}} =$

$= \dfrac{46}{100} = 0{,}46$

Fazendo a verificação:

$0{,}46 \cdot 0{,}46 = 0{,}2116$

Exercícios propostos

O **exercício 27** pode ser feito em duplas, pois a troca de experiências aumenta o repertório de estratégias dos estudantes. Comente que devem resolver primeiro as raízes quadradas. Assim, devem começar por $\sqrt{81}$:

$$\sqrt{15 - \sqrt{32 + \sqrt{25 - \sqrt{81}}}} = \sqrt{15 - \sqrt{32 + \sqrt{25 - 9}}} = \sqrt{15 - \sqrt{32 + \sqrt{16}}} =$$

$$= \sqrt{15 - \sqrt{32 + 4}} = \sqrt{15 - \sqrt{36}} = \sqrt{15 - 6} = \sqrt{9} = 3 \text{ (alternativa } \mathbf{c}\text{).}$$

As resoluções dos **exercícios 25**, **26** e **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 29** a **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Raiz quadrada aproximada

Nesse tópico, apresentamos o cálculo aproximado de uma raiz quadrada, por falta ou por excesso, a menos de uma unidade. Isso ocorre quando queremos calcular a raiz quadrada aproximada de um número que não é quadrado perfeito.

Amplie o trabalho apresentando outros exemplos na lousa, além do dado no livro.

Exercícios propostos

A seguir, apresentamos uma resolução do **exercício 32**:

- **a)** O número 110 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 100 (10^2) e 121 (11^2).
- **b)** Como a raiz quadrada de 110 deve estar entre dois números naturais, ela deve estar entre a raiz quadrada dos quadrados perfeitos 100 e 121. Logo, a raiz de 110 está entre 10 e 11.
- **c)** Pelo **item b**, temos que a raiz quadrada de 110 por falta, a menos de uma unidade, é 10.

29 Usando a decomposição em fatores primos, calcule a raiz quadrada de:

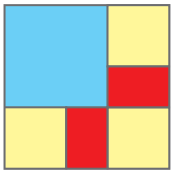
a) $\frac{25}{576}$; **29. a)** $\frac{5}{24}$

b) 0,01; **29. b)** 0,1

c) $\frac{64}{1\,225}$; **29. c)** $\frac{8}{35}$

d) 19,36. **29. d)** 4,4

30 Ivan vai construir uma pipa colorida no formato de um quadrado. Para isso, ele recortou um quadrado de papel azul com área medindo 2 500 cm², três quadrados de papel amarelo de área medindo 900 cm² cada um e dois retângulos de papel vermelho de lados medindo 20 cm por 30 cm. Qual será a medida do lado dessa pipa? **30.** 80 cm



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

31 O piso de um salão no formato de um quadrado é coberto com 10 800 lajotas retangulares de lados medindo 40 cm por 30 cm. Determine no caderno:

a) a medida da área do salão; **31. a)** 1 296 m²

b) as dimensões do salão. **31. b)** 36 m por 36 m

Raiz quadrada aproximada

Os números quadrados perfeitos têm como raiz quadrada um número natural que, elevado ao quadrado, reproduz o número dado.

Observe o que acontece quando queremos extrair a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Para exemplificar, vamos calcular a raiz quadrada do número 31.

O número 31 está compreendido entre os números quadrados perfeitos 25 e 36.

$$25 < 31 < 36$$

Então, $\sqrt{31}$ deve estar compreendida entre $\sqrt{25}$ e $\sqrt{36}$.

$$\sqrt{25} < \sqrt{31} < \sqrt{36}$$

Como $\sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{36} = 6$, temos:

$$5 < \sqrt{31} < 6$$

Dizemos, então, que:

- **5** é a raiz quadrada **aproximada por falta**, **a menos de uma unidade**, do número 31;
- **6** é a raiz quadrada **aproximada por excesso**, **a menos de uma unidade**, do número 31.

Em geral, considera-se raiz quadrada aproximada de um número não quadrado perfeito a raiz quadrada **aproximada por falta**, a menos de uma unidade. Indica-se que 5 é a raiz quadrada aproximada por falta de 31, escrevendo-se:

$$\sqrt{31} \simeq 5$$

(Lemos: "a raiz quadrada do número trinta e um é aproximadamente igual a cinco".)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Considerando o número 110, responda.

a) Entre quais números quadrados perfeitos ele está compreendido? **32. a)** 100 e 121.

b) A raiz quadrada desse número está compreendida entre quais números naturais? **32. b)** 10 e 11.

c) Qual é a raiz quadrada por falta, a menos de uma unidade? **32. c)** 10

33 Qual é o menor número natural que devemos subtrair de 640 para obter um número quadrado perfeito? E qual é a raiz quadrada aproximada de 640 por falta, a menos de uma unidade? **33.** 15; 25.

34 No século XX, qual foi o único ano representado por um número quadrado perfeito? E no século XXI, qual será o ano? **34.** 1936; 2025.

35 Faça estimativas para obter o valor aproximado de:

a) $\sqrt{51}$ **35. a)** 7

b) $50 \cdot \sqrt{51}$ **35. b)** 350

c) $200 \cdot \sqrt{51}$ **35. c)** 1 400

Como você pode comprovar os resultados que obteve? **35.** Resposta possível: usando uma calculadora.

Raiz quadrada com aproximação decimal

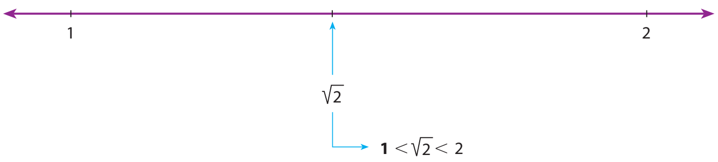
A seguir, vamos aprender a calcular a raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito com aproximação decimal.

Como exemplo, vamos considerar o número 2. Qual é o número racional que, elevado ao quadrado, resulta 2? Observe.

1 não pode ser, pois $1^2 = 1$

2 não pode ser, pois $2^2 = 4$

Dessa maneira, $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1 e 2 $(1 < \sqrt{2} < 2)$.



Como não existe nenhum número inteiro cujo quadrado dê 2, dizemos que 1 é a raiz quadrada **aproximada** do número 2.

Vamos procurar um número com uma casa decimal cujo quadrado seja mais próximo de 2.

$(1{,}1)^2 = 1{,}21 < 2$

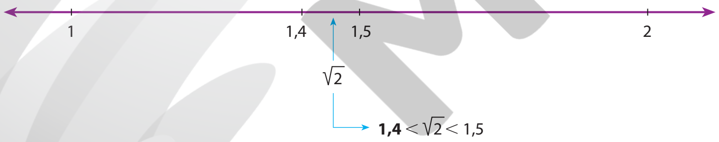
$(1{,}2)^2 = 1{,}44 < 2$

$(1{,}3)^2 = 1{,}69 < 2$

$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$

$(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$

Como também não existe número com uma casa decimal cujo quadrado seja igual a 2, concluímos que $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1,4 e 1,5.



Nesse caso, dizemos que a raiz quadrada aproximada do número 2 com uma casa decimal é igual a 1,4 e escrevemos $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 33** e **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

O **exercício 35**, além do uso da calculadora, tem como objetivo o experimento da estimativa.

Apresentar métodos diferentes para fazer cálculos ou resolver problemas é uma estratégia enriquecedora.

Acompanhe uma resolução:

a) $\sqrt{51} \simeq ?$

$6 \cdot 6 = 36$

$7 \cdot 7 = 49$

$8 \cdot 8 = 64$

Logo, a $\sqrt{51}$ é aproximadamente 7.

b) $50 \cdot \sqrt{51} \simeq ?$

Pelo **item a**, obtemos $\sqrt{51} \simeq 7$.

Então:

$50 \cdot \sqrt{51} \simeq 50 \cdot 7$

$50 \cdot \sqrt{51} \simeq 350$

c) $200 \cdot \sqrt{51} \simeq ?$

Pelo **item a**, obtemos $\sqrt{51} \simeq 7$.

Então:

$200 \cdot \sqrt{51} \simeq 200 \cdot 7$

$200 \cdot \sqrt{51} \simeq 1400$

- Podemos comprovar os resultados utilizando uma calculadora.

Raiz quadrada com aproximação decimal

Nesse tópico também vamos trabalhar com cálculo de raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito. Porém, aqui, a aproximação é decimal.

Reproduza os exemplos na lousa, destacando as etapas com os estudantes. Verifique se eles compreendem os passos de cada etapa.

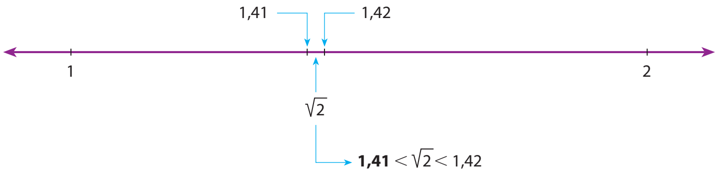
Amplie o trabalho apresentando-lhes outros exemplos. Depois, peça a alguns estudantes que mostrem na lousa o procedimento que utilizaram. Incentive o uso de estratégias próprias e a descrição do processo.

Vamos tentar uma aproximação melhor, com duas casas decimais, para $\sqrt{2}$.

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$$

$$(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$$

Logo, $\sqrt{2}$ é um número compreendido entre 1,41 e 1,42.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Então, podemos dizer que a raiz quadrada aproximada do número 2 com duas casas decimais é igual a 1,41 e escrevemos $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$.

Se prosseguirmos, encontraremos a raiz quadrada aproximada de 2 com quantas casas decimais desejarmos, sem, entretanto, encontrar um número decimal cujo quadrado resulte 2.

Acompanhe outros exemplos.

a) Calcule a raiz quadrada do número 58 com duas casas decimais.

$$\left.\begin{array}{l} 7^2 = 49 < 58 \\ 8^2 = 64 > 58 \end{array}\right\} \text{Então, } \mathbf{7} < \sqrt{58} < 8.$$

7 é a raiz quadrada aproximada de 58.

$$(7{,}1)^2 = 50{,}41 < 58$$

$$(7{,}2)^2 = 51{,}84 < 58$$

$$(7{,}5)^2 = 56{,}25 < 58$$

$$\left.\begin{array}{l} (7{,}6)^2 = 57{,}76 < 58 \\ (7{,}7)^2 = 59{,}29 > 58 \end{array}\right\} \text{Então, } \mathbf{7{,}6} < \sqrt{58} < 7{,}7.$$

7,6 é a raiz quadrada aproximada com uma casa decimal do número 58.

$$\left.\begin{array}{l} (7{,}61)^2 = 57{,}9121 < 58 \\ (7{,}62)^2 = 58{,}0644 > 58 \end{array}\right\} \text{Então, } \mathbf{7{,}61} < \sqrt{58} < 7{,}62.$$

Assim, a raiz quadrada de 58 com duas casas decimais é 7,61. Escrevemos $\sqrt{58} \simeq 7{,}61$.

b) Calcule a raiz quadrada do número 7,2 com uma casa decimal.

O número 7,2 está compreendido entre os quadrados perfeitos 4 e 9. Então:

$$\sqrt{4} < \sqrt{7{,}2} < \sqrt{9}, \text{ ou seja, } 2 < \sqrt{7{,}2} < 3$$

A raiz quadrada de 7,2 é um número compreendido entre 2 e 3.

Vamos começar testando 2,5.

$$(2{,}5)^2 = 6{,}25 < 7{,}2$$

$$(2{,}6)^2 = 6{,}76 < 7{,}2$$

$$(2{,}7)^2 = 7{,}29 > 7{,}2$$

Assim, a raiz quadrada do número 7,2 com uma casa decimal é 2,6. Escrevemos $\sqrt{7{,}2} \simeq 2{,}6$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

36 Verifique se 1,7 pode ser considerado uma raiz quadrada aproximada de 3. **36.** Sim.

37 Entre os números 3,87 e 3,88, qual deles se aproxima mais de $\sqrt{15}$? **37.** 3,87

38 Qual é o número com uma casa decimal que representa a raiz quadrada aproximada de 265? **38.** 16,2

39 Calcule a raiz quadrada aproximada com uma casa decimal de:

a) 572 **39. a)** 23,9
b) 28,19 **39. b)** 5,3
c) 42,55 **39. c)** 6,5
d) 12,6 **39. d)** 3,5

40 Com uma calculadora, encontre a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais de:

a) $\sqrt{88}$ **40. a)** 9,38
b) $\sqrt{8\,800}$ **40. b)** 93,81
c) $\sqrt{6\,000\,000}$ **40. c)** 2 449,49
d) $\sqrt{6}$ **40. d)** 2,45
e) $\sqrt{1\,000}$ **40. e)** 31,62
f) $\sqrt{100\,000}$ **40. f)** 316,23

41 Com uma calculadora, mas sem usar a tecla √, encontre a raiz quadrada aproximada com duas casas decimais:

a) $\sqrt{410}$ **41. a)** 20,24
b) $\sqrt{1\,715}$ **41. b)** 41,41
c) $\sqrt{1\,999}$ **41. c)** 44,71
d) $\sqrt{3\,500}$ **41. d)** 59,16

42 Agora, usando a tecla √ da calculadora, determine as raízes quadradas do exercício anterior e verifique se os resultados obtidos nele estão de acordo com os novos resultados. **42.** Espera-se que os resultados estejam de acordo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Sabendo que $273^2 = 74\,529$, calcule:

Pense mais um pouco...:

a) $\sqrt{745,29}$ **a)** 27,3
b) $\sqrt{7\,452\,900}$ **b)** 2 730

4 Os números reais

Considere o número 0,101112…

Observando a formação desse número, vamos supor que podemos dar continuidade à sua parte decimal do seguinte modo: 0,10111213…; 0,1011121314…; e assim por diante.

Como a representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica, ele não pode ser escrito na forma de fração; logo, esse número não é racional.

Agora, observe este outro número: 0,52552555255552...

$$0{,}\underbrace{5}_{\text{um cinco}}2\underbrace{55}_{\text{dois cincos}}2\underbrace{555}_{\text{três cincos}}2\underbrace{5555}_{\text{quatro cincos}}2...$$

Imagine que, para continuar escrevendo esse número, devemos acrescentar sempre um algarismo 5 aos grupos de 5 separados por 2:

$$0{,}52552555255552\underbrace{55555}_{\text{cinco cincos}}2\underbrace{555555}_{\text{seis cincos}}2...$$

Exercícios propostos

Com esses exercícios, espera-se que os estudantes mobilizem os conhecimentos construídos acerca de raiz quadrada aproximada. Socialize as diferentes estratégias que surgirem.

Os **exercícios 41** e **42** propõem o uso da calculadora como instrumento de pesquisa e de validação de resultados.

As resoluções dos **exercícios 36** a **42** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Pense mais um pouco...

Nesta seção, incentive os estudantes a obter o resultado apenas com base na observação da igualdade informada, sem efetuar outros cálculos. Espera-se que eles percebam que:

- como $745,29 = \dfrac{74\,529}{100}$ e $\sqrt{74\,529} = 273$, obtemos: $\sqrt{745,29} = \dfrac{273}{10} = 27,3$
- como $7\,452\,900 = 74\,529 \cdot 100$ e $\sqrt{74\,529} = 273$, obtemos: $\sqrt{7\,452\,900} = 273 \cdot 10 = 2\,730$

4. Os números reais

Habilidades da BNCC:
EF09MA02, **EF09MA03**
e **EF09MA04**.

Neste tópico, iniciamos a apresentação dos números irracionais, por meio da análise da forma decimal de números com vírgula que não sejam dízimas periódicas. Os estudantes poderão ampliar a compreensão do conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais. Assim, desenvolvem-se as habilidades (EF09MA02) e (EF09MA03).

Os números reais

Ressalte aos estudantes que o conjunto dos números reais é composto por todos os números racionais e por todos os números irracionais. Por isso, não há número racional que não seja número real, assim como não há número irracional que não seja número real; então todo número real ou é um número racional ou é um número irracional.

Aproveite a atividade proposta para ser realizada oralmente para que os estudantes percebam o número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA02).

Para ampliar esse assunto, trabalhe com os estudantes questões como:

- Cite um número inteiro que seja real e outro que não seja número real. Espera-se que os estudantes percebam que qualquer número inteiro será um número real e que não há número inteiro que não seja também número real.
- Cite um número real que não seja inteiro. Neste caso, espera-se que os estudantes percebam que há "muitos" números reais que não são inteiros. Podem considerar qualquer número racional não inteiro (como 0,5) ou qualquer número irracional (como $\sqrt{5}$).
- Cite um número real que não seja inteiro nem racional. Neste caso, os estudantes devem perceber que somente os números irracionais satisfazem essa condição.
- Cite um número real que não seja racional, mas seja inteiro. Espera-se que eles percebam que não existe um número real nessas condições, pois todo número inteiro é também número racional.

A representação desse número também não é decimal exata nem periódica. Portanto, esse número não pode ser escrito na forma de fração. Logo, não é um número racional.

Com esses exemplos, percebemos que existem números que não são representados por uma forma decimal exata (com um número finito de casas decimais) nem por uma dízima periódica. Portanto, não podem ser escritos na forma de fração, isto é, na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$; logo, não são números racionais. Esse tipo de número é chamado de **número irracional**.

- Dê exemplos de outros números irracionais indicando uma regra de formação.

Exemplos de números:
- 2,001002003004005...
- –5,9799799979999799997...

Agora, observe a representação decimal dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ com aproximação de sete casas decimais.

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142136 \quad \text{e} \quad \sqrt{3} \simeq 1{,}7320508$$

Por maior que seja o número de casas decimais usadas para representar esses números, nunca vamos encontrar para eles uma representação decimal exata ou periódica. Portanto, não há frações que os representem. Por isso, dizemos que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais. Também é irracional toda raiz quadrada de um número natural que não seja quadrado perfeito, assim como toda raiz quadrada de fração positiva irredutível cujos numerador e denominador não sejam quadrados perfeitos.

Além do número π, que conhecemos do cálculo do comprimento da circunferência, e do número ϕ, explorado na abertura deste capítulo, são irracionais raízes cúbicas, quartas, quintas etc. cujos radicandos não podem ser escritos como potências de expoentes respectivamente iguais a três, a quatro, a cinco etc. Por exemplo, são irracionais os números:

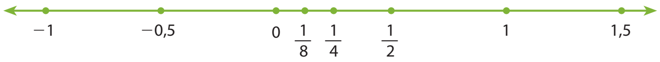
$$\sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{8},\ \sqrt{\frac{3}{10}},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{9}$$

A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais forma um novo conjunto chamado **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

5 Reta real

Já vimos como representar números inteiros em uma reta.

Da mesma maneira, vimos como representar números racionais em uma reta. Na reta a seguir, representamos alguns números racionais.



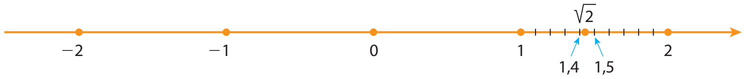
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como sabemos, é impossível representar todos eles, pois, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. Mesmo que isso fosse possível, os pontos que representariam esses números não seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica. Faltariam ainda os pontos correspondentes aos números irracionais para completá-la.

> A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche a reta numérica. A essa reta chamamos de **reta real**.

Vamos representar na reta real o número irracional $\sqrt{2}$.

Já vimos que $\sqrt{2}$ é um número que está entre 1,4 e 1,5; logo, sua localização aproximada na reta real é:



Assim, sabendo a aproximação decimal de uma raiz quadrada não exata, podemos determinar sua posição aproximada na reta real.

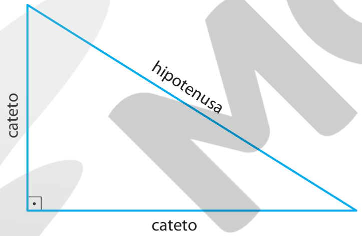
Observação

- Qualquer ponto da reta real tem um único número real correspondente, e todo número real tem um único ponto correspondente na reta.

Localização de alguns números irracionais na reta real

O teorema que estudaremos a seguir vai nos ajudar a determinar a posição de $\sqrt{2}$ e de outros números irracionais na reta real.

Você já sabe que o **triângulo retângulo** é aquele que tem um ângulo interno reto. O maior lado desse triângulo é chamado de **hipotenusa**, e os demais, de **catetos**.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Os triângulos retângulos têm uma propriedade muito especial: com quadrados construídos sobre os catetos, sempre é possível construir quadrado sobre a hipotenusa.

5. Reta real

Habilidades da BNCC:
EF09MA01, **EF09MA02**
e **EF09MA03**.

A completude da reta real deve ser compreendida pelos estudantes, a fim de que desenvolvam a habilidades (EF09MA01), (EF09MA02) e (EF09MA03). Trace uma reta numérica na lousa e pergunte: “Associando cada número natural a pontos dessa reta, sobram pontos dela sem associação?”. Espera-se que os estudantes percebam que sim, pois há os números inteiros negativos que também podem ser associados a pontos da reta numérica e não estão contemplados no conjunto dos números naturais.

Localize alguns números inteiros negativos na reta numérica desenhada e pergunte: “Associando cada número inteiro (o zero, os positivos e os negativos) a pontos dessa reta, sobram pontos sem associação?”. Nesse caso, eles podem perceber que sim, ao recordar que também associamos os números racionais não inteiros (como 1,5 e −0,5) a pontos da reta numérica e esses números não estão contemplados no conjunto dos números inteiros.

Localize, então, alguns números racionais não inteiros (na forma de fração e na forma decimal) para os estudantes perceberem que a reta numérica não estava completa e pergunte: “E agora, associando cada número racional (inteiros e não inteiros) a pontos dessa reta, sobram pontos sem associação?”. Como sabem da existência dos números irracionais (como o caso de $\sqrt{2}$), devem intuir que esses números têm pontos da reta numérica associados a eles.

Comente que os “buracos” na reta numérica, ao considerar apenas os números racionais, são totalmente preenchidos quando consideramos também os números irracionais. Por isso, essa reta numérica completa será chamada de reta real.

Isso ficará mais evidente quando os estudantes verificarem a localização dos números irracionais dados por raízes quadradas não exatas de números racionais positivos.

Localização de alguns números irracionais na reta real

Apresentamos de maneira informal e lúdica o teorema de Pitágoras.

Providencie modelos das peças que montam o quadrado sobre a hipotenusa. Reúna os estudantes em duplas e proponha a atividade antes de mostrar a solução apresentada no livro do estudante. Destaque os elementos de um triângulo retângulo:

- ângulo interno reto com lados chamados de catetos;
- o lado maior, oposto ao ângulo reto, é a hipotenusa.

Depois de concluírem a montagem do quadrado sobre a hipotenusa, combine com os estudantes que o triângulo retângulo usado para o "quebra-cabeça" tem cateto menor medindo *c*, cateto maior medindo *b* e hipotenusa medindo *a*. Então, pergunte:

- Quanto mede o lado do quadrado roxo, colocado sobre o cateto menor? E o lado do quadrado verde, sobre o outro cateto?

Espera-se que os estudantes identifiquem a medida do lado de cada quadrado com a respectiva medida do cateto onde foram colocados. Assim, o quadrado roxo tem lado de medida *c* (e área de medida c^2), e o quadrado verde tem lado de medida *b* (e área de medida b^2).

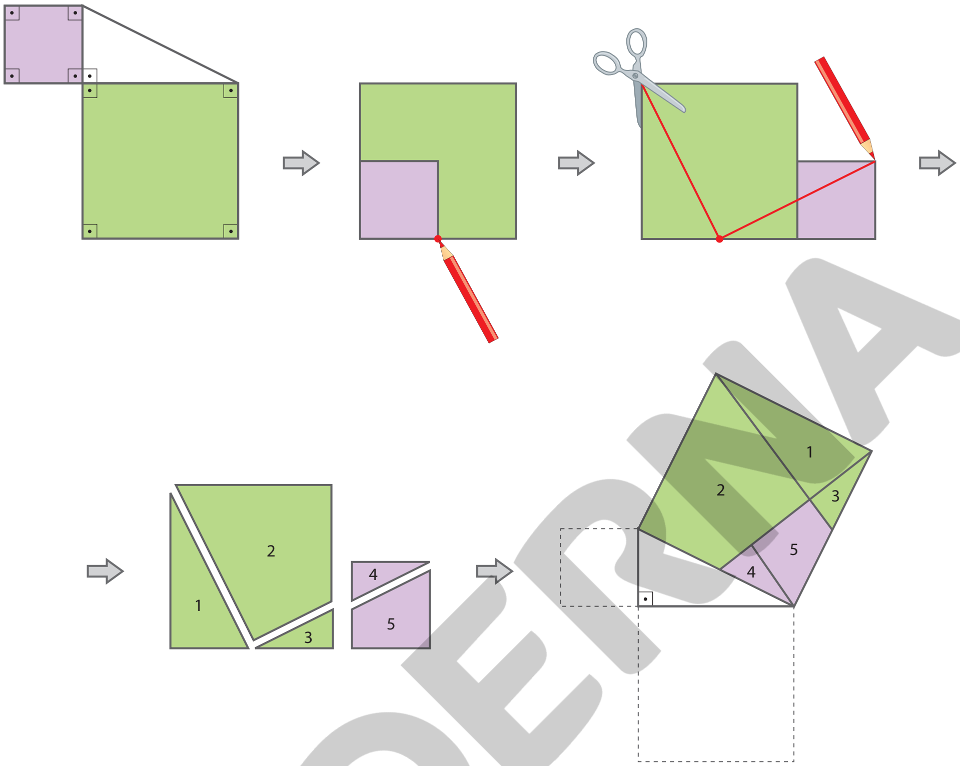
- Quanto mede o lado do quadrado montado sobre a hipotenusa?

Os estudantes devem identificar que o lado desse quadrado tem mesma medida que a hipotenusa do triângulo, ou seja, mede *a* e tem área de medida a^2.

- O que podemos dizer sobre a medida da área do quadrado montado sobre a hipotenusa?

Espera-se que eles percebam que, como esse quadrado foi montado com peças dos quadrados roxo e verde, a medida da área do quadrado maior deve ser a soma das medidas das áreas dos quadrados roxo e verde, ou seja: $b^2 + c^2 = a^2$.

Na primeira figura a seguir, temos um quadrado (pintado de roxo) sobre um cateto e outro quadrado (pintado de verde) sobre outro cateto. Vamos decompô-los de modo conveniente para formar um quadrado sobre a hipotenusa. Observe.



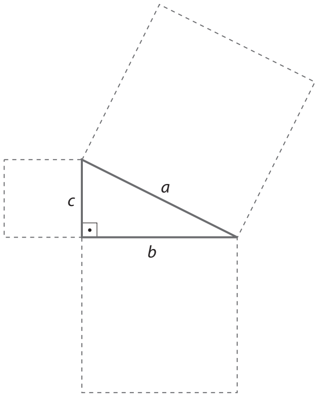
Note que a medida da área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Então, ao indicar por *c* e *b* as medidas dos catetos e por *a* a medida da hipotenusa, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

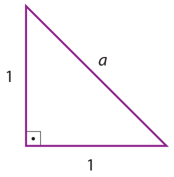
Medida da área de cada quadrado construído sobre os catetos.



Essa relação, chamada de **teorema de Pitágoras**, vale para qualquer triângulo retângulo e será usada para determinar a posição de alguns números irracionais na reta real.

ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Por exemplo, se quisermos representar $\sqrt{2}$ na reta real, construímos um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo $\sqrt{2}$. Observe.

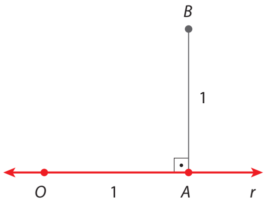


$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$
$$a^2 = 1 + 1$$
$$a^2 = 2$$

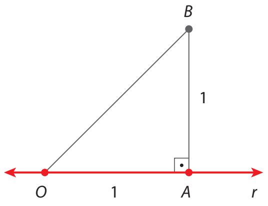
O valor procurado é um número positivo que, elevado ao quadrado, resulta 2. Esse número é $\sqrt{2}$. Logo: $a = \sqrt{2}$.

Então, para representar $\sqrt{2}$ na reta, basta construir um triângulo retângulo de catetos medindo 1 unidade e transferir a medida da hipotenusa para a reta. Acompanhe.

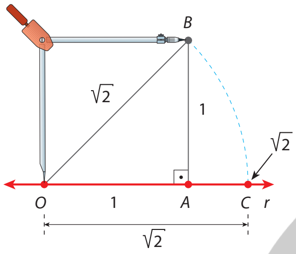
1. Por A, traçamos $\overline{BA} \perp r$, tal que $BA = 1$. Também marcamos o ponto O na reta r, tal que $OA = 1$.



2. Unimos O com B e obtemos $OB = \sqrt{2}$.



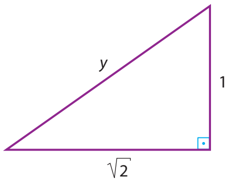
3. Com centro em O e abertura OB, marcamos o ponto C.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

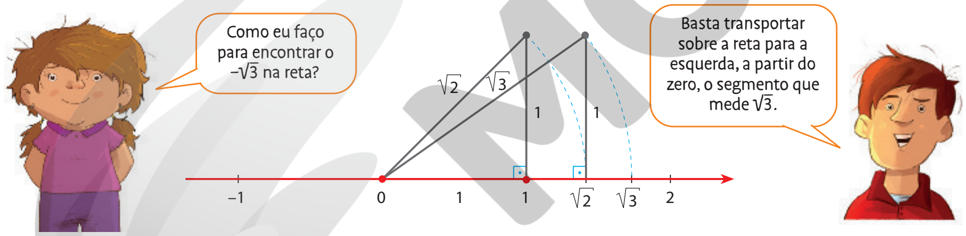
Agora, vamos representar $\sqrt{3}$ na reta numérica. Para isso, podemos construir, por exemplo, um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ e 1. A hipotenusa medirá $\sqrt{3}$ unidades de comprimento.



$$y^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$
$$y^2 = 3$$
$$y = \sqrt{3}$$

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Aproveitando o segmento que representa $\sqrt{2}$, construímos na reta numérica o segmento que mede $\sqrt{3}$.



PERSONAGENS: SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA RETA NUMÉRICA: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Na calculadora, obtemos $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Repare que $\sqrt{3}$ fica entre 2 e o ponto médio do segmento de extremos 1 e 2.

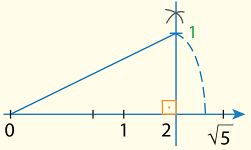
Localização de alguns números irracionais na reta real

Se julgar necessário, relembre a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dessa reta. Depois, reproduza na lousa a construção do segmento de medida $\sqrt{2}$, pedindo aos estudantes que justifiquem cada passo. Por exemplo, pergunte o que garante que o terceiro lado do triângulo mede $\sqrt{2}$, quando tomamos 1 como medida dos dois lados perpendiculares desse triângulo. Espera-se que os estudantes citem a relação trabalhada anteriormente, conhecida como teorema de Pitágoras.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 43** e dos **exercícios 45** a **47** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 44**, como a medida x da hipotenusa é dada por $x^2 = 2^2 + 1^1 = 5$, obtemos $x = \sqrt{5}$. Uma possível figura para o **exercício 44**:



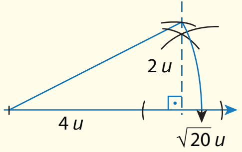
ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Para o **exercício 48**:

Para cada caso a seguir, as medidas usadas são proporcionais, mas não há relação de proporcionalidade entre as diferentes ilustrações, devido ao espaço para representá-las.

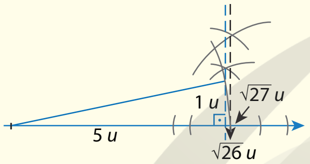
- Construção de $\sqrt{20}\ u$:

  Triângulo retângulo de catetos medindo $4\ u$ e $2\ u$, e hipotenusa medindo $\sqrt{20}\ u$;

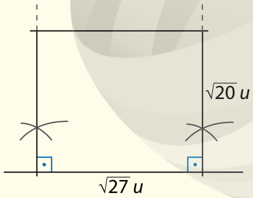


- Construção de $\sqrt{27}\ u$:

  Triângulo retângulo de catetos medindo $5\ u$ e $1\ u$, hipotenusa medindo $\sqrt{26}\ u$; triângulo retângulo de catetos medindo $\sqrt{26}\ u$ e $1\ u$, hipotenusa medindo $\sqrt{27}\ u$.

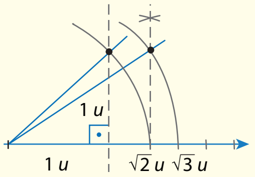


- Retângulo de lados medindo $\sqrt{20}\ u$ por $\sqrt{27}\ u$ (transportando com o compasso as medidas construídas anteriormente):

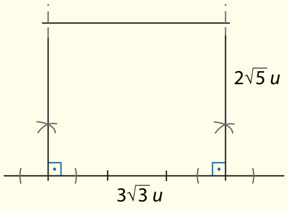


- Construção de $\sqrt{3}\ u$:

  Triângulo retângulo de catetos medindo $1\ u$ e $1\ u$; triângulo retângulo de catetos medindo $\sqrt{2}\ u$ e $1\ u$:



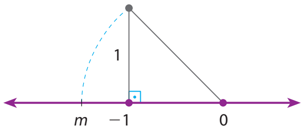
- Construção de $\sqrt{5}\ u$: análoga ao **exercício 44**.
- Retângulo de lados medindo $2\sqrt{5}\ u$ por $3\sqrt{3}\ u$ (por meio do transporte com o compasso das medidas $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$ realizadas anteriormente):



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

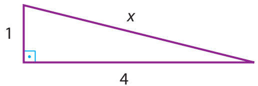
43 Escreva o número irracional que está representado na reta pela letra m. **43.** $-\sqrt{2}$



44 Construa, com auxílio de régua e compasso, um triângulo retângulo com um cateto de 2 unidades de comprimento sobre uma reta numérica e outro cateto de 1 unidade de comprimento. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo e localize na reta numérica o número que expressa a medida da hipotenusa desse triângulo.

44. $\sqrt{5}$; construção de figura.

45 Considere o triângulo retângulo a seguir, cujas medidas dos lados estão indicadas em uma mesma unidade de comprimento.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

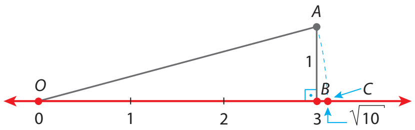
45. a) $\sqrt{17}$

a) Determine o valor de x. **45. b)** Irracional.

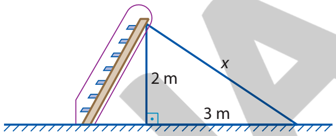
b) Esse número é racional ou irracional?

c) Usando uma calculadora, represente esse número na forma decimal aproximada, com duas casas decimais. **45. c)** 4,12

46 Na figura a seguir, foi representado o número $\sqrt{10}$ na reta numérica. Explique por que essa construção está correta. **46.** Resposta pessoal.



47 A figura a seguir representa um escorregador cujo comprimento, em metro, foi indicado por x.



47. a) $\sqrt{13}$

a) Qual é o número irracional que representa o comprimento desse escorregador?

b) Qual é o comprimento aproximado desse escorregador em centímetro? **47. b)** 361 cm

48. Construção de figura; os produtos são iguais.

48 Com régua e compasso, trace em seu caderno um segmento de $\sqrt{20}\ u$ e outro de $\sqrt{27}\ u$, sendo $u = 2$ cm. Construa um retângulo que tenha essas medidas. Construa outro retângulo que tenha por medidas $2\sqrt{5}\ u$ e $3\sqrt{3}\ u$. Por sobreposição, compare as medidas das áreas dos retângulos encontrados e os produtos $\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}$ e $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3}$.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

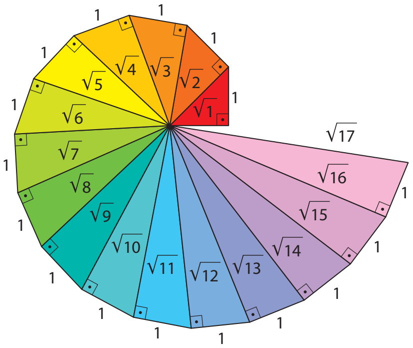
PARA SABER MAIS

Espiral de Teodoro, Pitágoras ou Einstein

Uma das mais famosas espirais, construída com triângulos retângulos, é conhecida pelos nomes de três grandes personalidades: Teodoro de Cirene, Pitágoras e Albert Einstein.

Sua construção tem início com um triângulo retângulo isósceles com catetos de 1 unidade, prossegue com outros triângulos retângulos que têm um cateto de 1 unidade e outro cateto com a medida da hipotenusa do triângulo anterior. Com ela, obtemos segmentos de medidas iguais a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...

Observe como fica a construção de uma dessas espirais até $\sqrt{17}$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Para saber mais:

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

1 Com régua e esquadro, construa uma espiral como a da página anterior até obter $\sqrt{9}$. Depois, confira se essa medida se iguala de fato a 3 unidades usadas por você. **1.** Construção de figura.

2 Construa uma reta numérica no caderno considerando a mesma medida unitária do cateto dos triângulos para a medida de distância entre 0 e 1. Depois, localize nessa reta os seguintes números: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$.

Explique ao professor e aos colegas como você pensou para localizar cada um desses números na reta numérica. **2.** Espera-se que os estudantes transportem as medidas encontradas na atividade 1 para localizar os números pedidos na reta numérica.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Exercícios complementares:

1 Identifique as sentenças falsas e dê um exemplo para justificá-las. **1. a)** Falsa, –1 não é natural.

a) Todo número inteiro é natural.

b) Todo número racional é inteiro.

c) Todo número racional é real. **1. c)** Verdadeira.

d) Todo número irracional é real. **1. d)** Verdadeira.

1. b) Falsa, $\frac{1}{2}$ não é número inteiro.

2 Considere $A = \frac{2}{3} - 1,\overline{4}$ e $B = -0,777...$ Determine em seu caderno $A : B$. **2.** $A : B = 1$

3 Dadas as dízimas periódicas 2,555... e 0,222..., determine:

a) a soma delas, escrevendo o resultado na forma abreviada; **3. a)** $2,\overline{7}$

b) o produto delas, escrevendo o resultado na forma de fração. **3. b)** $\frac{46}{81}$

4 Justifique em seu caderno por que $\sqrt{4,84} = 2,2$. **4.** $(2,2)^2 = 4,84$

5 Sendo $x = 2^8 \cdot 5^2$, calcule a raiz quadrada de x. **5.** 80

6 Qual é o menor número pelo qual devemos multiplicar $2^5 \cdot 34 \cdot 5^3 \cdot 7$ para obter um número natural que seja quadrado perfeito? **6.** 595

7 Sendo $A = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ e $B = 3 \cdot 5 \cdot 7$, calcule a raiz quadrada de $A \cdot B$. **7.** 315

8 Um terreno tem o formato de um quadrado, e a medida da sua área é igual a 231,04 m². Calcule a medida do perímetro desse terreno. **8.** 60,8 m

9 O valor de $\sqrt{5,888...}$ é aproximadamente igual a:

a) 2,4

b) 2,4333...

c) 2,8

d) 2,8333...

9. Alternativa **b**.

10 Os catetos de um triângulo retângulo medem 12 cm e 5 cm.

a) Calcule a medida da hipotenusa. **10. a)** 13 cm

b) Essa medida é um número racional ou irracional? **10. b)** Racional.

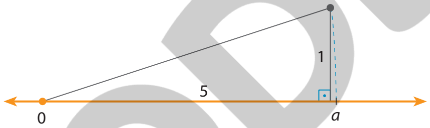
11 Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 cm e 2 cm.

a) Calcule a medida da hipotenusa. **11. a)** $\sqrt{40}$ cm.

b) Essa medida é um número racional ou irracional? **11. b)** Irracional.

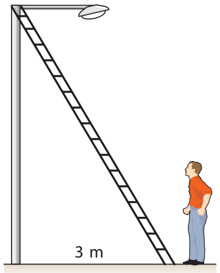
c) Determine a medida da hipotenusa com uma casa decimal. **11. c)** 6,3 cm.

12 Que número irracional está representado na reta pela letra a? **12.** $a = \sqrt{26}$



13 Em seu caderno, represente na reta real os números $\sqrt{29}$ e $-\sqrt{5}$. **13.** Construção de figura.

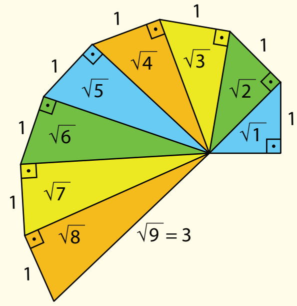
14 Para calcular a altura de um poste, Alexandre encostou nele uma escada de 6 m de comprimento, de modo que ela ficou apoiada no chão a 3 m do poste. Qual é a medida aproximada da altura desse poste? **14.** 5,2 m.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

Observe a seguir uma possível figura para a **atividade 1** do **Agora é com você!**:



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes, para localizar os números pedidos na reta numérica, transportem as medidas obtidas na **atividade 1**.

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios explora os principais conceitos estudados no capítulo. Espera-se que os estudantes mobilizem os conhecimentos construídos, percebendo se ainda têm alguma dificuldade.

As resoluções dos **exercícios 1** a **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Verificando

Esses exercícios são mais uma oportunidade para o estudante consolidar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar o aprendizado no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo possibilitar aos estudantes que retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Entre as sentenças matemáticas indicadas a seguir, qual delas terá como resultado um número natural? **1.** Alternativa **c.**

- **a)** 350 : 8 + 34
- **b)** 352 : 8 – 90 : 2
- **c)** 456 : 5 + 88 : 10
- **d)** 456 : 6 – 88

2 Qual é a fração geratriz da dízima periódica 15,623623...? **2.** Alternativa **b.**

- **a)** $\frac{15\,623}{999}$
- **b)** $\frac{15\,608}{999}$
- **c)** $\frac{15\,623}{99}$
- **d)** $\frac{623}{999}$

3 Se um número for: **3.** Alternativa **b.**

- **a)** inteiro, então ele é natural.
- **b)** racional, então ele não pode ser irracional.
- **c)** irracional, então ele pode ser inteiro.
- **d)** real, então ele é racional.

4 Qual dos números a seguir não é um quadrado perfeito? **4.** Alternativa **c.**

- **a)** 1 764
- **b)** 1 225
- **c)** 882
- **d)** 1 296

5 Sobre o valor de $\sqrt{42}$, podemos afirmar que está entre: **5.** Alternativa **a.**

- **a)** 6,4 e 6,5.
- **b)** 6,5 e 6,6.
- **c)** 6,6 e 6,7.
- **d)** 6,8 e 6,9.

6 A raiz quadrada de 1 185 está entre:

- **a)** 25 e 26.
- **b)** 34 e 35.
- **c)** 118 e 119.
- **d)** 592 e 593.

6. Alternativa **b.**

7 Um dos quartos de um apartamento tem formato quadrado de área medindo 18,49 m². Qual é a medida do perímetro desse quarto?

- **a)** 18,8 m
- **b)** 17,2 m
- **c)** 9,4 m
- **d)** 4,3 m

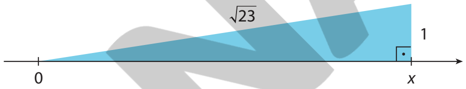
7. Alternativa **b.**

8 A medida da diagonal de um retângulo de base medindo 4 cm e altura medindo 6 cm é um número: **8.** Alternativa **d.**

- **a)** natural.
- **b)** inteiro.
- **c)** racional.
- **d)** irracional.

9 Considerando as medidas indicadas na figura, em centímetro, o valor de *x* é:

9. Alternativa **c.**



RENAN ORACIC/
ARQUIVO DA EDITORA

- **a)** 1 cm.
- **b)** 22 cm.
- **c)** $\sqrt{22}$ cm.
- **d)** $\sqrt{24}$ cm.

10 Um triângulo retângulo tem catetos medindo 6 cm e 8 cm. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? **10.** Alternativa **b.**

- **a)** 7 cm
- **b)** 10 cm
- **c)** 14 cm
- **d)** 50 cm

Organizando

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes situem a raiz quadrada do número entre as raízes quadradas dos dois quadrados perfeitos mais próximos.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais são os conjuntos numéricos estudados no capítulo? Dê um exemplo de um número pertencente a cada conjunto. **a)** Natural: 2; Inteiro: –5; Racional: 0,23; Irracional: $\sqrt{3}$; Real: $\sqrt{4}$.

b) O que é uma dízima periódica? **b)** É a representação decimal periódica de um número.

c) Explique como determinar a fração geratriz da dízima periódica de 0,666...

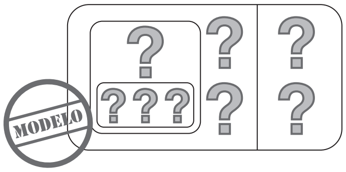
d) O que é um número quadrado perfeito? **d)** É um número natural que é a segunda potência de algum número natural.

e) Como você explicaria para um colega como encontrar a raiz quadrada aproximada de um número?

f) Que estratégia você utiliza para encontrar a posição da raiz quadrada de um número natural na reta real? Descreva-a. **f)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem o cálculo da hipotenusa a partir do teorema de Pitágoras em triângulos retângulos.

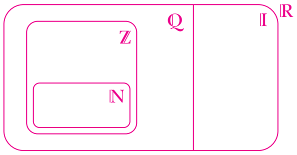
g) Copie o diagrama a seguir no caderno. Depois, relacione os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais neste diagrama.

c) Inicialmente, associa-se:
$x = 0{,}666...$ (I)
Depois, multiplica-se esse valor por 10:
$10x = 6{,}666...$ (II)
Em seguida, deve-se subtrair (I) de (II), membro a membro:
$10x - x = 6{,}666... - 0{,}666...$
$9x = 6$
$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$



RENAN ORACIC/
ARQUIVO DA EDITORA

g)



RENAN ORACIC/
ARQUIVO DA EDITORA

DIVERSIFICANDO

Jogo do enfileirando

Número de participantes: 2 a 4 jogadores.

Material:

- Vinte cartões numerados confeccionados com os números: 0, 2, 6, 7, 9, –8, –7, –4, –3, –1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$.
- Quatro cartas de ação: uma de "ordem crescente"; uma de "ordem decrescente"; uma de "adição dos números"; e uma de "multiplicação dos números".
- Dois saquinhos não transparentes: um para guardar os cartões numerados, outro para guardar as cartas de ação.
- Papel e lápis para resolver as operações.

Regras:

- Sem olhar os números, cada jogador pega cinco cartões numerados de dentro do saquinho.
- Depois, um dos jogadores tira uma carta de ação e a coloca em cima da mesa para que todos a conheçam e façam o que ela indica. Por exemplo, se sair a carta "ordem crescente", cada jogador colocará em ordem crescente os cartões que pegou. Suponha que um dos jogadores tenha os cartões 2, –3, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ e 9; ele deverá colocá-los nesta disposição: –3, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, 2 e 9. Então, anota-se o nome de quem terminou a tarefa em primeiro lugar e retira-se outra carta.
- Para os cálculos com $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, devem ser usados os valores aproximados 1,4 e 1,7, respectivamente.

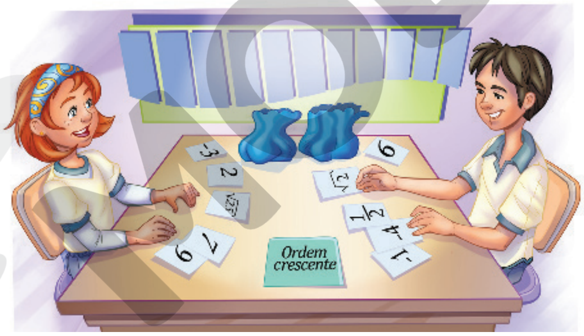
  Exemplo: $2 + (-3) + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + 9 = 9{,}9$.
- Vence o jogo aquele que ganhar o maior número de rodadas, isto é, concluir mais vezes as tarefas antes dos outros colegas. Caso nenhum jogador consiga executar as tarefas, reinicia-se o jogo.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe a ilustração e responda à questão. Quem ganhou esta rodada? Justifique.

1. A pessoa da esquerda, pois colocou os cinco números na ordem certa, como pedia a carta de ação.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

2 Formem grupos de 3 ou 4 integrantes, modifiquem uma regra do jogo e troquem com outro grupo. Antes de jogar com a nova regra, escolham um representante para explicar a regra nova do outro grupo.

Diversificando

Observe uma variação do jogo proposta nesta seção. No material, mudamos as cartas de ação, que passam a ser: "quadrado da soma", "soma dos quadrados", "multiplicação dos números" e "adição dos números". Nas regras, alteramos a quantidade de cartões numerados que cada jogador deve pegar: em vez de quatro, inicialmente cada jogador pega apenas dois cartões numerados.

Um dos objetivos dessa variação do jogo é levar os estudantes a perceber o que há de diferente entre quadrado de uma soma $(a + b)^2$ e soma de dois quadrados $(a^2 + b^2)$.

Agora é com você!

Na **atividade 2**, peça aos estudantes que escrevam a nova regra de maneira compreensível e objetiva, de modo que os colegas consigam entendê-la, pois o representante terá de explicá-la a todos no final da atividade.

Capítulo 2 – Operações com números reais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, ampliamos o trabalho com números reais com o foco nas operações potenciação e radiciação. A compreensão do conceito de número irracional é favorecida por meio de situações variadas que ampliam o conhecimento já construído sobre números irracionais e, assim, consolidam a aprendizagem dos números reais.

Ao desenvolver as questões propostas nessa abertura, pode-se incentivar os estudantes a pesquisar sobre fatos da história da Matemática que tratem dos números incomensuráveis, possibilitando que desenvolvam a **competência geral 1**, no que se refere a perceber como os conhecimentos matemáticos contribuem para descrever a realidade.

Sugestão de leitura

Para ampliar a discussão do tema apresentado na abertura deste capítulo, sugerimos:

GONÇALVES, C. H.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. **Revista Matemática Universitária**, n. 47, dez. 2009. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47_Artigo02.pdf. Acesso em: 13 jun. 2022.

Nesse artigo, discute-se a existência de duas versões para a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga.

Capítulo 2
Operações com números reais

RAFAEL SANZIO – PALÁCIO APOSTÓLICO, VATICANO, CIDADE DO VATICANO

Observe, leia e responda no caderno.

a) Você se lembra de algum fato da história da Matemática sobre números? Se sim, descreva-o. Se não, faça uma pesquisa, escolha um que ache interessante e relate. **a)** Resposta pessoal.

b) Com uma fita métrica, meça o contorno e o diâmetro de algumas rodas com tamanhos diferentes. Depois, divida a medida do contorno pela medida do diâmetro, ambas na mesma unidade de medida.

c) Verifique se os quocientes obtidos no item **b** são próximos do número irracional “pi”.

SANZIO, R. Detalhe da obra **Escola de Atenas**. 1509-1510. Pintura em reboco, 5 × 7,7 m. Na imagem, Pitágoras, sentado à esquerda, é observado por Parmênides, em pé, e Hipatia, ao fundo.

b) Espera-se que os estudantes obtenham valores próximos de 3,14.

c) Espera-se que os estudantes percebam que os valores são aproximações para “pi”.

Reza a lenda que a descoberta dos irracionais causou tanto escândalo entre os gregos que o pitagórico responsável por ela, Hípaso, foi expulso da escola e condenado à morte. Não se sabe de onde veio essa história, mas parece pouco provável que seja verídica. [...]

Na verdade, a descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos.

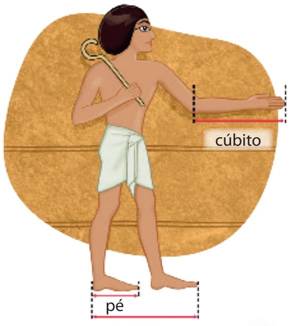
ROQUE , T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. p. 124-126.

1 Potências nas medidas astronômicas, subatômicas e informáticas

O Sistema Internacional de Unidades (SI) tem uma história recente se comparada à histórica necessidade humana de medir, que vem desde a origem das civilizações. Antes, cada povo tinha seu próprio sistema de medidas, muitas vezes com unidades imprecisas, tendo por base o corpo humano (palmo, pé, cúbito, jarda, passo etc.), o que criava muitos problemas, principalmente para o comércio.

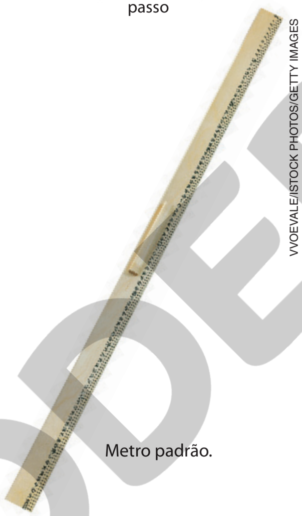
O SI, sistema atual desenvolvido com base no Sistema Métrico Decimal (SMD, França, 1799) e consolidado apenas em 1960, com suas sete unidades de base, é mais complexo e diversificado do que o SMD.

Visando atender a uma extensa gama de medidas para várias grandezas, há muitos prefixos no SI. Observe o quadro a seguir.



IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

Nome	Símbolo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
yotta	Y	$10^{24} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
zetta	Z	$10^{21} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
exa	E	$10^{18} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
peta	P	$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$
tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
giga	G	$10^{9} = 1\,000\,000\,000$
mega	M	$10^{6} = 1\,000\,000$
quilo	k	$10^{3} = 1\,000$
hecto	h	$10^{2} = 100$
deca	da	10
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
micro	µ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$
pico	p	$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$
femto	f	$10^{-15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,001$
atto	a	$10^{-18} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001$
zepto	z	$10^{-21} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,001$
yocto	y	$10^{-24} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001$



VVOEVALE/ISTOCK PHOTOS/GETTY IMAGES

Metro padrão.

VICTOR DE SCHWANBERG/ SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Quando apontado para determinado ponto ou objeto, o medidor digital calcula a medida da distância até ele.

Dados obtidos em: INMETRO. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf. Acesso em: 26 mar. 2022.

1. Potências nas medidas astronômicas, subatômicas e informáticas

Habilidade da BNCC: **EF09MA18**.

Este tópico explora potências no contexto das unidades de medida usadas na Astronomia, na informática e na nanotecnologia, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA18). Antes de trabalhar o quadro apresentado nesta página, retome com os estudantes as potências de base 10 com expoente natural e expoente negativo. É um bom momento para verificar os conhecimentos que os estudantes já construíram sobre esse assunto e sobre a notação científica.

Aproveite e explique que o prefixo “quilo” indica que devemos multiplicar a unidade tomada por 1000, por exemplo:

- 1 quilômetro = 1000 metros
- 1 quilograma = 1000 gramas
- 1 quilolitro = 1000 litros

Assim, não é formalmente correto usar a palavra “quilo” como sinônimo de “quilograma”, como usualmente se faz.

Pergunte aos estudantes se já conheciam alguma unidade de medida expressa com esses prefixos. É possível que alguns deles já tenham ouvido falar dos prefixos micro (1 micrometro = 10^{-6} metro) ou de giga e mega.

Potências nas medidas astronômicas, subatômicas e informáticas

Explore as unidades apresentadas. Proponha aos estudantes que pesquisem mais sobre elas. Ressalte que o **parsec** é uma unidade de medida de comprimento usada na Astronomia para expressar a distância até os objetos astronômicos fora do Sistema Solar, como estrelas e galáxias.

Se julgar adequado, promova uma discussão sobre os conteúdos pesquisados pelos estudantes e desenvolva uma atividade interdisciplinar com Ciências propondo, por exemplo, que pesquisem sobre os diferentes objetos astronômicos dentro e fora do Sistema Solar (planetas, asteroides, cometas, estrelas e galáxias, por exemplo), pesquisem dados das suas dimensões e analisem como as dimensões dos diferentes objetos se comparam.

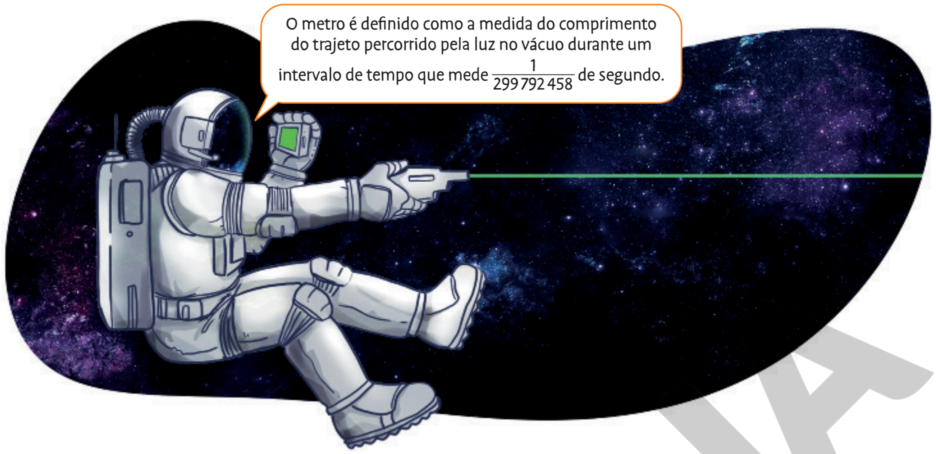
Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos:

PIOVEZAN, A. C. T. **Situação desencadeadora de aprendizagem no ensino de Astronomia**: uma proposta de ensino de escalas astronômicas explorando notícias científicas, 2020. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Astronomia, Geociências e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020. Disponível em: https://www.iag.usp.br/~eder/Amanda_Piovezan/Dissertacao_Mestrado_Amanda_Piovezan.pdf. Acesso em: 22 jul. 2022.

A dissertação discute como a análise de notícias divulgadas em diferentes mídias pode ser interessante no ensino da Astronomia, mais especificamente no estudo de escalas astronômicas.

O tema medidas é muito amplo; por isso, vamos nos restringir à medida de comprimento cuja unidade de base é o **metro (m)**.



IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

O metro, como as demais unidades de base, tem múltiplos e submúltiplos dados por prefixos. Por exemplo: "quilo-" (do grego *khílioi,ai,a*, mil, milhar): um quilômetro (1 km) = mil metros (10^3 m); "mili-" (do francês *millième*, milésimo): um milímetro (1 mm) = um milésimo de metro (10^{-3} m).

No entanto, os prefixos da tabela conjugados com as unidades de base ainda são insuficientes ou inconvenientes para determinadas situações.

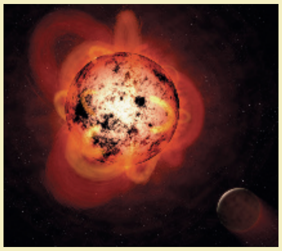
Na Astronomia, o estudo do Universo indica a necessidade de outras unidades de medida fora do SI, que são:

- **Unidade Astronômica** (ua): a medida da distância média entre a Terra e o Sol, 1 ua $\simeq 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m;
- **ano-luz**: a medida da distância que a luz percorre em 1 ano, 1 ano-luz $\simeq 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m $\simeq$ 63 241 ua;
- **parsec** (pc): a medida da distância em que 1 ua (perpendicular à linha de visão) subtende um ângulo de 1 segundo de arco; 1 pc $\simeq$ 3,26 anos-luz $\simeq$ 206 265 ua.

Os Exoplanetas

Assim como o Sol, outras grandes estrelas se formaram. Será que essas estrelas poderiam também ter planetas em sua órbita? A resposta é sim! Esses planetas que se encontram fora do nosso Sistema Solar, na órbita de outras estrelas, são chamados de **exoplanetas**.

Um exemplo de estrela que se formou como o nosso Sol é a anã vermelha **Proxima Centauri**. Ela é a estrela fora do Sistema Solar que está mais próxima da Terra, podendo ser identificada no céu na constelação do Centauro, a uma distância de aproximadamente 4,2 anos-luz (cerca de 40 trilhões de km) do nosso planeta.



NASA/ESA /G. BACON (STSCI)

Esta ilustração da NASA mostra uma estrela anã vermelha orbitada por um exoplaneta hipotético. As anãs vermelhas tendem a ser magneticamente ativas, exibindo proeminências de arco e uma variedade de manchas escuras.

Fonte: RIOGA, L. Os exoplanetas. *In*: **Blog Espaço do conhecimento UFMG**. Belo Horizonte, [2019?]. Disponível em: https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/exoplanetas/. Acesso em: 24 mar. 2022.

Na outra ponta das atividades científicas está a **nanotecnologia**.

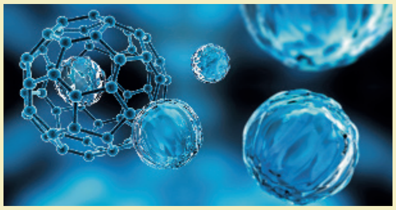
Certa vez, o físico Eric Drexler disse: "A próxima grande revolução na ciência será tão pequena que você não vai enxergá-la nem com microscópio. Os efeitos, porém, serão devastadores". Na nanotecnologia, como o próprio nome sugere, são trabalhadas medidas extremamente pequenas para o desenvolvimento de produtos com tamanho inferior a 100 nanômetros.

Observe o prefixo **nano** na tabela da página 39: 1 nanômetro é a unidade de medida de comprimento equivalente à bilionésima parte de um metro, ou 10^{-9} m (símbolo: nm).

Diferentemente da Astronomia, a nanotecnologia não criou novas unidades de medida.

Nanocápsulas feitas de polímeros naturais causam menos impactos ao meio ambiente

Cientistas da Embrapa e da Universidade Estadual Paulista (Unesp) testaram o impacto, em ambientes aquáticos, de dois compostos envoltos em nanocápsulas feitas de polímeros. Polímeros são macromoléculas formadas por unidades estruturais menores que podem ser naturais ou artificiais. No estudo, os pesquisadores verificaram que polímeros naturais causam menos impactos ambientais. [...]


PETERSCHREIBER.MEDIA/SHUTTERSTOCK

O uso da nanotecnologia para fins agroalimentares é considerado mais sustentável ambientalmente do que formulações convencionais.

Fonte: TORDIN, C. Nanocápsulas feitas de polímeros naturais causam menos impactos ao meio ambiente. **Embrapa**. 14 dez. 2021. Disponível em: https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/66985656/nanocapsulas-feitas-de-polimeros-naturais-causam-menos-impactos-ao-meio-ambiente. Acesso em: 24 mar. 2022.


WHITEMOCCA/SHUTTERSTOCK

Composição que remete a um código de programação de *software*.

Hoje vivemos no mundo da informática. O *byte* é a menor unidade de armazenamento de dados, correspondente à codificação de um caractere (letra, algarismo, símbolo de pontuação).

A estrutura numérica de sistemas de informática é fundamentada no código binário, que representa os dados usando um sistema de dois símbolos, frequentemente "0" e "1", chamado sistema binário. Por isso, os múltiplos das unidades de medida da informática são escritos considerando potências de base 2, e os prefixos utilizados para identificá-los têm nomenclatura própria. São os prefixos binários: kibi (Ki), mebi (Mi), gibi (Gi), tebi (Ti), pebi (Pi), exbi (Ei), zebi (Zi) e yobi (Yi). Note que esses prefixos derivam dos prefixos do SI e são todos acompanhados da contração da palavra binário, "bi".

- *byte* (B) é a menor unidade de armazenamento;
- *kibibyte* (KiB) equivale a 2^{10} *bytes* ou 1 024 *bytes*; 1 KiB = 2^{10} B;
- *mebibyte* (MiB) equivale a 2^{20} *bytes* ou 1 024 *kibibytes*; 1 MiB = 2^{10} KiB = 2^{20} B;
- *gibibyte* (GiB) equivale a 2^{30} *bytes* ou 1 024 *mebibytes*; 1 GiB = 2^{10} MiB = 2^{30} B;
- *tebibyte* (TiB) equivale a 2^{40} *bytes* ou 1 024 *gibibytes*; 1 TiB = 2^{10} GiB = 2^{40} B;
- *pebibyte* (PiB) equivale a 2^{50} *bytes* ou 1 024 *tebibytes*; 1 PiB = 2^{10} TiB = 2^{50} B;
- *exbibyte* (EiB) equivale a 2^{60} *bytes* ou 1 024 *pebibytes*; 1 EiB = 2^{10} PiB = 2^{60} B;
- *zebibyte* (ZiB) equivale a 2^{70} *bytes* ou 1 024 *exbibytes*; 1 ZiB = 2^{10} EiB = 2^{70} B;
- *yobibyte* (YiB) equivale a 2^{80} *bytes* ou 1 024 *zebibytes*; 1 YiB = 2^{10} ZiB = 2^{80} B.

Potências nas medidas astronômicas, subatômicas e informáticas

Contrapondo com o trabalho anterior, sobre unidades de medida de comprimento utilizadas para expressar medidas muito grandes, explore agora com os estudantes algumas unidades de medida de comprimento utilizadas para expressar medidas extremamente pequenas.

Também são apresentadas nesta página unidades de medida relacionadas à área de informática, com as quais os estudantes podem ter familiaridade.

Se achar conveniente, comente com os estudantes que, além dos sistemas de informática, códigos binários também têm outras aplicações. O sistema de escrita e leitura tátil chamado braille, por exemplo, utilizado por deficientes visuais, pode ser considerado um sistema binário. Nesse sistema, letras, números e sinais de pontuação são representados por grades com seis pontos cada, três por coluna. Nessas grades, cada um dos seis pontos pode assumir dois estados: em relevo ou não. São as diferentes combinações de 1 a 6 pontos em relevo que representam diferentes letras do alfabeto, números e sinais de pontuação. Ao todo existem 63 combinações.

Sugestão de leitura

Para enriquecimento e ampliação desse estudo, sugerimos:

NANOTECNOLOGIA: a outra face da moeda. **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**, 2010. Disponível em: http://www.poli.usp.br/fr/comunicacao/noticias/destaques/arquivo-em-foco/623-nanotecnologia-a-outra-face-da-moeda.html. Acesso em: 13 jun. 2022.

O texto apresenta oportunidades de desenvolvimento de produtos com a nanotecnologia e o risco à saúde dos trabalhadores que manipulam tais tecnologias.

Potências nas medidas astronômicas, subatômicas e informáticas

Amplie o trabalho com potências de 10 apresentando expressões que contenham tais potências, por exemplo:

- $5{,}4 \cdot 10^2 + 3{,}5 \cdot 10^3 =$
  $= 5{,}4 \cdot 10^2 + 3{,}5 \cdot 10 \cdot 10^2 =$
  $= 5{,}4 \cdot 10^2 + 35 \cdot 10^2 =$
  $= (5{,}4 + 35) \cdot 10^2 =$
  $= 40{,}4 \cdot 10^2 = 4\,040$
- $0{,}002 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-2} =$
  $= 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-2} =$
  $= (2 \cdot 25) \cdot (10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}) =$
  $= 50 \cdot 10^0 =$
  $= 50 \cdot 1 = 50$
- $\dfrac{24 \cdot 10^2}{1{,}2 \cdot 10^3} = \dfrac{24 \cdot 10^2}{12 \cdot 10^{-1} \cdot 10^3} =$
  $= \dfrac{2 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = 2$
- $\dfrac{0{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}005 \cdot 10^3} = \dfrac{5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3} =$
  $= 10^{-3} = 0{,}001$

Pense mais um pouco...

Esta atividade propõe aos estudantes que explorem a relação entre os prefixos do SI aplicados à informática e os prefixos binários, e que reconheçam que esses prefixos indicam múltiplos com fatores diferentes, portanto, mesmo que as unidades de medida relacionadas a esses prefixos acompanhem um mesmo número, as medidas não correspondem ao mesmo valor.

$360\ \text{TB} \neq 360\ \text{TiB}$

$360\ \text{TB} = 360 \cdot 10^{12}\ \text{B} =$
$= 360\,000\,000\,000\,000\ \text{B}$

$360\ \text{TiB} = 360 \cdot 2^{40}\ \text{B} =$
$= 360 \cdot 1\,099\,511\,627\,776\ \text{B} =$
$= 395\,824\,185\,999\,360\ \text{B}$

$1\ \text{TB} = \dfrac{10^{12}}{2^{40}}\ \text{TiB} =$
$= \dfrac{1\,000\,000\,000\,000}{1\,099\,511\,627\,776}\ \text{TiB}$

Logo:

$360\ \text{TB} = 360 \cdot 0{,}90949470177293\ \text{TiB}$

$360\ \text{TB} \simeq 327\ \text{TiB}$

Portanto, 360 TB corresponde a aproximadamente 327 TiB ou $327 \cdot 2^{40}$ B, e não a 360 TiB.

Os fatores de conversão que definem os prefixos no SI são potências de 10:

- 10 ou 10^{-1} para os três primeiros múltiplos e para os três primeiros submúltiplos.

  Por exemplo:
  a) para transformar 75 m em dam, fazemos $75\ \text{m} = 75 \cdot 10^{-1}\ \text{dam} = 7{,}5\ \text{dam}$;
  b) para transformar 75 cm em mm, fazemos $75\ \text{cm} = 75 \cdot 10\ \text{mm} = 750\ \text{mm}$.
- 10^3 (1 000) ou 10^{-3} (0,001) para os demais prefixos.

  Por exemplo:
  a) para transformar 41 852 metros em terâmetro (Tm), fazemos:
  $41\,852\ \text{m} = 41\,852 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\ \text{Tm} = 4{,}1852 \cdot 10^{-8}\ \text{Tm}$;
  b) para transformar 0,29 metro em nanômetro, fazemos:
  $0{,}29\ \text{m} = 0{,}29 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3\ \text{nm} = 0{,}29 \cdot 10^9\ \text{nm} = 290\,000\,000\ \text{nm} = 2{,}9 \cdot 10^8\ \text{nm}$.

Os fatores de conversão que definem os prefixos binários são potências de base 2:

- 2^{10} (1 024) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente inferior;
- 2^{-10} ($1\,024^{-1}$) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente superior.

Popularmente, os prefixos do SI são utilizados para indicar múltiplos de unidades de medida da informática, quando deveriam ser utilizados os prefixos binários; por exemplo, é comum o uso de 50 MB ou 50 *megabytes*, no lugar de 50 MiB ou 50 *mebibytes*. Note que mega e mebi são prefixos que indicam múltiplos com fatores diferentes: $10^6 \neq 2^{20}$, pois $10^6 = 1\,000\,000$ e $2^{20} = 1\,048\,576$. Portanto, 50 *megabytes* não correspondem ao mesmo número de *bytes* que 50 *mebibytes*.

No entanto, potências de 10 são usadas em situações específicas na informática. Os fabricantes de discos rígidos, por exemplo, usam potências de 10 para identificar capacidades de armazenamento. Quando o fabricante indica que um **disco rígido** tem capacidade de armazenamento de 500 GB, por exemplo, isso quer dizer que o disco rígido pode armazenar até 500 bilhões de *bytes* ou 500×10^9 B, o que corresponde a aproximadamente 466 GiB.

Disco rígido: dispositivo usado para armazenar os dados em computadores, popularmente chamado de HD (do inglês *hard disk*).

Note que arredondar 1 024 para 1 000 e considerar que 1 kB é aproximadamente 1 KiB é razoável, mas observe que, quando tratamos de múltiplos cada vez maiores, arredondamentos acumulados geram erros grandes de aproximação.

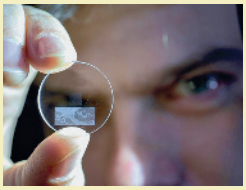
Por exemplo, ao considerar 1 YB = 1 YiB, o erro de aproximação é de quase 21%.

$$1\ \text{YB} = 10^{24}\ \text{B} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\ \text{B}$$
$$1\ \text{YiB} = 2^{80}\ \text{B} = 1\,208\,925\,819\,614\,629\,174\,706\,176\ \text{B}$$

Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Disco de vidro pode guardar arquivos com até 360 TB “para sempre”

Pesquisadores da Universidade de Southampton, no Reino Unido, anunciaram uma unidade de disco que pode armazenar dados, como documentos e obras de arte, “para sempre”. O dispositivo, que consiste em um pequeno vidro nanoestruturado e tem gravação a *laser*, é capaz de guardar 360 TB por até 13,8 bilhões de anos.


OPTOELECTRONICS RESEARCH CENTRE (ORC)/UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON, INGLATERRA

Disco digital criado na Universidade de Southampton, no Reino Unido. (Fotografia de 2017.)

Fonte: TECHTUDO. **Disco de vidro pode guardar arquivos com até 360 TB “para sempre”**. Portal de notícias Techtudo, [Rio de Janeiro],17 fev. 2016. Disponível em: http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2016/02/disco-de-vidro-pode-guardar-arquivos-com-ate-360-tb-para-sempre.html. Acesso em: 23 mar. 2022.

Com base nas informações apresentadas na notícia, determine a capacidade de armazenamento do disco de vidro considerando potências de base 2 e utilizando os prefixos binários.

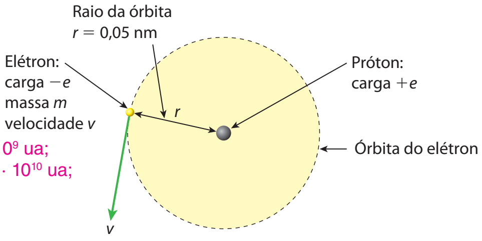
Pense mais um pouco...: Aproximadamente 327 TiB ou $327 \cdot 2^{40}$ B.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Usando uma calculadora, dê a medida da distância aproximada, em quilômetro, entre a Terra e o exoplaneta GJ 1214b, que está fora do Sistema Solar, a 40 anos-luz.
1. Aproximadamente 380 000 000 000 000 km.

2 No átomo de hidrogênio de Bohr, o elétron anda ao redor de um próton central, em uma órbita circular com o raio medindo aproximadamente 0,05 nm. Qual é a medida desse raio, em metro?
2. $5 \cdot 10^{-11}$ m.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

5. Via Láctea: $9,5 \cdot 10^{17}$ km; $6,32 \cdot 10^{9}$ ua; Andrômeda: $2,09 \cdot 10^{18}$ km; $1,39 \cdot 10^{10}$ ua; $2,75 \cdot 10^{19}$ km; $1,83 \cdot 10^{11}$ ua; Grande Nuvem de Magalhães: $6,65 \cdot 10^{17}$ km; $4,43 \cdot 10^{9}$ ua; $1,9 \cdot 10^{18}$ km; $1,26 \cdot 10^{10}$ ua; Pequena Nuvem de Magalhães: $1,33 \cdot 10^{17}$ km; $8,85 \cdot 10^{8}$ ua; $1,6 \cdot 10^{18}$ km; $1,06 \cdot 10^{10}$ ua.

3 Até quantos *megabytes* um disco de vidro pode guardar? Esse valor corresponde a quantos *mebibytes*?
3. Até $3,6 \cdot 10^{8}$ MB; correspondente a aproximadamente $3,4 \cdot 10^{8}$ MiB.

4 Considere o erro cometido ao se praticar arredondamentos da base 2 para a base 10 nas unidades usadas na informática.

4. a) Aproximadamente 2,3%.

a) Qual é o erro percentual que se comete ao arredondar 1 KiB para 1 000 B, substituindo 2^{10} por 10^{3}?

b) Qual é o erro percentual que se comete, substituindo-se 2^{80} por 10^{24}, ao arredondar 1 YiB para 1 000 000 000 000 000 000 000 000 B? **4. b)** Aproximadamente 17,3%.

5 "A constelação em que vivemos, a Via Láctea, [...] tem a forma de espiral achatada com cerca de 100 mil AL de diâmetro e 200 bilhões de estrelas [...], faz parte do Grupo Local. Três das galáxias do Grupo Local são visíveis a olho nu:

- Andrômeda – 220 mil AL de diâmetro e a uma distância de 2,9 milhões AL.
- Grande Nuvem de Magalhães – 70 mil AL de diâmetro e a uma distância de 200 mil AL.
- Pequena Nuvem de Magalhães – 14 mil AL de diâmetro e a uma distância de 168 mil AL."

Fonte: ALMANAQUE Abril 2015. São Paulo: Abril, 2015. p. 171.

THATREE THITIVONGVAROON/MOMENT/GETTY IMAGES

Fotografia de trecho da Via Láctea. (Fotografia de 2015.)

Use uma calculadora e escreva em notação científica, na unidade quilômetro e na Unidade Astronômica, as medidas aproximadas descritas no texto anterior, em que AL corresponde à unidade ano-luz.

6 ***Hora de criar*** – Após pesquisar, na internet, em livros, em jornais ou em revistas, medidas de comprimento usadas na Astronomia ou na nanotecnologia, troque com um colega um problema, criado por vocês. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **6.** Resposta pessoal.

7 ***Hora de criar*** – Agora, faça o mesmo que no exercício **6**, após pesquisar medidas de armazenamento no campo da informática. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **7.** Resposta pessoal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 2** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Apresentamos uma possível resolução do **exercício 1**.

1 ano-luz equivale aproximadamente a $9,5 \cdot 10^{15}$ m ou $9,5 \cdot 10^{12}$ km, e $40 \cdot 9,5 \cdot 10^{12}$ km $= 3,8 \cdot 10^{14}$ km.

Logo, a medida da distância da Terra ao exoplaneta GJ 1214b é aproximadamente $3,8 \cdot 10^{14}$ km ou 380 000 000 000 000 km.

2. Potência com expoente fracionário e radicais

Habilidades da BNCC: **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Se julgar necessário, retome o cálculo de raízes exatas e as propriedades da potenciação com expoente inteiro.

Observe aos estudantes a condição de que, na simbologia aqui usada, o valor de n, por ser denominador no expoente fracionário e por ser índice do radical, representa sempre um número natural não nulo.

2 Potência com expoente fracionário e radicais

Já estudamos potência com expoente fracionário tendo por base números racionais, em que relacionamos potenciação e radiciação.

Consideremos a definição: se $b^n = a$, então $b = \sqrt[n]{a}$, com n natural não nulo e $b \geqslant 0$.

ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Observações

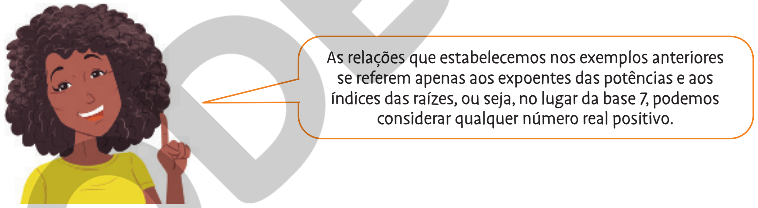
- Dando nome aos símbolos:

$$\textbf{índice} \rightarrow \sqrt[n]{\underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{radicando}}}{a}} = b \leftarrow \textbf{raiz}$$

- $\sqrt[n]{a} = b$ (lemos: "raiz enésima de ***a*** é igual a ***b***")
- O símbolo $\sqrt{}$ é chamado de **radical**. Usamos esse mesmo símbolo para indicar a raiz quadrada de um número ***a***.

Como já estudamos, $(7^3)^2 = 7^6$. Então, pela definição dada, podemos dizer que 7^3 é a raiz quadrada de 7^6, isto é, $7^3 = \sqrt[2]{7^6}$. Como $3 = \frac{6}{2}$, temos $7^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{7^6}$.

Também observamos que $(7^2)^3 = 7^6$. Portanto, podemos dizer que 7^2 é a raiz cúbica de 7^6, isto é, $7^2 = \sqrt[3]{7^6}$. Como $2 = \frac{6}{3}$, temos $7^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{7^6}$.



ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Assim, podemos ampliar este estudo para potência com expoente fracionário tendo por base números reais. Acompanhe.

- $(\pi^3)^2 = \pi^6$

  Aplicando a definição para raiz quadrada, $\pi^3 = \sqrt[2]{\pi^6}$ ou $\pi^{\frac{6}{2}} = \sqrt[2]{\pi^6}$.

- $\left[\left(\sqrt{5}\right)^3\right]^4 = \left(\sqrt{5}\right)^{12}$

  Aplicando a definição para raiz quarta, temos $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\sqrt{5}\right)^{12}}$ ou $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{12}{4}} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{5}\right)^{12}}$.

> Se a é um número real positivo, m é um número inteiro e n é um número natural não nulo, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Observação

- As propriedades válidas para as potências de expoente inteiro são válidas para as potências de expoente fracionário que tenham base positiva. Por exemplo:

- $\pi^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{\frac{1}{4}} = \pi^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = \pi^{\frac{11}{12}}$
- $\left(\sqrt{10}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(\sqrt{10}\right)^{5} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{3}{2}-5} = \left(\sqrt{10}\right)^{-\frac{7}{2}}$
- $\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{2}{5}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

8 Escreva na forma de potência com expoente fracionário.

a) $\sqrt[5]{8,1^4}$ **8. a)** $8,1^{\frac{4}{5}}$

b) $\sqrt{\pi^3}$ **8. b)** $\pi^{\frac{3}{2}}$

c) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{7}\right)^4}$ **8. c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{6}}$

d) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{8}\right)^3}$ **8. d)** $\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

9 Represente na forma de radical.

a) $\pi^{\frac{1}{2}}$ **9. a)** $\sqrt{\pi}$

b) $\phi^{\frac{6}{5}}$ **9. b)** $\sqrt[5]{\phi^6}$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ **9. c)** $\sqrt[4]{\sqrt{3}}$

d) $(5)^{0,5}$ **9. d)** $\sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

10 Reduza a uma só potência, usando as propriedades das potências.

a) $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{4}}$ **10. a)** $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{7}{12}}$

b) $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{4}}$ **10. b)** $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{12}}$

c) $\left[\left(\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{9}{2}}$ **10. c)** $\left(\sqrt{10}\right)^{\frac{3}{2}}$

d) $\pi^{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}}$ **10. d)** $\pi^{\frac{1}{32}}$

11 Calcule.

a) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^4$ **11. a)** 2

b) $0,512^{\frac{1}{3}}$ **11. b)** 0,8

c) $\sqrt[5]{\pi^{10}}$ **11. c)** π^2

d) $\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ **11. d)** 3

12 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

- Representem cada radical a seguir na forma de potência com expoente fracionário.
- Simplifiquem, se possível, a fração do expoente da potência obtida.
- Representem a potência com expoente simplificado na forma de radical.
- Comparem cada radical dado com o respectivo radical obtido. Escrevam uma regra prática para simplificar um radical, quando possível.

a) $\sqrt[12]{\pi^6}$ **12. a)** $\sqrt{\pi}$

b) $\sqrt[14]{1,7^7}$ **12. b)** $\sqrt{1,7}$

c) $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{5}\right)^9}$ **12. c)** $\sqrt[2]{\left(\frac{13}{5}\right)^3}$

d) $\sqrt[18]{\phi^{12}}$ **12. d)** $\sqrt[3]{\phi^2}$

e) $\sqrt[24]{\left(\frac{\pi}{2}\right)^8}$ **12. e)** $\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

f) $\sqrt[12]{\pi^{18}}$ **12. f)** $\sqrt{\pi^3}$

12. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum não nulo, se obtém um radical igual.

PARA SABER MAIS

A história dos números irracionais

O conceito de número real passou por transformações significativas até chegar à forma como o entendemos hoje. Em sentido mais prático, pode-se dizer que a ideia de medida implica noção de número real. Para tentar compreender a motivação que desencadearia a noção de número real, precisamos pensar em quando surgiu a necessidade da ideia de números irracionais $\left(\text{números que não podem ser expressos na forma } \frac{p}{q}, \text{ com } p \text{ e } q \text{ inteiros e } q \neq 0\right)$.

Essa ideia teve origem, provavelmente, em contextos geométricos na Grécia antiga. Para os pitagóricos, o conceito de número era o que para nós são os números naturais, e as razões eram, então, somente estabelecidas entre números naturais.

Não se tem certeza da descoberta de números irracionais, mas é certo que, para os gregos clássicos, foi muito difícil aceitá-los.

Potência com expoente fracionário e radicais

Para ampliar o trabalho com os exemplos do boxe **Observação**, peça aos estudantes que expressem os resultados obtidos em forma de uma única potência. Assim, espera-se que eles utilizem a igualdade: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (com *a* real positivo, *m* inteiro e *n* natural não nulo).

- $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = 2^{\frac{2}{15}}$
- $\left(\sqrt{10}\right)^{-\frac{7}{2}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{7}{2}} =$
  $= 10^{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)} = 2^{-\frac{7}{4}}$

Essa atividade possibilita aos estudantes desenvolverem as habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04).

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 8** a **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 12**, espera-se que os estudantes percebam que, na prática, basta dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um divisor comum. Essa é uma oportunidade para anteciparem informalmente a propriedade dos radicais.

Para saber mais

A seção destaca a importância histórica da descoberta do número irracional $\sqrt{2}$ no cálculo da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 e, assim, possibilita aos estudantes desenvolverem a habilidade (EF09MA01) percebendo que, ao fixar uma unidade de comprimento, alguns segmentos de reta não podem ser expressos por um número racional.

Para enriquecer o trabalho com a seção, apresente alguns números irracionais notáveis: retome o número π e o número de ouro e comente sobre o número de Euler (**e**).

Sugestão de leitura

Para complementar o trabalho, sugerimos:

POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais. 2012. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23082012-092642/publico/WAGNER_MARCELO_POMMER_rev.pdf. Acesso em: 13 jun. 2022.

Nessa tese, o autor apresenta um panorama de como são abordados os conteúdos sobre números irracionais em livros didáticos.

3. Propriedades dos radicais

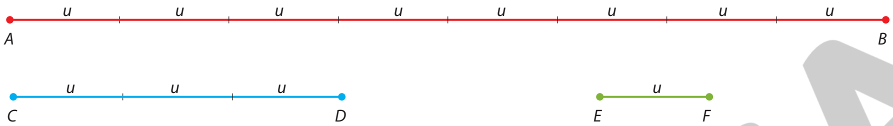
Habilidades da BNCC: **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Para favorecer a compreensão dos estudantes em relação às operações envolvendo números irracionais e, portanto, o desenvolvimento das habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04), neste tópico são retomadas e ampliadas propriedades dos radicais. A fim de trabalhar com as propriedades de radicais, organize os estudantes em grupos. Cada grupo estudará uma das propriedades (haverá grupos trabalhando com a mesma propriedade). Depois, escolha um representante para explicar a propriedade aos demais, criando novos exemplos. Ao final, faça um fechamento coletivo na lousa.

O filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) provou que a diagonal do quadrado com seu lado estão relacionados de tal modo que a medida da diagonal ou do lado é um número irracional. Essa é a prova mais antiga que se conhece para a característica irracional da diagonal do quadrado em relação ao seu lado quando a medida deste é dada por um número natural. Ela envolve, teoricamente, números irracionais e, portanto, amplia a ideia original grega de número.

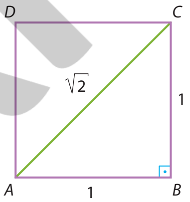
Do ponto de vista geométrico, dois segmentos estabelecerão uma razão, representada por um número racional, se for possível encontrar um pequeno segmento que meça ambos os segmentos dados, ou seja, que caiba um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos dados originalmente.

Por exemplo, considere os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ a seguir.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o segmento $\overline{EF}$ cabe 8 vezes no segmento $\overline{AB}$ e 3 vezes no segmento $\overline{CD}$, o que implica que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estabeleçam uma razão de 8 para 3 ou, em termos numéricos, o número racional $\frac{8}{3}$.



Inicialmente, os gregos não concebiam a existência de segmentos para os quais tal medida não existisse, o que resultaria numericamente em números irracionais, como no quadrado *ABCD*, em que a razão entre as medidas da diagonal e de seu lado é $\sqrt{2}$.

Essas medidas envolvendo números irracionais foram percebidas provavelmente por algum pitagórico, entre 500 a.C. e 375 a.C. Uma vez que na escola pitagórica os números naturais e suas razões formavam a essência de todas as coisas, uma descoberta dessa natureza deve ter gerado grande crise.

Tudo isso constituiu um importante passo na formação do número real, refletindo, posteriormente, no que viriam a ser os números irracionais, ampliando o conceito de número na Grécia e contribuindo para a construção da ideia de número real, que foi sendo gradualmente estabelecida.

3 Propriedades dos radicais

1ª propriedade

Considerando o radical $\sqrt[3]{5^3}$, temos: $\sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$.

Da mesma maneira: $\sqrt[4]{5^4} = 5$ e $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, mas $\sqrt[4]{(-5)^4} = 5$, pois:

$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625 \text{ e } \sqrt[4]{625} = 5.$$

Ao calcular $\sqrt[3]{(-5)^3}$, extraímos uma raiz de índice ímpar de um número negativo, ou seja, $\sqrt[3]{-125}$. O resultado é um número negativo, –5, pois $(-5)^3 = -125$.

Entretanto, ao calcular $\sqrt[4]{(-5)^4}$, extraímos a raiz de índice par de um número positivo, isto é, $\sqrt[4]{625}$, que é 5, pois $5^4 = 625$.

De modo geral:
se n é um número natural ímpar, então $\sqrt[n]{a^n} = a$, sendo a um número real;
se n é um número natural par não nulo, então $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, sendo a um número real.

Observe alguns exemplos.

a) $\sqrt[3]{2^3} = 2$

b) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

c) $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

d) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Observação

- Quando o radicando for uma potência de expoente par que tenha na base uma expressão literal que represente um número real, vamos admitir que o radicando assume apenas valores reais iguais a zero ou maiores do que zero.

Assim:

$\sqrt[4]{x^4} = x$ Admitindo que $x \geqslant 0$.

$\sqrt{(3x-5)^2} = 3x - 5$ Admitindo que $3x - 5 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant \frac{5}{3}$.

2ª propriedade

Observe o cálculo a seguir.

$$\begin{tikzcd} \sqrt[12]{3^8} \arrow[rr, bend right, "\text{Escrevemos a expressão na forma de potência.}"'] & = & 3^{\frac{8}{12}} \arrow[rr, bend right, "\text{Simplificamos a fração do expoente.}"'] & = & 3^{\frac{2}{3}} \arrow[rr, bend right, "\text{Escrevemos a expressão na forma de raiz.}"'] & = & \sqrt[3]{3^2} \end{tikzcd}$$

Assim: $\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12:4]{3^{8:4}} = \sqrt[3]{3^2}$

Dividindo-se o índice e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior do que zero, o valor do radical não se altera, ou seja:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

sendo a um número real positivo, m um número inteiro, n um número natural não nulo e p divisor de m e n.

Essa propriedade nos possibilita simplificar certos radicais, isto é, transformá-los em radicais mais simples e equivalentes aos radicais dados.

Propriedades dos radicais

É importante os estudantes perceberem que as propriedades desenvolvidas têm por base a definição de expoente fracionário e as propriedades da potenciação.

Se julgar necessário, amplie os exemplos na lousa, pedindo a alguns estudantes que apliquem a propriedade envolvida, em situações variadas:

- $\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$
- $\sqrt[7]{3^7} = 3$
- $\sqrt[6]{3^6} = |3| = 3$
- $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$
- $\sqrt[14]{5^2} = \sqrt[14:2]{5^{2:2}} = \sqrt[7]{5}$

Do mesmo modo, podemos escrever:

$\sqrt[7]{5} = \sqrt[7 \cdot 2]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[14]{5^2}$

Assim, os estudantes se preparam para a redução dos radicais ao mesmo índice.

Propriedades dos radicais

Para ampliar o estudo da 3ª propriedade, apresente outros exemplos na lousa.

- $\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5^2} =$
  $= \sqrt{(3^2)^2} \cdot \sqrt{5^2} =$
  $= 3^2 \cdot 5 = 45$
- $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{45} =$
  $= \sqrt[3]{12 \cdot 50 \cdot 45} =$
  $= \sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 9} =$
  $= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3} =$
  $= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} =$
  $= 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$

Esses exemplos também possibilitam que os estudantes percebam que podem aplicar mais de uma propriedade, o que os auxiliará na obtenção do resultado das operações envolvidas.

Outra atividade que pode ser desenvolvida é a apresentação de expressões a serem escritas na forma de um único radical pelos estudantes, aplicando as propriedades dos radicais, como nos exemplos:

- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{3} =$
  $= \sqrt[3]{2 \cdot 10 \cdot 3} = \sqrt[3]{60}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot 3}{10}} =$
  $= \sqrt[3]{\dfrac{6}{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

Como exemplo, vamos simplificar os radicais a seguir.

a) $\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \sqrt[12\,:\,3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{9\,:\,3}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$ Dividimos o índice e o expoente por 3, que é divisor de 12 e de 9.

b) $\sqrt[20]{3{,}7^{15}} = \sqrt[20\,:\,5]{3{,}7^{15\,:\,5}} = \sqrt[4]{3{,}7^3}$ Dividimos o índice e o expoente por 5, que é divisor de 20 e de 15.

c) $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6\,:\,3]{5^{3\,:\,3}} = \sqrt{5}$

Decompomos 125 em fatores primos.

Dividimos o índice e o expoente por 3.

3ª propriedade

Observe os cálculos a seguir.

$$\sqrt{3 \cdot 5} = (3 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{7}{3} \cdot 6{,}5} = \left(\frac{7}{3} \cdot 6{,}5\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (6{,}5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[4]{6{,}5}$$

Em geral, sendo *a* e *b* números reais positivos e *n* um número natural não nulo, temos:

$$\underset{\textbf{radical de um produto}}{\sqrt[n]{a \cdot b}} = \underset{\textbf{produto dos radicais}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Observe os exemplos.

a) $\sqrt[3]{5{,}8 \cdot 3} = \sqrt[3]{5{,}8} \cdot \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[5]{7 \cdot \frac{5}{4}} = \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{\frac{5}{4}}$

4ª propriedade

Observe o cálculo a seguir.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Em geral, sendo *a* e *b* números reais positivos (note que $b \neq 0$) e *n* um número natural não nulo, temos:

$$\underset{\textbf{radical de um quociente}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \underset{\textbf{quociente dos radicais}}{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Observe os exemplos.

a) $\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$

Com base nas propriedades que acabamos de estudar, é possível simplificar certos radicais tirando fatores do radicando.

Como exemplo, vamos simplificar os radicais a seguir.

a) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{\frac{625}{64}} = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5}}{2^2} = \frac{5\sqrt[3]{5}}{4}$

Da mesma forma que podemos tirar fatores do radicando, podemos inserir fatores externos no radicando. Acompanhe alguns exemplos.

a) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 5}$

c) $2\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 18}$

d) $7\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

13 Calcule.

a) $\sqrt[3]{10^3}$ **13. a)** 10

b) $\sqrt[4]{1{,}7^4}$ **13. b)** 1,7

c) $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2}$ **13. c)** $\frac{5}{6}$

d) $\sqrt[4]{2^4}$ **13. d)** 2

14 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt[9]{5^6}$ **14. a)** $\sqrt[3]{5^2}$

b) $\sqrt[15]{3^{20}}$ **14. b)** $\sqrt[3]{3^4}$

c) $\sqrt[6]{11^3}$ **14. c)** $\sqrt{11}$

d) $\sqrt[18]{7^2}$ **14. d)** $\sqrt[9]{7}$

15 Decomponha o radicando em fatores primos e simplifique os radicais.

a) $\sqrt[10]{32}$ **15. a)** $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{27}$ **15. b)** $\sqrt{3}$

c) $\sqrt[4]{0{,}36}$ **15. c)** $\sqrt{0{,}6}$

d) $\sqrt[6]{0{,}216}$ **15. d)** $\sqrt{0{,}6}$

16 Simplifique os radicais, sabendo que $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $m \geqslant 0$.

a) $\sqrt[6]{a^3}$ **16. a)** $\sqrt{a}$

b) $\sqrt[20]{x^{15}}$ **16. b)** $\sqrt[4]{x^3}$

c) $\sqrt[9]{y^6}$ **16. c)** $\sqrt[3]{y^2}$

d) $\sqrt[12]{m^{10}}$ **16. d)** $\sqrt[6]{m^5}$

17 Transforme em um produto de radicais.

a) $\sqrt{4 \cdot 5}$ **17. a)** $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2 \cdot 3}$ **17. b)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{7 \cdot 10}$ **17. c)** $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{10}$

18 Represente como um quociente de radicais.

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ **18. a)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{18}{5}}$ **18. b)** $\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\sqrt[5]{\frac{2}{9}}$ **18. c)** $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{9}}$

19 Simplifique os radicais.

a) $\sqrt{8}$ **19. a)** $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27 \cdot 5}$ **19. b)** $3\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[5]{2^7}$ **19. c)** $2\sqrt[5]{4}$

d) $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4}$ **19. d)** $30\sqrt[4]{24}$

e) $\sqrt[3]{162}$ **19. e)** $3\sqrt[3]{6}$

f) $\sqrt[6]{3^3 \cdot 4^{12}}$ **19. f)** $16\sqrt{3}$

20 Introduza nos radicais os fatores externos em cada caso.

a) $2\sqrt{5}$ **20. a)** $\sqrt{2^2 \cdot 5}$

b) $3\sqrt[3]{2}$ **20. b)** $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$

c) $-2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{10}$ **20. c)** $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3^3 \cdot 10}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ **20. d)** $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{3^2}}$

e) $0{,}2\sqrt[3]{2}$ **20. e)** $\sqrt[3]{(0{,}2)^3 \cdot 2}$

f) $2\sqrt[4]{3}$ **20. f)** $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}$

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de aplicar as propriedades dos radicais e verificar sua utilização.

As resoluções do **exercício 14** e dos **exercícios 16** a **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Apresentamos a seguir a resolução do **exercício 13**.

a) $\sqrt[3]{10^3} = 10^{\frac{3}{3}} = 10^1 = 10$

b) $\sqrt[4]{1{,}7^4} = 1{,}7^{\frac{4}{4}} = 1{,}7^1 = 1{,}7$

c) $\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{2}} =$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{6}$

d) $\sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$

Aproveite o **exercício 15** para verificar se os estudantes ainda têm alguma dificuldade com relação à fatoração. Segue uma possível resolução para esse exercício.

a) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$

c) A maneira mais direta seria perceber que $0{,}36 = (0{,}6)^2$. No entanto, há outros caminhos, como:

$\sqrt[4]{0{,}36} = \sqrt[4]{36 \cdot 10^{-2}} =$

$= \sqrt[4]{6^2 \cdot 10^{-2}} =$

$= \sqrt[4]{6^2} \cdot \sqrt[4]{10^{-2}} =$

$= \sqrt{6} \cdot \sqrt{10^{-1}} = \sqrt{6 \cdot 10^{-1}} =$

$= \sqrt{0{,}6}$

d) Uma maneira possível seria escrever $0{,}216 = 216 \cdot 10^{-3}$, fatorar o número 216 e proceder como no **item c**. Contudo, também podemos escrever 0,216 na forma de fração.

$\sqrt[6]{0{,}216} = \sqrt[6]{\frac{216}{1\,000}} =$

$= \sqrt[6]{\frac{8 \cdot 27}{8 \cdot 125}} = \sqrt[6]{\frac{27}{125}} =$

$= \sqrt[6]{\frac{3^3}{5^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{5}\right)^3} =$

$= \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0{,}6}$

4. Adição algébrica com radicais

Habilidades da BNCC:
EF09MA03 e **EF09MA04**.

Neste tópico, os estudantes podem desenvolver as habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04) compreendendo maneiras de efetuar adição com números racionais. Para que os estudantes compreendam que determinados números expressos como radicais são irracionais, incentive-os a escrevê-los na forma decimal e a perceber que alguns desses números têm a parte decimal infinita e não apresentam dízima periódica.

Comente com os estudantes que radicais que têm mesmo índice e mesmo radicando são conhecidos como **radicais semelhantes**. Assim, eles podem perceber que a adição algébrica com radicais é efetuada quando ela envolve radicais semelhantes (fazendo uma analogia com adição algébrica de termos semelhantes em expressões algébricas). Por isso, é necessário simplificar cada radical envolvido na adição algébrica para obter termos com o mesmo radical.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 21** e **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

4 Adição algébrica com radicais

Acompanhe duas formas de efetuar a adição algébrica com radicais.

1ª forma

Substituímos as raízes por seus valores e fazemos os cálculos indicados. Por exemplo:

a) $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 7 + 4 = 11$

b) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16} = 2 - 2 = 0$

c) $-5\sqrt[3]{0{,}125} + 2\sqrt{1{,}69} = -5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}3 = -2{,}5 + 2{,}6 = 0{,}1$

2ª forma

Se houver vários radicais iguais, podemos colocá-los em evidência. Por exemplo:

Colocando em evidência o fator comum.

a) $\overbrace{10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}} = \overbrace{(10 + 4 - 1)\sqrt[3]{2}} = 13\sqrt[3]{2}$

fator comum

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

b) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + \sqrt{7} + 4\sqrt{7} = (3 - 5)\sqrt{5} + (2 + 1 + 4)\sqrt{7} = -2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$

A expressão $-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7}$ não pode mais ser reduzida, porque seus termos não têm radicais iguais. Mas é possível encontrar um valor aproximado para ela.

Como $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$ e $\sqrt{7} \simeq 2{,}6$, temos:

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq -2 \cdot 2{,}2 + 7 \cdot 2{,}6$

$-2\sqrt{5} + 7\sqrt{7} \simeq 13{,}8$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} = 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3} + 5\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3 \cdot 5^2} =$

$= 2 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + \cancel{10\sqrt{3}} - \cancel{10\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 Calcule.

a) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81}$ **21. a)** 11

b) $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{64} + \sqrt[6]{64}$ **21. b)** 6

c) $2\sqrt{4{,}41} - 3\sqrt{2{,}56}$ **21. c)** $-0{,}6$

d) $5\sqrt{1{,}44} + 3\sqrt[3]{0{,}343}$ **21. d)** 8,1

22 Efetue.

a) $3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 6\sqrt{5}$ **22. a)** $-2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ **22. b)** $2\sqrt{2} + 15\sqrt{3}$

c) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt[5]{3}$ **22. c)** $5\sqrt[5]{3} + \sqrt{3}$

d) $3 + \sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2}$ **22. d)** $10 - 4\sqrt{2}$

23 Reduza os radicais a uma expressão na forma $a\sqrt{b}$, com a e b inteiros.

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$ **23. a)** $5\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{63} - \sqrt{7}$ **23. b)** $11\sqrt{7}$

c) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$ **23. c)** $6\sqrt{2}$

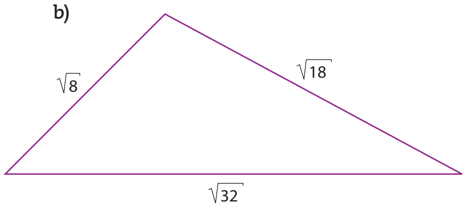
d) $\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{108}$ **23. d)** $13\sqrt{3}$

24 Determine a medida do perímetro das figuras, cujas medidas dos lados são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento.

a)

24. a) $P = 10\sqrt{3}$

b)



24. b) $P = 9\sqrt{2}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

25 Ao efetuar $\sqrt[3]{\frac{15}{343} + \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{5}{49}}}$, qual é o valor obtido? **25.** Alternativa **a.**

a) $\frac{\sqrt[3]{211}}{7}$

b) $\frac{\sqrt[3]{211}}{49}$

c) $\frac{211}{343}$

d) $\frac{19}{350}$

5 Multiplicação e divisão com radicais

Multiplicação com radicais

Para multiplicar radicais de mesmo índice, aplicamos a 3ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

sendo n um número natural não nulo e a e b números reais positivos.

Portanto, para multiplicar radicais de mesmo índice, mantemos o índice e multiplicamos os radicandos, simplificando, sempre que possível, o resultado obtido.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

b) $-5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = (-5 \cdot 3)\sqrt{3 \cdot 2} = -15\sqrt{6}$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2) = \sqrt{4} + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

d) $(5 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7}) = 5 \cdot 2 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7^2} = 10 - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 7 = 3 - 3\sqrt{7}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 23** e **24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 25**.

$$\sqrt[3]{\frac{15}{343} + \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{5}{49}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{15}{343} + \sqrt{\frac{16}{49}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{15}{343} + \frac{4}{7}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{211}{343}} = \frac{\sqrt[3]{211}}{7}$$

Alternativa **a**.

5. Multiplicação e divisão com radicais

Habilidades da BNCC:
EF09MA03 e **EF09MA04**.

Neste tópico, os estudantes continuam desenvolvendo as habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04), agora, explorando a multiplicação e a divisão com radicais. Sempre que viável, explore a representação na forma decimal de alguns radicais que representem números irracionais.

Na multiplicação de dois ou mais radicais, é necessário apenas que os radicais tenham o mesmo índice. Desse modo, espera-se que os estudantes percebam que devem utilizar as propriedades de radicais para obter radicais de mesmo índice antes de efetuar essas operações.

Multiplicação e divisão com radicais

Assim como na multiplicação, na divisão de dois ou mais radicais é necessário que os radicais tenham índices iguais. Ressalte aos estudantes que as expressões numéricas envolvendo as operações com radicais estudadas seguem a mesma ordem utilizada para expressões numéricas com números racionais.

Caso perceba algum estudante com dificuldade em aplicar as propriedades dos radicais, oriente-o a seguir o caminho da transformação do radical em potência com expoente fracionário e, depois, a efetuar as operações com as frações, e reverter a fração obtida em radical.

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da multiplicação reduzimos esses radicais a um mesmo índice. Observe, por exemplo, como fazemos a redução dos radicais $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt[4]{3}$ a um mesmo índice.

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt[3]{2^2} & = & 2^{\frac{2}{3}} & = & 2^{\frac{8}{12}} & = & \sqrt[12]{2^8} \\ \sqrt[4]{3} & = & 3^{\frac{1}{4}} & = & 3^{\frac{3}{12}} & = & \sqrt[12]{3^3} \end{array}$$

Escrevemos os radicais na forma de potência.

Determinamos, no expoente, frações equivalentes de mesmo denominador.

Escrevemos as potências na forma de radical.

Então, multiplicando esses dois radicais, obtemos:

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{6\,912}$$

Observe que, no desenvolvimento apresentado, os números considerados são positivos. Mas também poderíamos ter números negativos, caso o índice do radical seja ímpar. Por exemplo:

a) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{0{,}2} = \sqrt[3]{(-5) \cdot 0{,}2} = \sqrt[3]{-1} = -1$

b) $\sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-27) \cdot (-8)} = \sqrt[3]{216} = 6$

Divisão com radicais

Para dividir radicais de mesmo índice, aplicamos a 4ª propriedade dos radicais:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

sendo n um número natural não nulo e a e b números reais positivos (note que $b \neq 0$).

Logo, para dividir radicais de mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos, simplificando o resultado obtido, sempre que possível.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{20 : 10} = \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{28} : \sqrt{7} = \sqrt{28 : 7} = \sqrt{4} = 2$

c) $30\sqrt{15} : 5\sqrt{3} = (30 : 5)\sqrt{15 : 3} = 6\sqrt{5}$

d) $\left(12\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right) : \left(5\sqrt{2}\right) = 12\sqrt{6} : 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = \frac{12}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$

Se os índices dos radicais forem diferentes, antes da divisão reduzimos esses radicais a um mesmo índice. Por exemplo:

a) $\sqrt{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{\frac{8}{3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{8}{3}\right)^3} : \sqrt[6]{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{8}{3}}$

b) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{4^4} : \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^8 : 2^3} = \sqrt[12]{2^5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Efetue as multiplicações.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}$ **26. a)** $\sqrt[3]{30}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **26. b)** 4

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ **26. c)** 6

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ **26. d)** $5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$ **26. e)** $2\sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ **26. f)** $\sqrt[6]{200}$

27 Aplicando a propriedade distributiva, calcule:

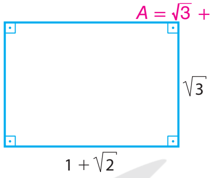
a) $\sqrt{5} \cdot (1 + \sqrt{5})$ **27. a)** $\sqrt{5} + 5$

b) $(3\sqrt{2} - 2) \cdot (\sqrt{2} + 3)$ **27. b)** $7\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{3} + 2) \cdot (2\sqrt{3})$ **27. c)** $6 + 4\sqrt{3}$

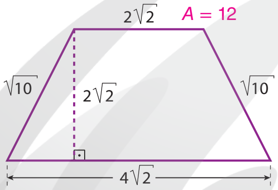
28 Calcule as medidas da área e do perímetro das figuras, cujas medidas são dadas em uma mesma unidade de medida de comprimento. **28. a)** $P = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ $A = \sqrt{3} + \sqrt{6}$

a)



28. b) $P = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ $A = 12$

b)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

29 Efetue as divisões.

a) $\sqrt{12} : \sqrt{3}$ **29. a)** 2

b) $\sqrt{50} : \sqrt{2}$ **29. b)** 5

c) $12\sqrt[3]{-6} : 3\sqrt[3]{2}$ **29. c)** $4\sqrt[3]{-3}$

d) $\sqrt[3]{6} : \sqrt{3}$ **29. d)** $\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

30 Calcule o valor das expressões.

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{98} + \sqrt{200}) : (2\sqrt{2} + \sqrt{8})$ **30. a)** 5

b) $(\sqrt{150} - \sqrt{24}) : (2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})$ **30. b)** $3\sqrt{3}$

c) $(10\sqrt{27} + 10\sqrt{3}) : 10\sqrt{3}$ **30. c)** 4

d) $(20\sqrt{10} + 10\sqrt{18}) : 2\sqrt{2}$ **30. d)** $10\sqrt{5} + 15$

31 (Uece) Se $p = 3 + \sqrt{2}$ e $q = 2 - \sqrt{2}$, então $p \cdot q - p$ é igual a: **31.** Alternativa **a**.

a) $1 - 2\sqrt{2}$

b) $1 - \sqrt{2}$

c) $1 + \sqrt{2}$

d) $1 + 2\sqrt{2}$

32 (Fuvest-SP) Se $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt[4]{2}$, então o valor de $a \cdot b$ é: **32.** Alternativa **a**.

a) $\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[4]{4}$

c) $\sqrt{8}$

d) $\sqrt{4}$

e) $\sqrt[8]{4}$

33 ***Hora de criar*** – Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Calculem:

- $(\sqrt{201} + \sqrt{199}) \cdot (\sqrt{201} - \sqrt{199})$ **33. a)** 2; 2; 7.
- $(\sqrt{31{,}4} + \sqrt{29{,}4}) \cdot (\sqrt{31{,}4} - \sqrt{29{,}4})$
- $(\sqrt{89} + \sqrt{82}) \cdot (\sqrt{89} - \sqrt{82})$

b) Cada um de vocês pensa em dois números positivos e substitui as figuras △ e ◇ na expressão $(\sqrt{△} + \sqrt{◇}) \cdot (\sqrt{△} - \sqrt{◇})$ para que o outro faça o cálculo. Discutam os resultados obtidos e elaborem uma regra para o resultado desse tipo de expressão.

33. b) Espera-se que os estudantes concluam que o resultado sempre será a diferença entre os radicandos.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 26** a **33** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 33**, verifique se alguma dupla associa os produtos indicados com o produto notável da soma pela diferença de dois termos e, se associar, como procede ao efetuar a potenciação com radicais que surgirão nesse caso. Compartilhe os diferentes procedimentos, validando-os com os estudantes.

6. Potenciação e radiciação com radicais

Habilidades da BNCC:
EF09MA03 e **EF09MA04**.

Neste tópico, os estudantes mobilizam as habilidades (EF09MA03) e (EF09MA04) e as desenvolvem à medida que resolvem problemas envolvendo radicais, dos quais alguns representam números irracionais. Ressalte aos estudantes que efetuar uma potenciação de um radical equivale a elevar o radicando à potência indicada. Assim, no caso de o radicando ser formado por uma expressão, toda essa expressão deve ser elevada à potência. Por exemplo:

- $\left(\sqrt{125}\right)^2 = \sqrt{(125)^2}$
- $\left(\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}\right)^{-1} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{64}{125}\right)^{-1}}$
- $\left(\sqrt[4]{2a - b}\right)^8 = \sqrt[4]{(2a - b)^8}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 34** a **36** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Pense mais um pouco...

Nesta seção, a intenção é que os estudantes não utilizem um material concreto, no caso cubos, para encontrar as respostas, pois devem ser incentivados a usar conceitos numéricos e geométricos.

Pode ser interessante que eles formem duplas para que registrem coletivamente as resoluções e depois as troquem e comparem.

As resoluções dos **itens a** e **b** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

6 Potenciação e radiciação com radicais

Potenciação

Observe o cálculo a seguir.

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[5]{3^4}$$

Então: $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4}$

Para potenciação com radicais, basta elevar o radicando à potência indicada. Observe como podemos fazer para simplificar algumas expressões.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3^2}\right)^2 = \sqrt[3]{(3^2)^2} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

c) $\left(4\sqrt{5}\right)^3 = 4^3 \cdot \sqrt{5^3} = 64 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 5} = 64 \cdot 5\sqrt{5} = 320\sqrt{5}$

d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

34 Calcule:

a) $\left(\sqrt{15}\right)^2$ **34. a)** 15

b) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$ **34. b)** 3

c) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$ **34. c)** 63

d) $\left(3\sqrt[4]{3}\right)^4$ **34. d)** 243

e) $\left(\sqrt{10}\right)^3$ **34. e)** $10\sqrt{10}$

f) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4$ **34. f)** $48\sqrt[3]{3}$

35 Efetue:

a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2$
35. a) $10 + 2\sqrt{21}$

b) $\left(3 - \sqrt{7}\right)^2$
35. b) $16 - 6\sqrt{7}$

36 Qual é o valor da expressão $A = x^4 + x^2 + 2$, para $x = -\sqrt{3}$? **36.** $A = 14$

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Bruno tem 30 cubos cujas arestas medem $2\sqrt{7}$ cm.

a) Quantos desses cubos ele deve usar para formar o maior cubo possível? *Pense mais um pouco...*: **a)** 27 cubos.

b) Calcule a medida do volume do cubo formado.
b) $1\,512\sqrt{7}$ cm³

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Radiciação com radicais

Observe como podemos proceder para simplificar as expressões a seguir e reduzi-las a um radical, utilizando os conceitos estudados.

5 × 3

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{6^2}} = \sqrt[5]{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{\frac{\frac{2}{3}}{5}} = 6^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{6^2}$

$3 \times 2 \times 4$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{7^5}}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{\frac{5}{4}}{2}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{5}{8}}} = 7^{\frac{\frac{5}{8}}{3}} = 7^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{7^5}$

Para extrair a raiz de um radical, devemos multiplicar os índices desses radicais e conservar o radicando, simplificando o radical obtido sempre que possível (considerando o radicando um número real positivo e os índices números naturais não nulos).

Acompanhe outros exemplos.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2 \cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^2}}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 2]{5^2} = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[6]{5}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}}} = \sqrt[4 \cdot 2 \cdot 3]{8 \cdot 5} = \sqrt[24]{40}$

d) $\sqrt[4]{2\sqrt{\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{2\sqrt[2 \cdot 3]{5}} = \sqrt[4]{2\sqrt[6]{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^6 \cdot 5}} = \sqrt[4 \cdot 6]{64 \cdot 5} = \sqrt[24]{320}$

e) $\sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{2^3\sqrt{2^4}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^6 \cdot 2^4}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3 \cdot 2]{2^{10}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[6]{2^{10}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{12} \cdot 2^{10}}} = \sqrt[24]{2^{22}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Reduza estas expressões a um único radical e simplifique-as, se possível.

a) $\sqrt{\sqrt{10}}$ **37. a)** $\sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{3}}$ **37. b)** $\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ **37. c)** $\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$ **37. d)** $\sqrt[18]{3}$

e) $\sqrt[6]{\sqrt{5^3}}$ **37. e)** $\sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}}$ **37. f)** 2

g) $\sqrt{\sqrt{15^4}}$ **37. g)** 15

h) $\sqrt[4]{3\sqrt{5}}$ **37. h)** $\sqrt[8]{45}$

38 Verifique qual das sentenças a seguir é falsa.

38. Alternativa **b.**

a) $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11}$

b) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1\,024}}} = \sqrt[4]{2^5}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{3^2}$

Racionalização de denominadores

Considere o quociente de 2 por $\sqrt{3}$. Ele pode ser indicado por $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Um quociente não se altera quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número não nulo. Observe, por exemplo, o que acontece quando multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Com essa multiplicação, obtemos uma expressão com denominador racional. Esse procedimento é chamado de **racionalização de denominadores**.

É conveniente efetuar cálculos com radicais quando eles não estão no denominador. Por isso, quando necessário, racionalizamos o denominador de uma expressão fracionária.

Radiciação com radicais

Ao tratar de radiciação com radicais, ressalte aos estudantes os casos nos quais é necessária a inclusão de um fator em um radical para que se obtenha radical de radical, por exemplo:

- $\sqrt[3]{2\sqrt{2^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^4 \cdot 2^2}} =$
  $= \sqrt[6]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $\sqrt[4]{3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\sqrt{5 \cdot 3^2}} =$
  $= \sqrt[8]{5 \cdot 9} = \sqrt[8]{45}$

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 37** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 38**, a sentença do **item b** é falsa pois, aplicando-se a propriedade da radiciação dos radicais, os índices não deveriam ter sido adicionados, mas sim multiplicados, como ocorreu nos demais itens.

Racionalização de denominadores

Sugerimos que seja retomado o produto notável da soma pela diferença de dois termos, para explorar a racionalização em situações como a apresentada no **exemplo c**.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 39** a **44** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Como o **exercício 42** exige que os estudantes busquem um recurso mais conveniente para fazer os cálculos, é importante destacar que ter um número irracional aproximado por racional pode levar a erros significativos de aproximação quando são realizadas muitas operações envolvendo a aproximação e dependendo do contexto. Esse é, então, um exercício em que os estudantes podem colocar em prática a racionalização de denominadores para obter resultados mais precisos ou exatos.

Para complementar o **exercício 44**, peça aos estudantes que escrevam entre quais números naturais encontra-se o valor de *x*.

Para fazer a demonstração no **exercício 45**, basta realizar os cálculos a seguir, lembrando que o inverso de $\sqrt{2} - 1$ é dado por $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, então, temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \sqrt{2} + 1$$

Acompanhe outros exemplos.

a) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

Multiplicando os dois termos dessa expressão por $\sqrt{2}$, obtemos:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}}$.

Para multiplicar os dois termos da expressão, convém escolher um número que, multiplicado por $\sqrt[5]{7^2}$, resulte em $\sqrt[5]{7^5}$, isto é, em 7. Esse número é o quociente $\sqrt[5]{7^5} : \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{7^3}$.

Portanto, multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt[5]{7^3}$, obtemos:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^2 \cdot 7^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{2\sqrt[5]{7^3}}{7} = \frac{2\sqrt[5]{343}}{7}$$

c) Vamos racionalizar o denominador da expressão $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

Neste caso, convém aplicar o produto notável: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Multiplicando os dois termos da expressão por $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{7 - 3} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{4}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39 Qual é um número pelo qual devemos multiplicar os dois termos da expressão $\frac{15}{4\sqrt{3}}$ para obter uma expressão cujo denominador seja um número racional? **39.** Resposta possível: $\sqrt{3}$.

40 Para racionalizar o denominador da expressão $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$, podemos multiplicar seus dois termos por qual radical?
40. Resposta possível: $\sqrt[3]{5^2}$.

41 Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ **41. a)** $2\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **41. b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ **41. c)** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

d) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ **41. d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ **41. e)** $\sqrt[3]{5^2}$

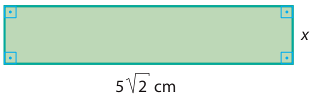
f) $\frac{4}{\sqrt[8]{2^5}}$ **41. f)** $2\sqrt[8]{2^3}$

42 Sabendo que $\sqrt{5}$ com três casas decimais é 2,236, calcule o quociente $\frac{3}{\sqrt{5}}$:

a) substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236; **42. a)** Aproximadamente 1,342.
b) racionalizando o denominador e, depois, substituindo $\sqrt{5}$ por 2,236. **42. b)** Aproximadamente 1,342.

43 Sabendo que $\sqrt{10}$ com três casas decimais é 3,162, calcule da maneira mais conveniente o quociente $\frac{2}{\sqrt{10} - 3}$. **43.** Respostas possíveis: 12,324 ou 12,346

44 Sabendo que a medida da área da região retangular a seguir é 10 cm², calcule o valor de *x*. **44.** $x = \sqrt{2}$ cm



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

45 Demonstre que o inverso de $\sqrt{2} - 1$ é $\sqrt{2} + 1$.
45. Demonstração.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo e interpretando gráfico de linha

Observe a tabela a seguir, que mostra a taxa acumulada de variação do Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro, em porcentagem, de 2004 a 2021, no 4º trimestre de cada ano.

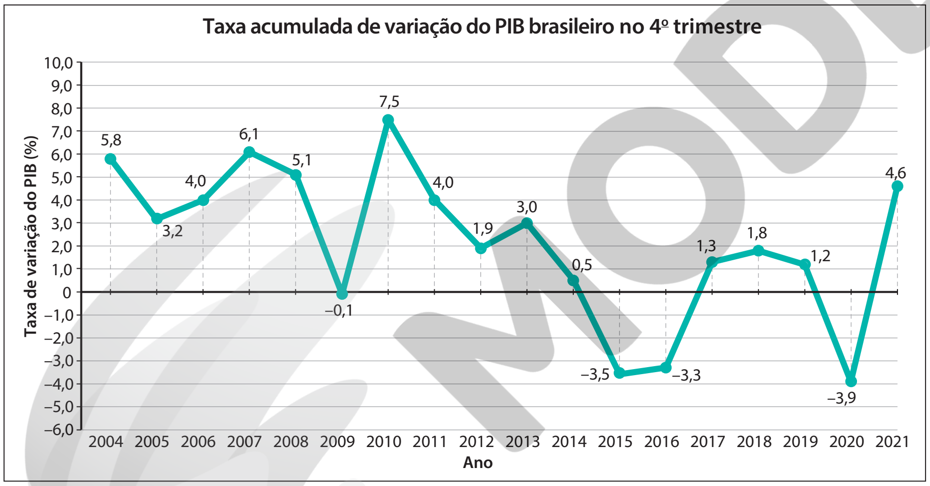
Taxa acumulada de variação do PIB no 4º trimestre (em %)									
Ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
PIB	5,8	3,2	4,0	6,1	5,1	–0,1	7,5	4,0	1,9
Taxa acumulada de variação do PIB no 4º trimestre (em %)									
Ano	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
PIB	3,0	0,5	–3,5	–3,3	1,3	1,8	1,2	–3,9	4,6

Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/industria/9300-contas-nacionais-trimestrais.html?edicao=20920&t=series-historicas. Acesso em: 24 jul. 2022.

O gráfico que melhor comunica a variação de valores no decorrer do tempo é o gráfico de linha. Já estudamos a construção de um gráfico de linha com base em um gráfico de colunas. Lá, construímos um gráfico de colunas usando os valores da tabela. Nesse gráfico, antes de apagar as colunas, marcamos o ponto médio do lado superior do retângulo de cada coluna e traçamos uma linha de segmentos consecutivos cujas extremidades são esses pontos assinalados.

Porém podemos construir o gráfico de linha sem passar pelo de colunas; basta traçar os eixos vertical e horizontal com as respectivas escalas e localizar os pontos dados pelas coordenadas (ano, PIB), por exemplo (2004; 5,8), (2005; 3,2) etc. É como se reduzíssemos as colunas a linhas verticais tracejadas e destacássemos o "ponto de cima".

Nesse gráfico de linha, os únicos pontos confiáveis são os das extremidades dos segmentos; os outros só compõem o segmento que indica se, naquele intervalo de tempo, há acréscimo, constância ou decréscimo do PIB. Observe.


Taxa acumulada de variação do PIB brasileiro no 4º trimestre

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/industria/9300-contas-nacionais-trimestrais.html?edicao=20920&t=series-historicas. Acesso em: 24 jul. 2022.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA22**.

Nesta seção, os estudantes devem interpretar o gráfico de linha apresentado, construir outros e fazer comparações dos resultados obtidos, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA22).

Sugerimos ampliar as atividades, propondo aos estudantes que pesquisem os dados mais recentes sobre o PIB brasileiro no ano de realização da atividade.

Discuta com eles o significado da taxa de variação do PIB para a economia de um país, trabalhando o Tema Contemporâneo Transversal **educação fiscal**. Comente que um dos fatores determinantes para o crescimento do PIB é o consumo privado de bens e serviços, ou seja, o gasto das famílias para a aquisição de bens e serviços. Se o consumo das famílias aumenta, indústrias e empresas precisam aumentar a produção para atender à demanda e, consequentemente, aumentar seus lucros. Assim, quanto mais a população consome, mais o PIB de um país ou de uma região tende a crescer. Em contrapartida, a diminuição do consumo pode levar à queda do PIB.

Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 1,** uma diferença observada pode ser o fato de que o gráfico reconstruído contenha menos detalhes relativos a essa taxa de variação, por ter sido feito com base apenas nos anos pares. Do ano 2008 para o ano 2010, por exemplo, verificamos um crescimento na taxa acumulada de variação do PIB brasileiro no 4º trimestre, o que pode levar à conclusão de que nesse período a taxa de variação do PIB só cresceu. No entanto, no gráfico original (que já estava construído), observamos que de 2008 para 2009 a taxa de variação do PIB diminuiu, o crescimento se dá de 2009 para 2010, ou seja, no período de 2008 a 2010 não houve apenas crescimento. Conclusão análoga pode ser obtida em outros períodos. No período de 2012 a 2014, por exemplo, não há só decréscimo, mas um crescimento seguido de uma queda.

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios é mais uma oportunidade de os estudantes revisitarem os principais conceitos tratados no capítulo e mobilizarem os conhecimentos construídos, identificando possíveis dúvidas.

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Trabalhando a informação:

1 Com base no gráfico anterior, responda.

- **a)** Em que ano o índice percentual foi maior? Em que ano ele foi menor? **1. a)** 2010; 2020.
- **b)** Há algum ano em que o PIB não cresceu nem diminuiu? Qual? **1. b)** Não.
- **c)** Usando as mesmas unidades, reconstrua o gráfico em papel vegetal e considere apenas os pontos de ano par. Depois, sobreponha-o ao gráfico anterior e escreva as diferenças que você observa entre os dois gráficos. **1. c)** Construção de gráfico.

2 Considere a tabela a seguir.

Taxa acumulada de variação do PIB brasileiro *per capita* (em %)

Ano	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
PIB	2,9	0,0	1,7	–0,2	4,4	2,0	2,8	4,9	4,0

Taxa acumulada de variação do PIB brasileiro *per capita* (em %)

Ano	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
PIB	–1,2	6,5	3,0	1,0	2,1	–0,4	–4,6	–4,4

Dados obtidos em: IBGE. **Contas Nacionais Trimestrais**. Rio de Janeiro: IBGE, out./dez. 2016. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2121/cnt_2016_4tri.pdf. Acesso em: 26 maio 2022.

- **a)** Em que ano o índice percentual foi maior? Em que ano esse índice foi menor? **2. a)** 2010; 2015.
- **b)** Há algum ano em que o PIB não cresceu nem diminuiu? Qual? **2. b)** Sim; 2001.
- **c)** Construa o gráfico de linha com os dados da tabela. **2. c)** Construção de gráfico.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Exercícios complementares:

1 Em 1995, Dave Wineland e Chris Monroe construíram o primeiro transmissor do tamanho de um átomo, ou seja, 1 milhão de vezes menor do que 1 milímetro. Use o prefixo do SI mais adequado para expressar essa medida em metro. **1.** 1 nanômetro.

2 "**Quando o Sol se for** – Na fase gigante vermelha, daqui a 5 bilhões de anos, o diâmetro do Sol engolirá a atual órbita da Terra. Já quando virar uma anã branca, o Sol deve ficar com um diâmetro parecido com o do nosso planeta – cerca de 1 centésimo do diâmetro que a estrela tem hoje."

Fonte: ALMANAQUE Abril 2015. São Paulo: Abril, 2015. p. 173.

Pesquise as medidas dos diâmetros da Terra e do Sol e verifique se a informação desse texto tem coerência. **2.** Medidas dos diâmetros: = $1{,}28 \cdot 10^4$ km; Sol = $1{,}4 \cdot 10^6$ km. 1 centésimo de $1{,}4 \cdot 10^6$ km = $1{,}4 \cdot 10^4$ km, que é próximo de $1{,}28 \cdot 10^4$ km. Podemos considerar que a informação tem coerência.

3 Ontem, o celular de Andréa tinha 1,2 GB disponível para armazenamento quando Caio lhe enviou vários vídeos que fez durante a apresentação de uma banda. Eles tinham 21,5 MB, 33 450 kB, 318 MB, 104 MB, 43 500 kB, 99,5 MB e 110,55 MB.

- **a)** O celular de Andréa tinha capacidade para receber todos os vídeos enviados por Caio? **3. a)** Sim.
- **b)** Caso a resposta ao item anterior seja afirmativa, quantos MB o celular dela ainda poderia receber? **3. b)** 469,5 MB

4 No caderno, complete a tabela com as medidas das distâncias médias dos planetas do Sistema Solar ao Sol e com as medidas dos respectivos diâmetros. **4.** A resposta deste exercício está no *Manual*.

Distância média ao Sol dos planetas do Sistema Solar

Planeta	Medida da distância média ao Sol em ua	Medida da distância média ao Sol em km	Medida do diâmetro em ano-luz	Medida do diâmetro em km
Mercúrio	0,4	▨	▨	$4{,}8 \cdot 10^3$
Vênus	▨	$1{,}08 \cdot 10^8$	▨	$1{,}2 \cdot 10^4$
Terra	1	$1{,}5 \cdot 10^8$	$1{,}35 \cdot 10^{-9}$	▨
Marte	1,5	▨	$7{,}16 \cdot 10^{-10}$	▨
Júpiter	▨	$7{,}8 \cdot 10^8$	▨	$1{,}43 \cdot 10^5$
Saturno	9,5	▨	▨	$1{,}2 \cdot 10^5$
Urano	19,1	▨	▨	$5{,}1 \cdot 10^4$
Netuno	▨	$4{,}5 \cdot 10^9$	$5{,}16 \cdot 10^{-9}$	▨

Dados obtidos em: PLANETÁRIO UFSC. Disponível em: http://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar. Acesso em: 23 mar. 2022.

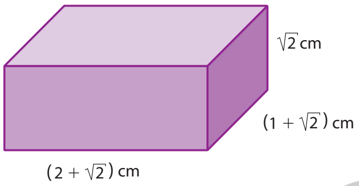
5 Use uma régua para traçar uma reta numérica e, com o auxílio de um compasso, represente nela os números $\sqrt{5}$ e $\sqrt{6}$. **5.** Construção de figura.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

6 Com régua e compasso, represente o número $\sqrt{13}$ na reta numérica. **6.** Construção de figura.

7 Com régua e compasso, represente o número $\sqrt{17}$ em uma reta numérica. **7.** Construção de figura.

8 Considere o paralelepípedo a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine:

a) a soma das medidas de todas as arestas do paralelepípedo; **8. a)** $(12 + 12\sqrt{2})$ cm

b) a soma das medidas das áreas das faces laterais; **8. b)** $(6\sqrt{2} + 8)$ cm²

c) a medida do volume desse paralelepípedo. **8. c)** $(4\sqrt{2} + 6)$ cm³

9 O passo de um robô mede exatamente $50\sqrt{3}$ cm. Quantos passos ele deverá dar para percorrer $18{,}5\sqrt{3}$ m? **9.** 37 passos.

10 Racionalize o denominador de cada uma das expressões a seguir.

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ **10. a)** $4\sqrt{2}$

b) $\frac{10}{\sqrt{3} - 1}$ **10. b)** $5(\sqrt{3} + 1)$

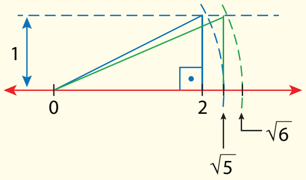
c) $\frac{5 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ **10. c)** $\sqrt{5} + 3$

11 Por volta dos anos 1800, a expressão $\frac{26 \cdot \sqrt{146}}{100}$ foi usada como um valor aproximado do número π. Usando uma calculadora simples, verifique até que casa decimal a expressão dada coincide com o valor de π conhecido atualmente: $\pi = 3{,}1415927...$ **11.** Até a 5ª casa decimal.

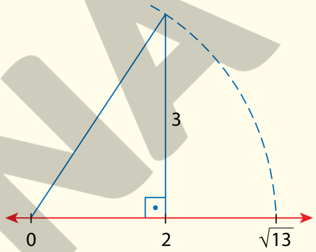
Exercícios complementares

As resoluções do **exercício 4** e dos **exercícios 8** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

A seguir, apresentamos uma possível construção para o **exercício 5**.

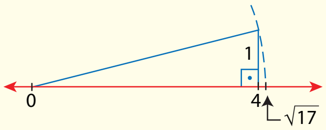


No **exercício 6**, uma possível representação é:



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 7**, uma representação pode ser:



Verificando

Nesta seção são propostos testes que abordam os conteúdos apresentados ao longo deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos testes propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

Sugerimos, ainda, que os estudantes se organizem em duplas para resolver os testes e, depois de corrigidos, cada estudante deve resolver novamente aqueles que estiverem incorretos.

As resoluções dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Organizando

As questões apresentadas nessa seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação dos estudantes.

É interessante que cada estudante responda individualmente e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou complementando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O disco rígido, popularmente conhecido como HD, é a parte do computador no qual se armazenam dados. Em 2022, o HD de maior capacidade poderia armazenar 120 *petabytes* de dados. Qual é o armazenamento desse HD em *byte*? **1.** Alternativa **c**.

a) $120 \cdot 2^{30}$
b) $120 \cdot 2^{50}$
c) $120 \cdot 10^{15}$
d) $120 \cdot 10^{50}$

2 Qual é a raiz reduzida da expressão $5^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{5})^{\frac{5}{2}}$?

a) $\sqrt[12]{5^{19}}$
b) $\sqrt[19]{5^{12}}$
c) $\sqrt[12]{5^{5}}$
d) $\sqrt[12]{5^{8}}$

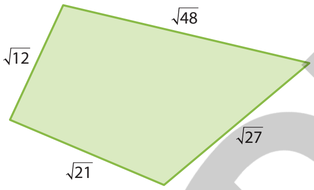
2. Alternativa **a**.

3 Ao simplificar a expressão a seguir em um só radical, obtemos: **3.** Alternativa **d**.

$$\frac{b \cdot \sqrt[9]{a^6}}{\sqrt[6]{c^{14}}}$$

a) $\sqrt[3]{\frac{a^3b}{c^{12}}}$
b) $\sqrt{\frac{a^6b^2}{c^5}}$
c) $\sqrt[3]{\frac{a^6b}{c^{14}}}$
d) $\sqrt[3]{\frac{a^2b^3}{c^7}}$

4 Qual é a medida do perímetro do quadrilátero da figura a seguir? **4.** Alternativa **c**.



a) $16\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}(29 + \sqrt{7})$
c) $\sqrt{3}(9 + \sqrt{7})$
d) $27 + 3\sqrt{7}$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

5 Se $a = \sqrt[4]{3}$ e $b = \sqrt[6]{2}$, então $a \cdot b$ é igual a:

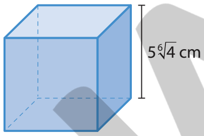
a) $\sqrt[12]{31}$.
b) $\sqrt[12]{108}$.
c) $\sqrt[6]{108}$.
d) $\sqrt[24]{108}$.

5. Alternativa **b**.

6 A área de um retângulo mede $\sqrt{1550}$ cm² e a altura, $\sqrt{62}$ cm. A medida da base desse retângulo é igual a: **6.** Alternativa **b**.

a) 25 cm.
b) 5 cm.
c) $\sqrt{15}$ cm.
d) $\sqrt{40}$ cm.

7 Qual é a medida do volume do cubo da figura a seguir? **7.** Alternativa **c**.



a) 125 cm³
b) $125\sqrt[3]{4}$ cm³
c) 250 cm³
d) $250\sqrt[3]{4}$ cm³

8 Assinale a alternativa que contém a forma simplificada da expressão $\sqrt{9 - \sqrt{34 + \sqrt[3]{8}}}$. **8.** Alternativa **d**.

a) 3
b) $\sqrt{15}$
c) 4
d) $\sqrt{3}$

9 Racionalizando o denominador da expressão a seguir, obtemos a expressão de qual das alternativas? **9.** Alternativa **c**.

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

a) $\frac{\sqrt{60} + 6}{2}$
b) $\frac{\sqrt{60} - 6}{8}$
c) $\sqrt{15} - 3$
d) $\sqrt{30} - 3$

Organizando: **b)** Considerando as condições de existência, podemos dizer que radical é uma potência com expoente fracionário. Em símbolos: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, sendo *a* um número real, *m* um número inteiro e *n* um número natural não nulo.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Descreva como você transforma a medida de um comprimento dada em ano-luz para uma medida aproximada dada em quilômetro. **a)** Multiplicando a medida dada em ano-luz por $9{,}5 \cdot 10^{12}$.

b) Que relação podemos estabelecer entre um radical e uma potência?

c) Descreva a estratégia que você utiliza para efetuar a multiplicação e a divisão de radicais com um mesmo índice. **c)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem a 3ª e a 4ª propriedade dos radicais.

d) Descreva a estratégia que você utiliza para efetuar a multiplicação e a divisão de radicais com índices diferentes. **d)** Idem à **c**, acrescentando que, primeiro, se deve reduzir os radicais ao mesmo índice.

e) Como você explicaria a um colega no que consiste o processo de racionalização do denominador de uma fração com denominador irracional? **e)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que a racionalização do denominador se faz com a multiplicação do numerador e do denominador da fração por um mesmo número, não nulo, de modo que o produto desse número com o denominador seja racional.

Capítulo 3

Grandezas proporcionais

Observe, leia e responda no caderno.

a) O grafite brasileiro é conhecido no mundo todo. No Japão, na Lituânia, no Malaui e em Cuba é possível observar murais com temáticas brasileiras enfeitando as ruas e estimulando um pensamento crítico sobre a sociedade. Qual é a importância da arte urbana, como o grafite?

b) Se dois grafiteiros levam 10 dias para concluir um grande painel, com a ajuda de outros dois artistas, igualmente hábeis, em quantos dias eles terminariam essa arte? **b)** 5 dias.

c) Para pintar um mural medindo 25 metros de altura por 10 metros de comprimento uma artista precisa de 25 litros de tinta. Para pintar um mural medindo 20 metros de altura por 50 metros de comprimento quantas latas de tinta de 1 litro cada seriam necessárias?

d) A arte de rua é comum na cidade em que você vive? Você conhece algum artista de arte urbana?

GINA KELLY/ALAMY/FOTOARENA

Obra da artista de grafite Shamsia Hassani, em um estacionamento em Eugene, Oregon, Estados Unidos. (Fotografia de 2018.)

a) Resposta possível: a arte urbana é importante como manifestação cultural, além de artística, e como forma de crítica social, chamando a atenção para os problemas sociais atuais que precisam ser solucionados.

Surgido nos anos 1970 em Nova York, Estados Unidos, o grafite é uma forma de manifestação artística e cultural em espaços públicos com adeptos em vários países. O grafite é uma expressão caracteristicamente urbana e faz parte do cenário da maioria das grandes cidades. Contando histórias por meio de imagens, ele também é usado como uma maneira de comunicar críticas sociais por meio de arte acessível.

Em seus coloridos e vibrantes murais que compõem a cena urbana de diversas cidades pelo mundo, a artista Shamsia Hassani apresenta sua personagem, uma mulher sem boca; o instrumento musical não é para tocar, é um símbolo que faz a vez da sua voz. Assim, ela chama a atenção para a desigualdade de gênero, ainda muito presente na sociedade atual.

c) 100 litros de tinta. **d)** Resposta pessoal.

Capítulo 3 – Grandezas proporcionais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo trata do estudo de razões entre grandezas de naturezas diferentes e da proporcionalidade entre grandezas. São apresentadas estratégias de resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, considerando problemas que tenham a mesma estrutura e que envolvam a variação entre duas ou mais grandezas dependentes.

Com as questões propostas na abertura deste capítulo é possível verificar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito das relações de proporcionalidade entre grandezas.

Espera-se que os estudantes identifiquem a relação de proporcionalidade inversa no problema proposto no **item b**, concluindo, assim, que os quatro artistas terminariam o painel em 5 dias. No **item c**, espera-se que eles relembrem como determinar a medida da área de superfícies planas e identifiquem a relação de proporcionalidade direta entre a medida da área do mural e o número de latas de tinta (ou a medida do volume de tinta) necessário para pintá-lo.

As questões propostas também são uma ótima oportunidade para o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais. No **item a**, ao discutir a importância do grafite como forma de crítica social, comente com os estudantes sobre a importância desse tipo de arte na sociedade, chamando a atenção para problemas sociais atuais, como desigualdade social, desigualdade de gênero, preconceito, entre outros. Se achar conveniente, comente com os estudantes sobre como o incentivo e o apoio à arte de rua vêm crescendo no Brasil nos últimos anos, com a criação de diversos projetos que remuneram artistas por suas intervenções e com a criação de políticas públicas para a transformação de espaços públicos em galerias de arte a céu aberto. No **item d**, é possível trabalhar com o Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**. Discuta com os estudantes sobre a importância do grafite como forma de manifestação cultural e artística, que está presente no mundo todo e retrata o dia a dia, os diversos pontos de vista, as experiências e os valores de diferentes pessoas das mais variadas culturas, além de levar a arte ao alcance de todos. Essa discussão favorece o desenvolvimento da **competência geral 3**. Converse com eles sobre a presença da arte de rua na cidade em que vivem e peça que descrevam as características observadas em alguns grafites.

1. Razão entre grandezas de naturezas diferentes

Habilidade da BNCC: **EF09MA07**.

Retome a noção de razão. Até aqui os estudantes têm trabalhado com a razão entre duas grandezas de mesma natureza, mas no cotidiano eles têm contato com razões que envolvem grandezas de naturezas diferentes, como é o caso da velocidade.

Explore com os estudantes os diversos tipos de razão entre duas grandezas de naturezas diferentes apresentados, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA07). Ao tratar da gramatura de um papel, por exemplo, mostre a eles a diferença entre duas folhas de papel sulfite de tamanho A4 com gramaturas diferentes, como 75 g/m² e 90 g/m². Se possível, leve algumas folhas de papel sulfite de gramaturas diferentes para que os estudantes possam manipulá-las. Ressalte o significado dessas informações:

- 75 g/m² significa que cada metro quadrado do papel tem massa medindo 75 gramas.
- 90 g/m² significa que cada metro quadrado do papel tem massa medindo 90 gramas.

Espera-se que os estudantes percebam que, se a gramatura de um papel aumenta, mantido seu tamanho, ele fica mais pesado, ou seja, a folha é mais grossa.

Se achar conveniente, ao tratar da velocidade média, aproveite para falar sobre velocidades máximas permitidas. Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre a legislação de trânsito com relação à velocidade dos veículos em zonas urbanas e rurais, além das multas relacionadas à infração da velocidade permitida.

1 Razão entre grandezas de naturezas diferentes

Já estudamos como determinar a razão entre duas medidas da mesma grandeza e entre duas medidas de grandezas de mesma natureza. Nessas razões, usamos apenas os números que expressam as medidas dessas grandezas.

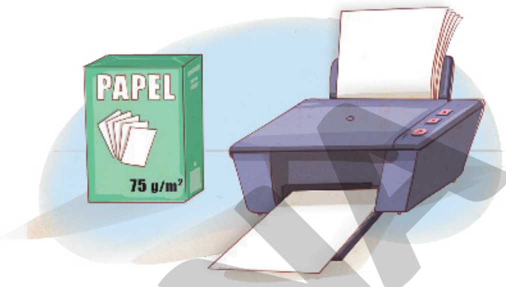
Agora, vamos conhecer algumas razões entre duas medidas de grandezas de naturezas diferentes.

Gramatura de um papel

Observe o pacote de papel usado para impressão.

Na parte inferior da embalagem, está escrito 75 g/m². Isso significa que cada metro quadrado desse papel tem massa de medida igual a 75 g.

A esse tipo de razão damos o nome de **gramatura**.



FÁBIO EUGÊNIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{gramatura} = \frac{\text{medida da massa do papel}}{\text{medida da área do papel}}$$

Note que as grandezas **massa** e **área** são grandezas de naturezas diferentes. Em casos como esse, a razão não é expressa só por um número, mas por um número acompanhado da unidade de medida correspondente. Nesse exemplo, a razão (gramatura) é dada por 75 g/m² (lemos: "setenta e cinco gramas por metro quadrado").

Velocidade média

Um carro parte da cidade A para a cidade B. A medida da distância entre as duas cidades é 140 km, e o carro leva 2 h para percorrer esse trajeto. Vamos calcular a razão entre as medidas da distância percorrida e do tempo gasto para percorrê-la. Observe que essas grandezas são de naturezas diferentes. Então:

$$\frac{140\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 70\ \text{km/h}$$ (lemos: "setenta quilômetros por hora")

Esse tipo de razão é chamado de **velocidade média**.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do tempo gasto}}$$

- Se em um trecho de uma rodovia o limite de velocidade é de 90 km/h, um motorista que percorre esse trecho a uma velocidade média de 90 km/h, pode ter desrespeitado o limite de velocidade?

Espera-se que os estudantes percebam que a única possibilidade de o motorista não ter desrespeitado o limite de velocidade no trecho é tê-lo percorrido a uma velocidade constante de 90 km/h, o que é improvável ocorrer na prática. Se a velocidade média foi de 90 km/h e a velocidade no trecho não foi constante, então é certo que em algum momento a velocidade foi maior do que 90 km/h.

Densidade demográfica

A área do estado da Bahia mede aproximadamente 564 760 km² e, em 2021, sua população era de 14 985 284 habitantes.

Dividindo o número de habitantes pela área, vamos obter o número de habitantes por quilômetro quadrado (hab/km²): $\frac{14\,985\,284 \text{ hab}}{564\,760 \text{ km}^2}$, que é aproximadamente igual a 27 hab/km² (lemos: "vinte e sete habitantes por quilômetro quadrado").

A esse tipo de razão damos o nome de **densidade demográfica**.


VITOR MARIGO/TYBA

Largo do Pelourinho, no centro histórico de Salvador, Bahia. (Fotografia de 2019.)

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{medida da área da região}}$$

Consumo médio

Um carro percorreu 444 km e utilizou 37 L de combustível. Dividindo o número de quilômetros percorridos (a medida da distância percorrida) pelo número de litros de combustível consumido (a medida do volume de combustível consumido), temos a quantidade de quilômetros que esse carro percorreu com 1 L de combustível. Observe.

$\frac{444 \text{ km}}{37 \text{ L}} = 12$ km/L (lemos: "doze quilômetros por litro")

A esse tipo de razão damos o nome de **consumo médio**.

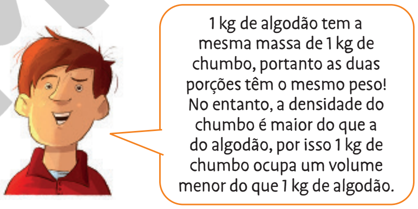
$$\text{consumo médio} = \frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do volume de combustível consumido}}$$

Densidade absoluta da matéria

O que você pensa dessa conversa?

A densidade absoluta, ou massa específica, de um corpo, um material ou uma substância é dada pela razão entre as medidas da massa e do volume que ele ocupa.

$$\text{densidade} = \frac{\text{medida da massa}}{\text{medida do volume}}$$



ILUSTRAÇÕES: SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Densidade demográfica

Paralelamente ao conceito de razão (densidade demográfica), aproveite a situação proposta para conversar com os estudantes sobre a concentração populacional nas grandes cidades do país e as consequências desse fato.

No estudo da densidade demográfica como razão entre grandezas de naturezas diferentes, é possível o trabalho interdisciplinar com Geografia, promovendo uma discussão mais ampla sobre o significado dos valores de densidade demográfica e como eles se relacionam com as políticas públicas e a qualidade de vida da população. Por exemplo, nas grandes cidades, onde a densidade demográfica geralmente é mais alta, as políticas de mobilidade urbana, relacionadas ao trânsito e ao transporte coletivo, são muito importantes e afetam consideravelmente a qualidade de vida da população. Outro ponto que pode ser discutido é a relação entre a densidade demográfica e o planejamento urbano; como os serviços (educação, saúde, transporte, lazer) estão distribuídos pelas cidades e que parcela da população tem acesso a eles.

Densidade absoluta da matéria

Para trabalhar o conceito de densidade da matéria, retome a noção de volume que os estudantes já construíram em anos anteriores.

Exercícios propostos

O **exercício 1** pode ser ampliado pedindo aos estudantes que expressem a medida da velocidade média obtida em quilômetro por hora (km/h) e em metro por segundo (m/s), com o auxílio de uma calculadora.

velocidade média =

$$= \frac{48\,478 \text{ km}}{312 \text{ dia}} \simeq 155 \text{ km/dia}$$

Para transformar de km/dia para km/h, fazemos: 155 km/dia =

$$= \frac{155 \text{ km}}{1 \text{ dia}} = \frac{155 \text{ km}}{24 \text{ h}} \simeq 6{,}5 \text{ km/h}$$

Para transformar de km/dia para m/s, fazemos: 155 km/dia =

$$= \frac{155 \text{ km}}{1 \text{ dia}} = \frac{155 \cdot 1\,000 \text{ m}}{86\,400 \text{ s}} \simeq 1{,}8 \text{ m/s}$$

Para comprovar suas respostas, os estudantes podem fazer as transformações de m/s para km/h, ou de km/h para m/s.

Por exemplo, para transformar de m/s para km/h, fazemos:

$$1{,}8 \text{ m/s} = \frac{1{,}8 \text{ m}}{1 \text{ s}} =$$

$$= \frac{1{,}8 \cdot \frac{1}{1\,000} \text{ km}}{1 \cdot \frac{1}{3\,600} \text{ h}} =$$

$$= 1{,}8 \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{3\,600}{1} \text{ km/h} \simeq$$

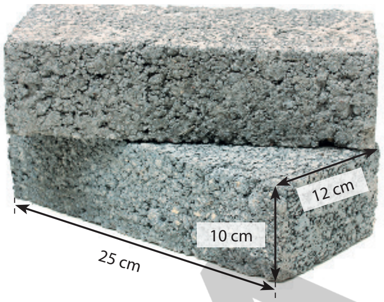
$$\simeq 6{,}5 \text{ km/h}$$

As resoluções dos **exercícios 2** e **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de medida da grandeza massa é o quilograma, e a da grandeza volume é o metro cúbico; logo, a densidade deve ser dada em quilograma por metro cúbico. Porém, às vezes, convém considerar a densidade em grama por centímetro cúbico.

Observe a situação a seguir.

Um caminhão com capacidade de carga de até 7 toneladas será usado para transportar um carregamento de blocos de granito, paralelepípedos retos, com as dimensões dadas na imagem. Considerando que a medida da densidade do granito é de 2,7 g/cm^3, esse caminhão conseguirá levar mil blocos?



ZCW/SHUTTERSTOCK

Inicialmente, vamos determinar a medida do volume (V) de cada bloco.

$$V = 10 \cdot 12 \cdot 25 = 3\,000$$

Portanto, a medida do volume de cada bloco é de 3 000 cm^3.

Como a densidade é dada pela razão entre as medidas da massa e do volume, para a medida da massa (m) de cada bloco de granito, temos:

$$2{,}7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{m}{3\,000 \text{ cm}^3}, \text{ ou seja, } m = 2{,}7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 3\,000 \text{ cm}^3 \text{ ou } m = 8\,100 \text{ g}$$

Portanto, a medida da massa de cada bloco é de 8 100 g, ou 8,1 kg.

A capacidade de carga do caminhão é de 7 toneladas, que corresponde a 7 000 quilogramas. Assim, a quantidade aproximada de blocos que o caminhão pode transportar é dada pelo quociente da divisão 7 000 : 8,1, ou seja, o caminhão pode transportar aproximadamente 864 blocos, no máximo.

Portanto, o caminhão não conseguirá levar mil blocos de granito de uma só vez.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Entre 1968 e 1969, Robin Knox-Johnston foi a primeira pessoa a dar a volta ao mundo em um barco a vela, sozinho e sem aportar, isto é, sem parar em lugar nenhum. Ele percorreu um total de 48 478 km em 312 dias. Determine a medida aproximada de sua velocidade média, em quilômetro por dia.

1. Aproximadamente 155 km/dia.

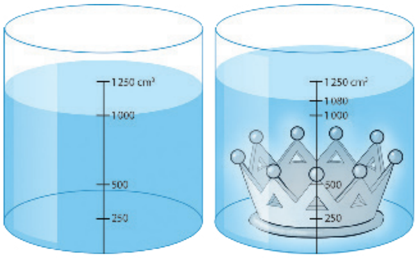
2 A medida da distância rodoviária entre Jericoacoara e Fortaleza é de aproximadamente 300 km. Qual é a medida da velocidade média de um ônibus que faz esse percurso em 5 horas e 30 minutos?

2. Aproximadamente 55 km/h.

3 Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2021, a medida da área do estado do Rio Grande do Sul era aproximadamente de 281 707,151 km^2. Considerando que a medida da densidade demográfica desse estado, neste mesmo ano, era aproximadamente de 40,704 hab/km^2, determine a população aproximada que o estado do Rio Grande do Sul tinha naquele ano.

3. Aproximadamente 11 466 608 habitantes.

4 Em um leilão, um colecionador comprou uma coroa de prata. Para verificar se a coroa era de fato feita de prata, ele resolveu medir a densidade absoluta da coroa. Sabe-se que a densidade da prata mede 10,5 g/cm^3. Ele mediu a massa da coroa e obteve 840 g. Depois, colocou a coroa em uma cuba com 1 000 cm^3 de água e viu quanto o nível da água subiu dentro da cuba.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

A diferença entre os níveis da água na cuba antes e depois de a coroa ser submersa corresponde à medida do volume da coroa, em centímetro cúbico. De acordo com a situação descrita, a medida da densidade da coroa, calculada pelo colecionador, coincide com a medida da densidade conhecida da prata? **4.** Sim.

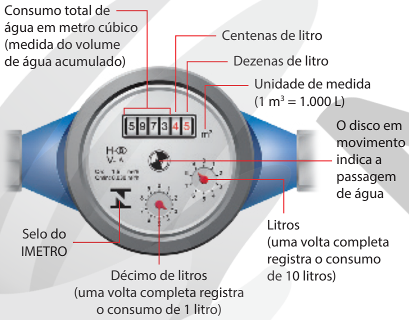
5 A densidade do mármore é 2,60 g/cm³. Qual é a medida da massa, em quilograma, de uma pedra de mármore cuja medida do volume é igual a 12,40 dm³? **5.** 32,24 kg

6 Vitória encheu de gasolina o tanque do carro e percorreu 385 km. Ao abastecer novamente, foram necessários 35 litros de gasolina para completar o tanque. Qual foi o consumo médio do carro de Vitória nesse trajeto? **6.** 11 km/L

7 O hidrômetro é um dispositivo que registra o volume de água consumido. Ele nos ajuda a identificar vazamentos, controlar nossos hábitos de consumo e evitar o desperdício, mantendo as contas sob controle.

Para acompanhar o padrão de consumo mensal de água na sua residência, você pode fazer a leitura do hidrômetro. Para calcular o consumo de água, em um período considerado, subtraímos a medida de volume indicada pelos números em preto no visor do hidrômetro, chamada de leitura atual, pela leitura anterior indicada na conta de água.

Entenda seu hidrômetro



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) Considere que uma residência com cinco moradores tem a leitura atual indicada pelo hidrômetro da ilustração e que a leitura anterior, feita há exatamente 30 dias, é de 5 943 m³. Determine o consumo médio diário de água, em litro por dia (L/dia), dessa residência nesse período. **7. a)** 1 000 L/dia

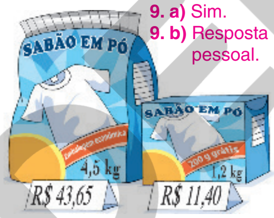
b) A Organização das Nações Unidas (ONU) julga que são necessários cerca de 110 litros de água por dia para suprir as necessidades de consumo e higiene de uma pessoa. Considerando essa informação, quantos litros de água a mais do que o recomendado pela ONU foram consumidos por pessoa, em média, na residência do item **a**? **7. b)** 90 litros.

c) Que mudanças de hábitos podemos adotar para evitar desperdícios e praticar o consumo consciente de água? **7. c)** Resposta pessoal.

d) Reflita sobre seus hábitos de consumo. O que você faz para evitar o desperdício? **7. d)** Resposta pessoal.

8 Em um condomínio, há uma piscina que mede 15 m de comprimento, 5 m de largura e 2 m de profundidade. Ela está vazia e, para enchê-la até a borda, será utilizada uma bomba que despeja a água à razão de 2 000 litros por hora. Quanto tempo é necessário para encher essa piscina? **8.** 75 horas.

9 Observe as duas opções de embalagem de sabão que Rodrigo achou no supermercado.



9. a) Sim.
9. b) Resposta pessoal.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Rodrigo comprou a embalagem menor, pois considerou-a mais vantajosa. A embalagem menor é mesmo mais vantajosa?

b) Troque ideias com um colega e redijam um texto que justifique a decisão de Rodrigo.

c) Sem os 200 gramas grátis, a embalagem menor seria a mais vantajosa? Justifique a resposta.

d) Você costuma comparar embalagens e preços de produtos de mesma qualidade? Qual é a importância de ter essa atitude?

9. d) Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal.

10 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado por vocês, envolvendo a razão entre grandezas de naturezas diferentes. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

9. c) Não, pois na maior o preço é de R$ 9,70/kg.

Exercícios propostos

Aproveite o contexto do **exercício 7** para discutir com os estudantes sobre a importância do consumo consciente de água, abordando seus hábitos na escola e em casa. Converse também sobre como a mudança de hábitos pode contribuir para reduzir o desperdício – mudanças como: fechar a torneira ao escovar os dentes, tomar banhos menos demorados, usar a vassoura para limpar áreas externas (como quintal e calçadas) ou reutilizar a água da máquina de lavar roupas, identificar e consertar vazamentos, coletar e armazenar a água da chuva em cisternas.

Peça a eles que pensem nas mudanças que estariam dispostos a realizar em seus hábitos de consumo de água.

Proponha aos estudantes a análise de situações de economia de água, como:

- Se uma pessoa escova os dentes em 5 minutos com a torneira não muito aberta, gasta 12 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes, além de usar um copo com água para enxaguar a boca, é possível economizar mais de 11,5 litros de água. Considerando que uma pessoa costuma ficar 7 minutos com a torneira não muito aberta enquanto escova os dentes, quantos litros de água são gastos nesse período? (Resposta: 16,8 litros). Quantos litros de água essa pessoa economizaria se adotasse o hábito de fechar a torneira enquanto escova os dentes e se também utilizasse um copo com água para enxaguar a boca? (Resposta: 16,1 litros).
- Ao lavar o rosto durante 1 minuto, com a torneira pouco aberta, uma pessoa gasta 2,5 litros de água. Quantos litros de água serão gastos se a pessoa ficar 3 minutos com a torneira pouco aberta? (Resposta: 7,5 litros).

Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre outras dicas para a economia de água. Promova uma discussão com toda a turma sobre as informações encontradas.

Aproveite o **exercício 9** para discutir com os estudantes a importância de avaliar campanhas publicitárias de promoção usando a proporção, como foi feito no exercício, e de comparar embalagens e preços de produtos de mesma qualidade, evidenciando a importância da proporcionalidade no dia a dia.

As resoluções dos **exercícios 4** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Pense mais um pouco...

As resoluções das atividades estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Essa seção possibilita o trabalho interdisciplinar com Geografia. Para isso, proponha aos estudantes que pesquisem o Produto Interno Bruto (PIB) *per capita* (*per capita* deriva do latim e significa "por cabeça") da cidade em que vivem e de algumas outras cidades da região. Analise os dados coletados com a turma toda e discuta com eles o que esses dados indicam sobre a economia da cidade, da região e a qualidade de vida da população. É importante que os estudantes compreendam que o PIB é apenas um dos indicadores da economia de um país, de uma cidade ou de uma região; portanto, ele não deve ser usado como parâmetro para determinar a qualidade de vida e a distribuição de renda da população. A população de uma região com PIB pequeno pode, sim, ter alta qualidade de vida.

Esse tópico é uma ótima oportunidade para o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **educação fiscal**. Como o PIB é calculado com base nos valores totais de bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade durante determinado período, ele também considera os valores dos impostos adicionados aos produtos, os tributos. Então, para entender melhor a importância do PIB na economia, é fundamental entender como o PIB é formado. Para isso, questione os estudantes se eles sabem o que são impostos e para que eles servem. É importante que eles reconheçam os impostos como tributos cobrados sobre diferentes bens e serviços, sobre um saco de arroz, a água que consomem em suas casas, sobre a casa, um carro etc., e que esses impostos são parte dos recursos recolhidos e utilizados pelos governos para garantir o bem-estar social, com a construção de escolas, hospitais, parques, investindo em sistemas de transporte público, em ações para garantir a segurança da população, entre outras ações.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

O **Produto Interno Bruto** (PIB) é o total de bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade durante determinado período, geralmente um ano, calculado na moeda do país em questão.

A razão entre o PIB e o número de habitantes é chamada de **PIB *per capita***. O PIB *per capita* de um país equivale à quantia que cada habitante receberia caso o PIB fosse dividido igualmente por toda a população, ou seja, considera uma distribuição de renda igualitária.

O PIB é muito utilizado para a comparação das economias de diferentes países. Como é calculado na moeda de cada país, em situações de comparação, precisamos converter os valores para uma moeda comum, geralmente o dólar.

Considere os dados da tabela a seguir e calcule o valor aproximado do PIB *per capita* de cada um destes países. *Pense mais um pouco...*: Argentina: aproximadamente 8 476 dólares; Brasil: aproximadamente 6 797 dólares; Paraguai: aproximadamente 4 950 dólares; Uruguai: aproximadamente 15 438 dólares.

PIB dos países fundadores do Mercosul em 2020

País	Produto Interno Bruto (em dólar)	Número de habitantes
Argentina	383 067 000 000	45 195 777
Brasil	1 444 733 000 000	212 559 409
Paraguai	35 304 000 000	7 132 530
Uruguai	53 629 000 000	3 473 727

Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://paises.ibge.gov.br/#/mapa. Acesso em: 25 mar. 2022.

Agora, responda:

a) Comparando os PIBs *per capita* calculados, qual dos países teve maior desenvolvimento econômico em 2020? **a)** Uruguai.

b) O fato de o PIB *per capita* de um país ser alto significa que todos os habitantes vivem bem? Justifique sua resposta. **b)** Não, pois esse valor é uma média e considera uma distribuição de renda igualitária, o que, de fato, não ocorre, pois existe desigualdade econômica.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Comparando gráficos de barras

Em quase todos os países, a maior concentração dos profissionais de saúde se dá nas áreas urbanas mais ricas. No Brasil, não é diferente. Esse fato acentua desigualdades sociais, de modo que há lugares com excesso de médicos, enquanto nas áreas mais vulneráveis dos municípios brasileiros a população não recebe atendimento médico.

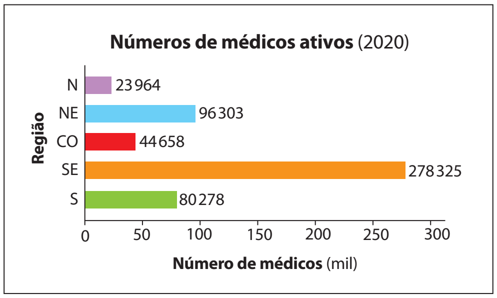
Em outubro de 2013, o Programa Mais Médicos (PMM) foi instituído pela lei nº 12 871, na qual o artigo 1º prevê:

> I – diminuir a carência de médicos nas regiões prioritárias para o SUS, a fim de reduzir as desigualdades regionais na área da saúde; [...]

Entre outros objetivos, o PMM visava aumentar a medida da densidade de médicos no Brasil, que era, segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), de 1,8 médico por 1 000 habitantes, em 2012, para 2,7 médicos por 1 000 habitantes até 2026.

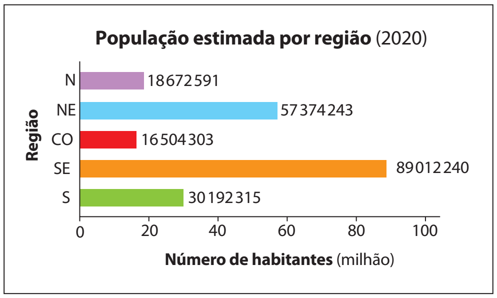
BLEND IMAGES – LWA/DANN TARDIF/ DIGITALVISION/GETTY IMAGES

Observe, nos gráficos a seguir, o número de médicos ativos e a população estimada por região geográfica brasileira.



Números de médicos ativos (2020)

Dados obtidos em: DEMOGRAFIA Médica no Brasil 2020. Disponível em: http://www.flip3d.com.br/pub/cfm/index10/?numero=23&edicao=5058. Acesso em: 25 mar. 2022.



População estimada por região (2020)

Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao/Estimativas_2020/estimativa_dou_2020.pdf. Acesso em: 25 mar. 2022.

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Comparando os dois gráficos, podemos determinar a medida da densidade de médicos nessas regiões, dada pela razão entre o número de médicos e o número de habitantes.

Para simplificar a comparação, podemos trabalhar com valores aproximados.

Vamos tomar como exemplo a região Nordeste, que tinha aproximadamente 96 000 médicos e uma população estimada de aproximadamente 57 milhões de habitantes (ou 57 000 grupos de mil).

$$\text{Região Nordeste: } \frac{96\,000 \text{ médicos}}{57\,000 \text{ grupos de mil habitantes}} \simeq 1{,}7 \text{ médico}/1\,000 \text{ habitantes}$$

Portanto, na região Nordeste havia cerca de 1,7 médico para cada 1 000 habitantes em 2020.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Apenas observando os gráficos, responda: a densidade de médicos da região Norte era maior do que a da região Centro-Oeste em 2020? **1.** Não.

2 Com uma calculadora, obtenha os valores aproximados da medida da densidade de médicos das regiões N, CO, SE e S em 2020 por 1 000 habitantes. **2.** (N) 1,3; (CO) 2,7; (SE) 3,1; (S) 2,7.

3 Calcule a medida da densidade de médicos aproximada no Brasil em 2020. Quanto faltava, em 2020, para que esse índice chegasse aos 2,7 esperados para 2026? **3.** Aproximadamente 2,5; então, faltava aproximadamente 0,2.

Sugestão de leitura

Para ampliar e enriquecer essa discussão, sugerimos:

SCHEFFER, M. *et al.* **Demografia médica no Brasil**. São Paulo: FMUSP, CFM, 2020. Disponível em: https://www.fm.usp.br/fmusp/conteudo/DemografiaMedica2020_9DEZ.pdf. Acesso em: 21 jul. 2022.

A produção científica, resultado da colaboração entre o Conselho Federal de Medicina (CFM) e a Universidade de São Paulo (USP), traz dados e informações detalhadas sobre a população de médicos no Brasil de 2010 a 2020 e sobre a área de atuação desses médicos. Além de discutir a desigualdade na distribuição de médicos, comparar os dados do Brasil com os de outros países e apresentar um atlas da demografia médica, com dados das unidades da federação e especialidades médicas.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA07**.

Esta seção explora a comparação de gráficos de barras com o objetivo de determinar a densidade de médicos em diferentes regiões do Brasil, dada pela razão entre o número de médicos por grupo de 1 000 habitantes de determinada região, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA07).

Proponha aos estudantes uma discussão sobre o fato de a maior concentração de profissionais de saúde se dar em áreas urbanas. Por que isso ocorre? O número de habitantes é maior em áreas urbanas do que em áreas rurais? O acesso às áreas urbanas é mais fácil? Discuta também sobre como a concentração de médicos em regiões específicas dos municípios é um fator que contribui para a desigualdade social, pois, com isso, nem toda a população tem acesso aos mesmos serviços de saúde. O acesso aos serviços de saúde também é um indicativo da qualidade de vida da população; lembre os estudantes de que ele é direito de todos e deve ser garantido pelo poder público, de acordo com a Constituição de 1988.

Converse com os estudantes sobre a importância do acesso aos serviços de saúde e dos exames preventivos nas diferentes fases da vida (infância, adolescência, fase adulta e velhice). Pergunte a eles sobre o acesso aos serviços de saúde na cidade ou no bairro em que vivem. Esses serviços existem? Eles e suas famílias utilizam esses serviços? Com base em suas experiências, o número de médicos em sua cidade ou bairro é adequado ao número de habitantes? Se achar conveniente, peça a eles que façam uma pesquisa sobre o número de médicos e de habitantes da cidade em que vivem, e que determinem a densidade de médicos, comparando o valor obtido com os valores para as diferentes regiões do Brasil.

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

2. Proporcionalidade entre grandezas

Habilidade da BNCC: **EF09MA08**.

A noção de proporcionalidade é um dos temas fundamentais no estudo da Matemática e de diversas outras áreas do conhecimento. É possível observar relações de proporcionalidade na natureza, no cotidiano (como em receitas culinárias), nas Artes e na Arquitetura, por exemplo. Os estudantes têm desenvolvido noções de probabilidade ao longo de seus estudos. Agora, o objetivo é ampliar e consolidar a aprendizagem dos estudantes sobre proporcionalidade.

Explore a **situação 1** e peça a eles que exemplifiquem outros tipos de grandezas dependentes que, na opinião deles, variam na proporção direta, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA08) (possível resposta: distância percorrida e tempo que se leva para fazer o percurso, mantendo-se as mesmas condições).

Ressalte que o fato de duas grandezas terem seus valores aumentados (ou diminuídos) quando comparadas, não garante que elas sejam grandezas diretamente proporcionais. Para isso, elas devem aumentar (ou diminuir) sempre da mesma maneira, isto é: se uma tem seu valor dobrado, a outra também deve dobrar de valor; se uma tem seu valor triplicado, a outra também deve triplicar de valor; e assim por diante.

Aproveite a situação apresentada para tratar com os estudantes a respeito do cuidado para evitar o desperdício de água e sobre a importância da conservação dos recursos naturais para o meio ambiente e para a manutenção da vida no planeta em que vivemos.

2 Proporcionalidade entre grandezas

Entendemos como **grandeza** toda quantidade que pode ser medida ou contada. Assim, comprimento, área, população, temperatura, massa e tempo são exemplos de grandezas.

Acompanharemos a seguir algumas situações que envolvem uma relação de dependência entre duas grandezas.

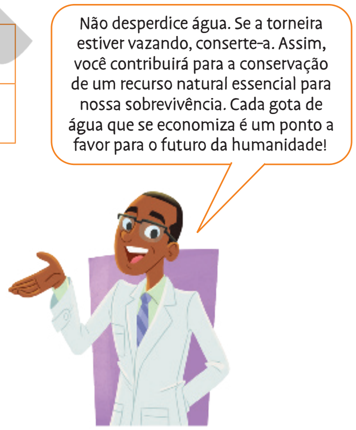
Situação 1

Gabriel percebeu que a torneira da cozinha estava vazando.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Para medir o volume de água desperdiçado com o vazamento, por minuto, ele colocou um recipiente graduado sob a torneira. Acompanhe o que ele observou.

Tempo (min)	1	2	3	4	5	6
Volume de água (mL)	5	10	15	20	25	30



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que:

- quando duplicamos o tempo, o volume de água também duplica;
- quando triplicamos o tempo, o volume de água também triplica; e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **volume** têm uma relação de **proporcionalidade direta**, ou seja, são **grandezas diretamente proporcionais**.

Situação 2

Suponha que, em uma doceria, um funcionário faça certa quantidade de bolos em 6 horas.

Com a proximidade das festas de fim de ano, o proprietário da doceria precisa produzir a mesma quantidade de bolos em um tempo menor. Para isso, aumenta a quantidade de funcionários, com igual produtividade e trabalhando nas mesmas condições, conforme a necessidade.

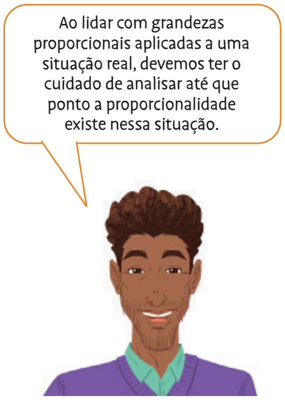
Observe a relação entre o número de funcionários e o tempo gasto para a produção desses bolos.

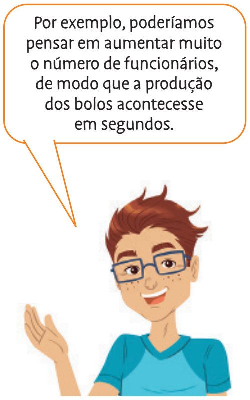
Número de funcionários	1	2	3	4
Tempo (h)	6	3	2	1,5

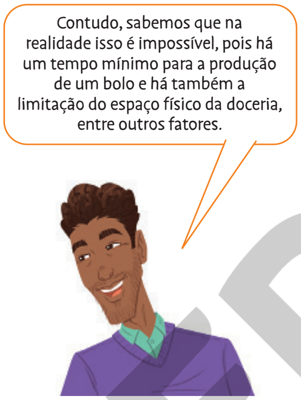
Note que:

- quando duplicamos o número de funcionários, o número de horas para a produção dos bolos é reduzido à metade;
- quando triplicamos o número de funcionários, o número de horas para a produção dos bolos é reduzido à terça parte; e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que o **número de funcionários** e o **tempo** têm uma relação de **proporcionalidade inversa**, ou seja, são **grandezas inversamente proporcionais**.







ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 3

Observe, no quadro a seguir, a relação entre a idade e a medida da altura média dos estudantes de 1 a 5 anos da Escola Pequenitos.

Idade (ano)	1	2	3	4	5
Altura média dos estudantes (cm)	73,2	84,1	91,9	99,1	105,9

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que, quando a idade é duplicada, a medida da altura não dobra nem se reduz à metade. A medida da altura simplesmente aumenta sem respeitar nenhuma proporção em relação à idade. Então, altura e idade não são grandezas direta nem inversamente proporcionais. Nesse caso, dizemos que **altura** e **idade** são **grandezas não proporcionais**.

A seguir, vamos estudar detalhadamente as grandezas diretamente proporcionais e as grandezas inversamente proporcionais.

Proporcionalidade entre grandezas

Trabalhe a **situação 2** de maneira análoga ao que foi feito na situação anterior.

Peça aos estudantes que citem outros exemplos, como a velocidade média com que se faz um percurso e o tempo que se leva para isso, desenvolvendo a habilidade (EF09MA08).

Em uma roda de conversa, verifique qual foi o entendimento da turma a respeito das falas dos personagens sobre cuidados a serem considerados na aplicação do conceito proporcionalidade em uma situação real.

A **situação 3** possibilita aos estudantes complementar seu entendimento a respeito de grandezas proporcionais, considerando que reconhecer o que “não é” amplia a compreensão do que “é”.

Exercícios propostos

Se julgar necessário, retome com os estudantes a propriedade fundamental das proporções.

Ao finalizar este bloco de exercícios, organize os estudantes em duplas e proponha uma conversa sobre os três exercícios, qual acharam mais fácil e qual foi o mais difícil. Depois, peça a eles que redijam um texto com as justificativas de suas opiniões. Cada dupla apresenta seu texto para a turma e um estudante registra na lousa os resultados, para, ao final, verificarem a opinião de todos. Utilize essa atividade para verificar as dificuldades dos estudantes e planejar estratégias para realizar as intervenções necessárias.

As resoluções dos **exercícios 11** e **12** e das atividades da seção **Pense mais um pouco...** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 13**.

a) À medida que o número de fotografias aumenta, o tempo de transferência também aumenta, na mesma proporção. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.

De 400 fotografias para 800 fotografias, o número de fotografias foi dobrado; assim, o tempo de transferência correspondente também deve ser o dobro. Para 400 fotografias: 48 segundos [(400 · 6) : 50 = 48]. Para 800 fotografias: 96 segundos.

De 800 fotografias para 3 200 fotografias, o número de fotografias foi quadruplicado (3 200 : 800 = 4); portanto, o tempo de transferência também deve ser quadruplicado. Assim, para a transferência de 3 200 fotografias são necessários 384 segundos (96 · 4 = 384).

b) De acordo com os dados obtidos, é possível concluir que essas grandezas são diretamente proporcionais.

c) Para uma pasta com 400 fotografias de 6 MB cada uma, temos:

$$\frac{400 \cdot 6 \text{ MB}}{48 \text{ s}} = \frac{2\,400 \text{ MB}}{48 \text{ s}}$$

Para uma pasta com 800 fotografias de 6 MB cada uma, temos:

$$\frac{800 \cdot 6 \text{ MB}}{96 \text{ s}} = \frac{4\,800 \text{ MB}}{96 \text{ s}}$$

Para uma pasta com 3 200 fotografias de 6 MB cada uma, temos:

$$\frac{3\,200 \cdot 6 \text{ MB}}{384 \text{ s}} = \frac{19\,200 \text{ MB}}{384 \text{ s}}$$

Os quocientes obtidos são todos iguais a 50 MB/s (a velocidade de transferência dos arquivos); portanto, é possível concluir que as razões são equivalentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11. a) Velocidade média e tempo. Inversamente proporcionais.

11. b) Volume e massa. Diretamente proporcionais.

11 Identifique e classifique as grandezas em cada situação a seguir como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

a) Velocidade média e tempo gasto para percorrer determinado trajeto.

b) Volume de água e massa de polpa de fruta necessários para preparar um suco de fruta.

c) Idade e massa de uma pessoa.

11. c) Idade e massa. Não proporcionais.

12 O quadro a seguir indica as medidas da velocidade média de um automóvel e do tempo que ele leva para percorrer determinado trajeto.

Velocidade média (km/h)	120	80	60	48
Tempo (h)	1	1,5	2	2,5

Responda às questões.

a) Qual é a medida da velocidade média do automóvel quando ele percorre esse trajeto em 2 horas e meia? **12. a)** 48 km/h

b) Quantas horas o automóvel levará para percorrer esse trajeto se a medida de sua velocidade média for de 80 km/h? **12. b)** 1 hora e meia.

12. c) Inversamente proporcionais.

c) As grandezas "velocidade média" e "tempo" são direta ou inversamente proporcionais?

d) Multiplique cada medida da velocidade com a do respectivo tempo. O que acontece com os produtos obtidos? Que grandeza esses resultados representam?

12. d) São iguais a 120 km. Representam a grandeza distância percorrida.

13 Para organizar suas fotografias de viagem e liberar espaço em seu celular, Elisa precisa transferir as fotografias para o computador. Considerando que o tamanho médio do arquivo de cada fotografia é de 6 MB e que a medida da velocidade de transferência de arquivos para o computador é de 50 MB/s, responda ao que se pede. **13. a)** 48 s; 96 s; 384 s.

a) Qual é a medida do tempo de transferência de uma pasta com 400 fotografias? E com 800 fotografias? E com 3 200 fotografias?

b) O tamanho do arquivo e o tempo de transferência são grandezas direta ou inversamente proporcionais?

c) Determine as razões entre as medidas do tamanho das pastas com 400 fotografias, 800 fotografias e 3 200 fotografias e a medida do tempo de transferência dessas pastas para o computador. O que acontece com os quocientes obtidos?

13. b) Diretamente proporcionais.

13. c) $\frac{2\,400 \text{ MB}}{48 \text{ s}}, \frac{4\,800 \text{ MB}}{96 \text{ s}}, \frac{19\,200 \text{ MB}}{384 \text{ s}}$.
São iguais a 50 MB/s; as razões são equivalentes.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

O relógio de Márcio está com defeito. Ele atrasa 4 minutos a cada 2 dias.

Nos últimos 14 dias, Márcio se esqueceu de acertar o relógio e, por esse motivo, chegou atrasado para a sessão de cinema.

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

a) Construa um quadro que indique o tempo de atraso, em minuto, correspondente a cada 2 dias que Márcio se esqueceu de acertar seu relógio. *Pense mais um pouco...*: **a)** Construção de quadro.

b) Quantos minutos o relógio de Márcio atrasa em 10 dias? **b)** 20 minutos.

c) Quantos minutos o relógio de Márcio estava atrasado nesse dia que foi ao cinema? **c)** 28 minutos.

d) As grandezas apresentadas (tempo de atraso e número de dias) são direta ou inversamente proporcionais? **d)** Diretamente proporcionais.

e) Supondo que o defeito continue, quantos minutos o relógio ficaria atrasado em 22 dias sem ajuste? **e)** 44 minutos.

f) Quantos dias sem ajustes serão necessários para que o relógio registre 1 hora (60 minutos) de atraso? **f)** 30 dias.

Grandezas diretamente proporcionais

Mariana pesquisou a produção de uma usina de açúcar e anotou o número de sacas produzidas no decorrer de cinco dias, organizando o quadro a seguir.

Tempo de produção (em dia)	Produção de açúcar (em saca de açúcar)
1	5 000
2	10 000
3	15 000
4	20 000
5	25 000

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

Para organizar o quadro, Mariana trabalhou com duas grandezas: **tempo** e **produção**. Ela mediu o tempo em dias e a produção em sacas de açúcar. Então, as unidades de medida empregadas para o tempo e para a produção são, respectivamente, **dia** e **saca de açúcar**.

Sabendo que cada saca de açúcar tem massa de medida igual a 50 kg, Mariana analisou, também, a produção dessa usina em quilograma e, dessa maneira, obteve os seguintes dados.

Tempo de produção (em dia)	Produção de açúcar (em quilograma)
1	250 000
2	500 000
3	750 000
4	1 000 000
5	1 250 000

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

No segundo quadro, as grandezas continuam sendo **tempo** e **produção**, mas a unidade para medir a produção é o **quilograma**, e não a saca de açúcar.

Ao examinar esses quadros, observe que:

- duplicando o número de dias, duplica-se a produção de açúcar;
- triplicando o número de dias, triplica-se a produção de açúcar, e assim por diante.

Por isso, as grandezas tempo e produção são **grandezas diretamente proporcionais**.

Note também que a razão entre as duas medidas de tempo de produção e a razão entre as duas medidas de produção de açúcar correspondentes são iguais, ou seja, formam uma proporção. Acompanhe, por exemplo, as proporções formadas para os valores referentes ao primeiro quadro.

$\frac{1}{2} = \frac{5\,000}{10\,000}$

$\frac{1}{5} = \frac{5\,000}{25\,000}$

$\frac{2}{5} = \frac{10\,000}{25\,000}$

$\frac{4}{5} = \frac{20\,000}{25\,000}$

$\frac{1}{3} = \frac{5\,000}{15\,000}$

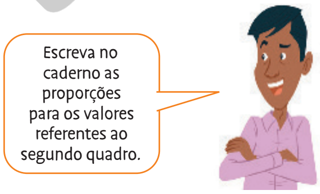
$\frac{2}{3} = \frac{10\,000}{15\,000}$

$\frac{3}{4} = \frac{15\,000}{20\,000}$

$\frac{1}{4} = \frac{5\,000}{20\,000}$

$\frac{2}{4} = \frac{10\,000}{20\,000}$

$\frac{3}{5} = \frac{15\,000}{25\,000}$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Grandezas diretamente proporcionais

Peça aos estudantes que, em duplas, leiam e acompanhem a situação apresentada, registrando no caderno as considerações sobre o que leram. Depois, em uma roda de conversa, estimule-os a expor suas observações.

Verifique se eles observaram que, se as grandezas são diretamente proporcionais, temos que a razão entre dois valores de uma grandeza é igual à razão entre os valores correspondentes da outra.

Grandezas diretamente proporcionais

Continue o trabalho de exploração com os estudantes, pedindo a eles que acompanhem o primeiro exemplo e determinem os valores de x, y e z (para compararem depois com os valores apresentados no livro).

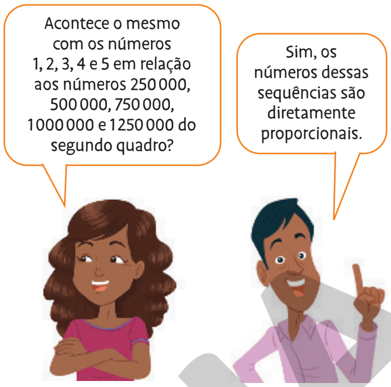
Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.

Repare ainda que as razões entre os valores da primeira coluna e os valores correspondentes da segunda coluna são iguais.

$$\frac{1}{5\,000} = \frac{2}{10\,000} = \frac{3}{15\,000} = \frac{4}{20\,000} = \frac{5}{25\,000}$$

Todas essas frações são equivalentes e redutíveis à mesma fração, $\frac{1}{5\,000}$.

Dizemos, então, que os números da sequência 1, 2, 3, 4 e 5 são **diretamente proporcionais** aos números da sequência 5 000, 10 000, 15 000, 20 000 e 25 000.



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outros exemplos.

a) Para montar uma pequena empresa, Márcia, Cláudio e Ricardo formaram uma sociedade. Márcia investiu R$ 24 000,00, Cláudio investiu R$ 27 000,00 e Ricardo investiu R$ 30 000,00. Depois de seis meses, a empresa obteve um lucro de R$ 32 400,00, que foi dividido entre os sócios em partes diretamente proporcionais à quantia que cada um investiu.

Vamos calcular a parte que coube a cada sócio.

Representaremos a parte do lucro de Márcia por x, a parte de Cláudio por y e a de Ricardo por z. Assim, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 32\,400 \\ \dfrac{x}{24\,000} = \dfrac{y}{27\,000} = \dfrac{z}{30\,000} = r \end{cases}$$

Nesse caso, r é o valor correspondente a essas razões, chamado de **razão de proporcionalidade** ou **coeficiente de proporcionalidade**.

Então, obtemos as seguintes proporções:

$$\frac{x}{24\,000} = \frac{r}{1} \qquad \frac{y}{27\,000} = \frac{r}{1} \qquad \frac{z}{30\,000} = \frac{r}{1}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$$x = 24\,000r \qquad y = 27\,000r \qquad z = 30\,000r$$

Substituindo x por $24\,000r$, y por $27\,000r$ e z por $30\,000r$ em $x + y + z = 32\,400$, calculamos o valor de r.

$x + y + z = 32\,400$

$24\,000r + 27\,000r + 30\,000r = 32\,400$

$81\,000r = 32\,400$

$\frac{81\,000r}{81\,000} = \frac{32\,400}{81\,000}$

$r = 0{,}4$

LEONARDO CONCEIÇÃO/ ARQUIVO DA EDITORA

Com o valor encontrado para *r*, calculamos os valores de *x*, *y* e *z*.

$$x = 24\,000 \cdot r \qquad y = 27\,000 \cdot r \qquad z = 30\,000 \cdot r$$

$$x = 24\,000 \cdot 0{,}4 \qquad y = 27\,000 \cdot 0{,}4 \qquad z = 30\,000 \cdot 0{,}4$$

$$x = 9600 \qquad y = 10\,800 \qquad z = 12\,000$$

Portanto, Márcia recebeu R$ 9 600,00, Cláudio recebeu R$ 10 800,00 e Ricardo, R$ 12 000,00.

b) Vamos determinar *x* e *y*, de modo que a sequência de números 2, 8 e *y* seja diretamente proporcional à sequência de números 3, *x* e 21.

$$\begin{array}{ccc} 2 & 8 & y \\ 3 & x & 21 \end{array}$$

Para que as sequências sejam diretamente proporcionais, as razões entre os números correspondentes das duas sequências devem ser iguais, isto é: $\frac{2}{3} = \frac{8}{x} = \frac{y}{21}$

Assim:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{x} \qquad \frac{2}{3} = \frac{y}{21}$$

$$2x = 3 \cdot 8 \qquad 3y = 2 \cdot 21$$

$$2x = 24 \qquad 3y = 42$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{24}{2} \qquad \frac{3y}{3} = \frac{42}{3}$$

$$x = 12 \qquad y = 14$$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Em uma fábrica, determinado tipo de detergente é armazenado em tambores. Sabendo que todos os tambores são iguais e que 2 tambores armazenam 360 litros desse detergente, determine: **14. b)** 1 800 litros.

a) o número de tambores necessários para armazenar 720 litros; **14. a)** 4 tambores.

b) a medida do volume, em litro, de detergente armazenado em 10 desses tambores;

c) a medida do volume, em litro, de detergente armazenado em 21 tambores e meio. **14. c)** 3 870 litros.

15 Um concurso para a escolha das melhores fotografias de monumentos oferecia um prêmio de R$ 3 600,00. Esse prêmio foi dividido entre os dois primeiros colocados, em partes diretamente proporcionais aos pontos obtidos por eles. Sabendo que o primeiro colocado atingiu 10 pontos e o segundo, 8, qual foi o prêmio de cada um?
15. R$ 2 000,00 e R$ 1 600,00.

16 Determine o valor das letras do quadro, de modo que as sequências de números sejam diretamente proporcionais.
16. $a = 10$, $b = 20$ e $c = 50$.

4	6	8	*a*	20
10	15	*b*	25	*c*

Grandezas diretamente proporcionais

Reproduza o **exemplo b** na lousa e peça aos estudantes que identifiquem os passos que devem ser feitos no desenvolvimento da resolução da situação proposta.

Exercícios propostos

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 14**, montando um quadro para nos auxiliar.

Quantidade de tambores	Volume de detergente armazenado (L)
2	360
x	720
10	*y*
21,5	z

Se 2 tambores armazenam 360 litros de detergente, temos que:

- 4 tambores armazenam 720 litros (valores dobrados para as duas grandezas);
- 6 tambores armazenam 1 080 litros (valores triplicados para as duas grandezas);
- 1 tambor armazena 180 litros (valores reduzidos à metade para as duas grandezas); e assim por diante.

Desse modo, podemos concluir que as grandezas "quantidade de tambores" e "volume de detergente armazenado" são grandezas diretamente proporcionais e, assim, a razão de quaisquer dois valores de uma dessas grandezas é igual à razão entre os valores correspondentes da outra grandeza, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA08). De acordo com os valores do quadro, vamos montar proporções convenientes para obter os valores que faltam, indicados por *x*, *y* e *z*.

a) $\frac{2}{x} = \frac{360}{720} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$

b) $\frac{2}{10} = \frac{360}{y} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{360}{y} \Rightarrow y = 1800$

c) $\frac{2}{21{,}5} = \frac{360}{z} \Rightarrow \frac{1}{10{,}75} = \frac{360}{z} \Rightarrow z = 3\,870$

As resoluções dos **exercícios 15** e **16** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Exercícios propostos

Para a resolução do **item a** do **exercício 17**, é preciso considerar que, em média, gasta-se 9 litros de água por minuto em um banho de ducha (135 : 15 = 9). Assim, ao reduzir para 5 minutos o tempo de banho, é possível economizar água por 10 minutos, ou seja, são economizados 90 litros de água.

No **item b**, espera-se que os estudantes considerem atitudes como: varrer o quintal e a calçada com a vassoura, e não com água de mangueira, reaproveitar a água da máquina de lavar roupa para outros fins (para lavar o carro ou o chão), fechar a torneira ao escovar os dentes, consertar vazamentos, providenciar cisterna para armazenar a água da chuva, entre outras.

As resoluções dos **exercícios 18** e **19** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Pense mais um pouco...

Acompanhe a seguir uma possível resolução para as atividades dessa seção.

a)

Medida do lado (cm)	2	4	6	8
Medida do perímetro (cm)	8	16	24	32

Observando o quadro, percebemos que, ao duplicar (triplicar etc.) a medida do lado, a medida do perímetro duplica (triplica etc.); logo, são grandezas diretamente proporcionais.

b)

Medida do lado (cm)	2	4	6	8
Medida da área (cm^2)	4	16	36	64

Observando o quadro, verificamos que a medida da área e a medida do lado não se alteram na mesma razão; logo, não são grandezas diretamente proporcionais.

c) Seguindo o mesmo raciocínio usado para analisar a medida da área do quadrado, que está relacionada ao quadrado da medida do lado, concluímos que a medida do volume de um cubo, que está relacionada ao cubo da medida da aresta, e a medida da aresta desse cubo não são proporcionais.

17 Em um banho de ducha, são gastos 135 litros de água em 15 minutos. Para economizar água, é preciso fechar o registro enquanto se ensaboa, reduzindo para 5 minutos o tempo de banho com o registro aberto.

a) Quantos litros de água são economizados dessa maneira? **17. a)** 90 litros.

b) Imagine que toda a água do mundo coubesse em uma garrafa de 1 litro. Se tirássemos da garrafa toda a água salgada, a porção de água doce seria suficiente apenas para encher um copinho de café. Porém a porção de água doce disponível para consumo direto não representaria mais do que algumas gotinhas retiradas desse copinho. Pouco, não é? Por esse motivo, é importante adotarmos certas atitudes, como fechar o registro de água enquanto nos ensaboamos durante o banho. Você conhece outras atitudes? Troque ideias com seus colegas e façam uma lista de atitudes que podemos tomar para fazer o uso racional da água.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

18. a) $x = 4{,}5$ cm, $y = 6$ cm e $z = 7{,}5$ cm.

18 A medida do perímetro de um triângulo cujos lados, em centímetro, medem x, y e z é de 18 cm.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

a) Sabendo que $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, calcule x, y e z.

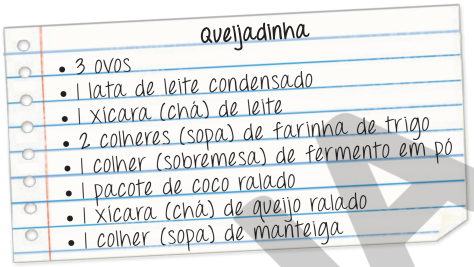
b) Usando régua e compasso, desenhe dois triângulos: **18. b)** Construção de figura.

- Triângulo ABC com $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm.
- Triângulo $A'B'C'$ com $A'B' = x$ cm, $B'C' = y$ cm, $A'C' = z$ cm.

c) Usando um transferidor, meça os ângulos dos triângulos do item **b**. O que acontece com as medidas de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, em relação às medidas de $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ e $\hat{C}'$?

18. c) As medidas são respectivamente congruentes.

19 Márcia adora doces. Sabendo disso, uma amiga lhe passou a seguinte receita de queijadinha.



Queijadinha
- 3 ovos
- 1 lata de leite condensado
- 1 xícara (chá) de leite
- 2 colheres (sopa) de farinha de trigo
- 1 colher (sobremesa) de fermento em pó
- 1 pacote de coco ralado
- 1 xícara (chá) de queijo ralado
- 1 colher (sopa) de manteiga

LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

a) Com base nessa receita, Márcia quer fazer uma quantidade maior de queijadinhas. Para isso, aumentará proporcionalmente a quantidade de todos os ingredientes da receita. Quantos ovos serão necessários se ela utilizar 4 colheres de sopa de farinha? E quantas colheres de sopa de farinha serão necessárias se ela utilizar 9 ovos? **19. a)** 6; 6.

b) Se Márcia quiser fazer quatro receitas dessa, quantas colheres de sopa de farinha serão necessárias? E quantos ovos? **19. b)** 8; 12.

20 *Hora de criar* – Em duplas, discutam e listem as grandezas diretamente proporcionais mais comuns em sua rotina diária. Depois, elaborem dois problemas, um cada, envolvendo algumas dessas grandezas. Troquem de caderno e resolvam o problema um do outro. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo colega, destroquem para corrigi-los. **20.** Resposta pessoal.

17. b) Respostas possíveis: varrer o quintal e a calçada com a vassoura em vez de com água de mangueira, reutilizar a água da máquina de lavar roupas, fechar a torneira ao escovar os dentes, consertar vazamentos, providenciar cisterna para armazenar a água da chuva.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...: **a)** Sim, pois, ao duplicar (triplicar, e assim sucessivamente) a medida do comprimento do lado, a medida do perímetro também duplica (triplica etc.).

Reúna-se com um colega e troquem ideias sobre as questões a seguir.

a) O perímetro de um quadrado e o comprimento de seus lados são grandezas diretamente proporcionais? Justifiquem a resposta.

b) A área de um quadrado e o comprimento de seus lados são grandezas diretamente proporcionais? Justifiquem a resposta. **b)** Não, pois a medida da área e a medida do lado não se alteram na mesma razão.

c) E a medida da aresta de um cubo é proporcional à medida do seu volume? Justifiquem a resposta. **c)** Não, pois a medida do volume e a medida da aresta não se alteram na mesma razão.

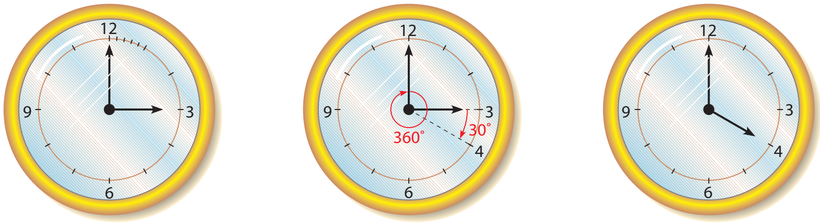
O **item b** pode ser um pouco mais explorado ao solicitar aos estudantes que escrevam razões entre dois valores de medidas do lado e as comparem com as razões das respectivas medidas da área. Eles devem concluir que estas equivalem aos quadrados daquelas. Por exemplo:

- $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{4}{16}$
- $\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$

PARA SABER MAIS

Medida de arcos de uma circunferência

Nos relógios com ponteiros, a circunferência está dividida em 12 partes iguais (marcando as horas), e cada uma dessas 12 partes está dividida em 5 partes iguais (marcando os minutos). Usualmente, nesses relógios, aparecem, no mínimo, dois ponteiros: um ponteiro menor, que indica as horas, e outro maior, que indica os minutos. Enquanto o ponteiro dos minutos dá uma volta completa, isto é, descreve um arco correspondente a um ângulo central medindo 360°, o ponteiro das horas descreve um arco correspondente a um ângulo central medindo $\frac{360°}{12}$, ou seja, 30°.

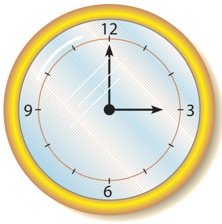


Vamos descobrir a medida do arco que o ponteiro das horas descreve em 1 minuto.

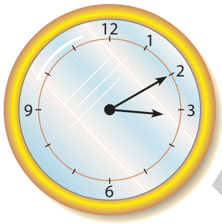
Se, em 1 hora, o ponteiro das horas descreve um arco que mede 30°, em 1 minuto, esse ponteiro descreve um arco que mede $\frac{30°}{60}$, ou seja, 0,5°, que corresponde a 30 minutos de arco ou 30′.

Agora, vamos determinar a medida do menor ângulo entre os ponteiros das horas e dos minutos quando o relógio indica 3 h 10 min.

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA



3 h



3 h 10 min

Quando o relógio indica 3 h, a medida do menor ângulo entre os ponteiros é de 90°. Analisamos que, a cada minuto, o ponteiro das horas se desloca 0,5°. Assim, em 10 minutos, ele se desloca $10 \cdot 0{,}5°$, ou seja, 5°.

Em 1 hora, isto é, 60 minutos, o ponteiro dos minutos descreve um arco correspondente a um ângulo central medindo 360°. Então, a cada minuto, o ponteiro dos minutos se desloca $\frac{360°}{60}$, ou seja, 6°. Assim, em 10 minutos, ele se desloca $10 \cdot 6°$, ou seja, 60°.

No deslocamento do ponteiro das horas, a medida do arco aumenta de 5° e, no deslocamento do ponteiro dos minutos, a medida do arco diminui de 60°. Assim, a medida do menor ângulo entre os ponteiros é dada por $90° + 5° - 60°$, ou seja, é de 35°. Logo, o menor ângulo às 3 h 10 min mede 35°.

Já aprendemos que o número irracional π é obtido pela razão:

$$\frac{\text{medida do comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}}$$

Para saber mais

Esta seção explora a relação de proporcionalidade direta entre a medida do ângulo central e a medida do comprimento do arco de circunferência correspondente, desenvolvendo, assim, as habilidades (EF09MA08) e (EF09MA11).

É importante destacar a distinção entre a medida angular e a medida linear (a medida do comprimento) de um arco. Essa questão pode ser trabalhada detalhadamente nesta seção.

Retome a razão que determina o número irracional π, a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Lembrando que a medida do comprimento C de uma circunferência de raio r é dada por $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Lembre os estudantes de que a medida, em grau, associada a um giro de uma volta completa corresponde a um arco de 360°.

Para saber mais

Enfatize que a medida de um mesmo arco, em grau, é sempre a mesma em qualquer circunferência. No entanto, a medida do comprimento desse arco, em centímetro, muda de acordo com a medida do raio da circunferência.

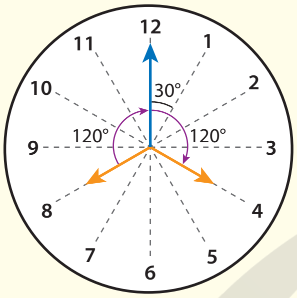
A seguir, apresentamos algumas possíveis resoluções do **Agora é com você!**

Na **atividade 1**, em 1 hora, ou seja, em 60 minutos, o ponteiro dos minutos descreve um arco de 360° (uma volta completa), em 1 minuto descreve um arco de medida x.

$$\frac{60}{1} = \frac{360°}{x} \Rightarrow 60x = 360°$$

Logo: $x = 6°$

Na **atividade 2**, os relógios (analógicos) têm 12 números igualmente espaçados. Então, cada arco formado por dois números consecutivos corresponde a 30° (360° : 12). Analisando um desenho da situação, podemos verificar que os ponteiros determinarão novamente um menor arco de 120° com o ponteiro dos minutos no 12 às 8 horas.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

As resoluções das **atividades 3** e **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Assim, a medida do comprimento de uma circunferência (C) é obtida pelo produto da medida de seu diâmetro (d) pelo número π, ou seja, $C = d \cdot \pi$.

Como a medida do diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro da medida de seu raio, temos:

$$C = 2\pi r$$

É por isso que, em um relógio, quando o ponteiro dos minutos gira 360°, sua extremidade faz um percurso de $2\pi r$, ou seja, percorre todo o comprimento da circunferência.

Nos relógios das fotografias a seguir, os ponteiros têm diferentes medidas. Vamos considerar a circunferência determinada pela extremidade do ponteiro dos minutos e que a medida do comprimento desse ponteiro no relógio 1 é 12,5 cm, no relógio 2 é 14 cm e no relógio 3 é 20 cm.

ROBERTO CERRUTI/SHUTTERSTOCK

①

WILLIAM CASEY/SHUTTERSTOCK

②

LUCIACASAIS/SHUTTERSTOCK

③

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Quando o ponteiro dos minutos descreve um ângulo α, sua extremidade percorre um arco cujo comprimento é diretamente proporcional a α. Assim, por exemplo, em um relógio, quando o ponteiro dos minutos gira 60°, sua extremidade percorre $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, um arco de comprimento medindo $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{6}$ que equivale a $\frac{\pi r}{3}$.

Observe que o relógio 2 tem ponteiro com medida de comprimento igual a 14 cm. Quando o ponteiro dos minutos gira 60°, sua extremidade percorre um arco que mede $\frac{\pi \cdot 14}{3}$ cm, ou seja, aproximadamente 15 cm. Já a extremidade do ponteiro dos minutos do relógio 1, quando ele gira 60°, percorre um arco que mede $\frac{\pi \cdot 12{,}5}{3}$ cm, ou seja, aproximadamente 13 cm.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Descubra a medida do arco que o ponteiro dos minutos descreve em 1 minuto. **1.** 6°

2 Às 4 h, a menor medida do ângulo entre os ponteiros de um relógio é de 120°. A que horas a menor medida do ângulo entre os ponteiros será novamente de 120° quando o ponteiro dos minutos estiver no 12? **2.** Às 8 horas.

3 Lembrando que um giro de 30° corresponde a $\frac{1}{12}$ da circunferência, determine qual é a fração da circunferência correspondente a cada giro.

a) 20° **3. a)** $\frac{1}{18}$ b) 45° **3. b)** $\frac{1}{8}$ c) 90° **3. c)** $\frac{1}{4}$ d) 180° **3. d)** $\frac{1}{2}$ e) 135° **3. e)** $\frac{3}{8}$ f) 270° **3. f)** $\frac{3}{4}$

4 Observe o relógio 3 e, considerando $\pi = 3{,}14$, calcule, em centímetro, a medida aproximada dos arcos descritos pelo ponteiro dos minutos correspondentes ao giros indicados nos itens.

a) 30° **4. a)** 10,47 cm b) 45° **4. b)** 15,70 cm c) 90° **4. c)** 31,40 cm d) 270° **4. d)** 94,20 cm e) 180° **4. e)** 62,80 cm

Grandezas inversamente proporcionais

Antes de estudar as grandezas inversamente proporcionais, veremos o conceito de **razões inversas**.

Ao trabalhar com números racionais, você já se deparou com números inversos. Por exemplo, os números $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$ são inversos, assim como os números 3 e $\frac{1}{3}$.

Vamos considerar as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$. Note que o produto delas é igual a 1, pois:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$$

Nessas condições, dizemos que as **razões** são **inversas**. Portanto, $\frac{3}{4}$ é a razão inversa de $\frac{4}{3}$, e $\frac{4}{3}$ é a razão inversa de $\frac{3}{4}$.

Acompanhe outros exemplos.

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$, assim, a razão inversa de $\frac{5}{6}$ é $\frac{6}{5}$, e a razão inversa de $\frac{6}{5}$ é $\frac{5}{6}$.

b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{1} = 1$, assim, a razão inversa de $\frac{1}{7}$ é $\frac{7}{1}$, e a razão inversa de $\frac{7}{1}$ é $\frac{1}{7}$.

Agora, observe uma situação que envolve as grandezas **velocidade** e **tempo**.

Fernando tem um jogo de *videogame* que simula uma corrida de motos. Algumas vezes, ele percorreu o mesmo trajeto com velocidades diferentes e anotou a medida do tempo que levou a cada vez.

Velocidade (km/h)	Tempo (min)
30	12
60	6
90	4
120	3

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando o quadro, temos que:

- duplicando a velocidade da moto, o tempo fica reduzido à metade;
- triplicando a velocidade, o tempo fica reduzido à terça parte; e assim por diante.

Por isso, podemos concluir que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **grandezas inversamente proporcionais**.

Perceba ainda que, duas a duas, as razões entre os números que indicam a velocidade são iguais ao inverso das razões entre os números que indicam o tempo.

$$\frac{30}{60} = \underbrace{\frac{6}{12}}_{\text{inverso da razão } \frac{12}{6}}$$

$$\frac{30}{90} = \underbrace{\frac{4}{12}}_{\text{inverso da razão } \frac{12}{4}}$$

$$\frac{30}{120} = \underbrace{\frac{3}{12}}_{\text{inverso da razão } \frac{12}{3}}$$

$$\frac{60}{90} = \underbrace{\frac{4}{6}}_{\text{inverso da razão } \frac{6}{4}}$$

$$\frac{60}{120} = \underbrace{\frac{3}{6}}_{\text{inverso da razão } \frac{6}{3}}$$

$$\frac{90}{120} = \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{inverso da razão } \frac{4}{3}}$$

Grandezas inversamente proporcionais

Peça aos estudantes que, em duplas, leiam e acompanhem a situação apresentada, registrando no caderno as considerações sobre o que leram. Depois, proponha que comparem com as situações apresentadas anteriormente que envolvem grandezas diretamente proporcionais.

Verifique se os estudantes observam que, se as grandezas são inversamente proporcionais, a razão entre dois valores de uma grandeza é igual à razão inversa entre os valores correspondentes da outra, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA08).

Grandezas inversamente proporcionais

Explore com os estudantes os exemplos apresentados. Ressalte o fato de que, no caso das grandezas inversamente proporcionais, o produto entre os valores de uma grandeza pelos valores correspondentes da outra se mantém constante.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 21** e dos **exercícios 23** e **24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

No **exercício 22**, é interessante chamar a atenção dos estudantes para o fato de que, se aumentamos o número de torneiras, o tempo para encher o tanque tende a diminuir. Desse modo:

a) com 2 torneiras abertas, o tempo se reduziria à metade, ou seja, 2 torneiras abertas encheriam o tanque em 4 horas;

b) com 3 torneiras abertas, o tempo se reduziria à terça parte, ou seja, 3 torneiras abertas encheriam o tanque em $\frac{8}{3}$ horas ou, ainda,
160 minutos $\left(\frac{8}{3} \cdot 60 \text{ minutos}\right)$;

c) em 1 hora, uma única torneira aberta encheria $\frac{1}{8}$ do tanque, ou seja, seriam necessárias 8 torneiras para encher o tanque em 1 hora.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.

Note também que a multiplicação dos valores da primeira coluna do quadro pelos valores correspondentes da segunda é igual.

$$30 \cdot 12 = 60 \cdot 6 = 90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

Todos esses produtos são iguais a 360.

Dizemos, então, que os números da sequência 30, 60, 90 e 120 são **inversamente proporcionais** aos números da sequência 12, 6, 4 e 3.

Acompanhe outros exemplos.

a) Cinco máquinas iguais realizam um trabalho em 36 dias. De acordo com essas informações, podemos supor que:

- o dobro do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na metade do tempo, isto é, em 18 dias;
- o triplo do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na terça parte do tempo, isto é, em 12 dias.

Então, concluímos que as grandezas **quantidade de máquinas** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

b) Vamos determinar x e y de modo que a sequência de números 4, x e 8 seja inversamente proporcional à sequência de números 20, 16 e y.

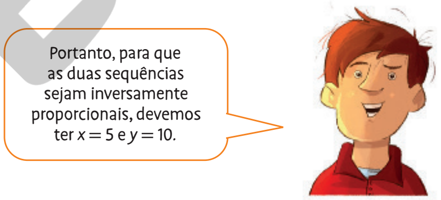
$$\begin{matrix} 4 & x & 8 \\ 20 & 16 & y \end{matrix}$$

Para que as duas sequências sejam inversamente proporcionais, os produtos dos números correspondentes devem ser iguais, isto é:

$$4 \cdot 20 = x \cdot 16 = 8 \cdot y$$

Assim:

$$x \cdot 16 = 4 \cdot 20 \qquad 8 \cdot y = 4 \cdot 20$$
$$16x = 80 \qquad 8y = 80$$
$$\frac{16x}{16} = \frac{80}{16} \qquad \frac{8y}{8} = \frac{80}{8}$$
$$x = 5 \qquad y = 10$$



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 Cinco iogurteiras iguais produzem certa quantidade de iogurte em 28 dias. Nessas condições, responda.

a) O dobro do número dessas iogurteiras produz essa mesma quantidade de iogurte em quantos dias? **21. a)** 14 dias.

b) O quádruplo do número de iogurteiras faz esse mesmo trabalho em quantos dias? **21. b)** 7 dias.

c) As grandezas quantidade de iogurteiras e tempo são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? **21. c)** Inversamente proporcionais.

22 Para encher um tanque, são usadas três torneiras que têm a mesma vazão. Com apenas uma torneira aberta, enche-se o tanque em 8 horas.

a) Em quantas horas duas torneiras abertas encheriam o tanque? **22. a)** 4 horas.

b) Em quantos minutos as três torneiras abertas encheriam o tanque? **22. b)** 160 minutos.

c) Quantas torneiras iguais a essas seriam necessárias para encher o tanque em 1 hora? **22. c)** 8 torneiras.

23 Os dados no quadro referem-se ao número de máquinas (iguais) e ao tempo necessário para a produção de 36 litros de sorvete.

Número de máquinas	1	2	*b*	6
Tempo (min)	60	*a*	15	*c*

a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*.
b) Com apenas uma máquina, em quanto tempo seriam produzidos 108 litros de sorvete?
c) Para produzir 72 litros de sorvete em 30 minutos, seriam necessárias quantas máquinas?

23. a) $a = 30$, $b = 4$ e $c = 10$.
23. b) 3 horas. **23. c)** 4 máquinas.

24 Divida o número 132:

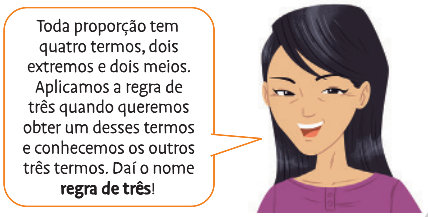
a) em três partes iguais; **24. a)** 44
b) em partes diretamente proporcionais a 2, 4 e 6; **24. b)** 22, 44 e 66.
c) em partes inversamente proporcionais a 2, 4 e 6. **24. c)** 72, 36 e 24.

25 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado por vocês, sobre grandezas inversamente proporcionais. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.
25. Resposta pessoal.

3 Regra de três

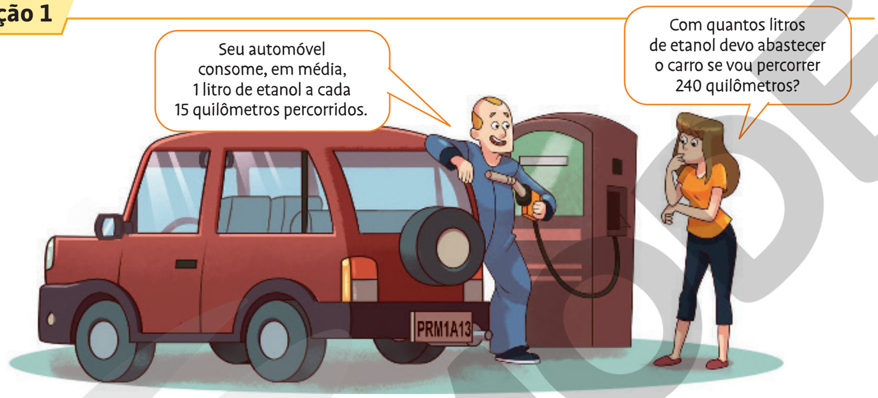
Regra de três simples

Os problemas que envolvem duas grandezas direta ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos por meio de um procedimento prático chamado **regra de três simples**. Para entender tal procedimento, considere as situações a seguir.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 1



MONITO MAN /ARQUIVO DA EDITORA

O problema envolve duas grandezas: **distância percorrida** e **volume de etanol**. As unidades empregadas para medir essas grandezas são, respectivamente, **quilômetro** e **litro**.

Ao indicar por x a medida do volume de etanol, em litro, necessária para percorrer os 240 quilômetros, podemos organizar o seguinte quadro:

Distância percorrida (km)	Volume de etanol (L)
15	1
240	x

3. Regra de três

Habilidade da BNCC:
EF09MA08.

Ainda desenvolvendo a habilidade (EF09MA08), aplicando as relações de proporcionalidade direta e inversa na resolução de problemas que envolvem a variação de duas ou mais grandezas dependentes, estudamos um processo de resolução denominado **regra de três**.

Ele é simples quando há apenas duas grandezas envolvidas, que são direta ou inversamente proporcionais.

Regra de três simples

Peça aos estudantes que façam a leitura e acompanhem o desenvolvimento da **situação 1** e da **situação 2**. Espera-se que eles observem que a montagem de cada quadro organiza os dados fornecidos pelo problema, destaca o valor desconhecido e facilita a análise da relação entre as grandezas envolvidas, para verificar se elas são grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Depois disso, aplicamos as condições estudadas anteriormente para a relação de proporcionalidade identificada – direta ou inversa – e resolvemos a equação obtida.

As grandezas **distância percorrida** e **volume de etanol** são **diretamente proporcionais**, pois, se a medida da distância percorrida aumenta, a medida do volume de etanol utilizado aumenta proporcionalmente, ou seja, se a medida da distância dobra, triplica etc., a medida do volume de etanol também dobra, triplica etc.

Logo, a razão entre as medidas da distância percorrida é igual à razão entre as correspondentes medidas de volume de etanol.

Assim, temos a proporção $\frac{15}{240} = \frac{1}{x}$, que nos leva ao valor de x.

$$15x = 1 \cdot 240$$

$$\frac{15x}{15} = \frac{240}{15}$$

$$x = 16$$

Portanto, esse automóvel precisa de 16 L de etanol para percorrer 240 km.

Situação 2

Ao viajar de automóvel, à velocidade média de 60 km/h, Vânia leva 4 horas para percorrer determinado trajeto. Certo dia, ela aumentou a velocidade média do automóvel para o limite máximo da rodovia, que era 80 km/h. Vamos calcular o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto.

O problema envolve duas grandezas: **velocidade média**, medida em quilômetro por hora, e **tempo**, medida em hora.

Indicando por x a medida do tempo, em hora, necessário para percorrer o trajeto a 80 km/h, organizamos este quadro:

Velocidade média (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

As grandezas **velocidade média** e **tempo** são **inversamente proporcionais**, pois, ao aumentar a velocidade média, o tempo de viagem diminui proporcionalmente. Se, por exemplo, a velocidade for duplicada, o tempo de viagem será reduzido à metade.

Então, como as grandezas são inversamente proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

Assim, a multiplicação de cada uma das medidas de velocidade média por cada uma das medidas de tempo de viagem correspondentes tem produtos iguais.

$$80x = 60 \cdot 4$$

Resolvendo a equação, obtemos o valor de x:

$$\frac{80x}{80} = \frac{240}{80}$$

$$x = 3$$


MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, quando Vânia aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h, o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto foi de 3 horas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26. a) R$ 162,50

26 Se 9 metros de tecido custam R$ 117,00, então:

a) quanto custam 12,5 m desse tecido?

b) quantos metros de tecido é possível comprar com R$ 109,20? **26. b)** 8,4 m

27 Uma usina produz 350 litros de álcool com 5 toneladas de cana-de-açúcar. Para produzir 8 750 litros de álcool, são necessárias quantas toneladas de cana-de-açúcar?

27. 125 toneladas.

28 No rio que atravessa certa cidade, foram encontradas 3 toneladas de peixes mortos, em decorrência de um grande vazamento de uma indústria química. A prefeitura da cidade contratou 45 funcionários de uma empresa de limpeza urbana, que, em 4 dias, retiraram do rio todos os peixes mortos. **28. a)** 3 dias.

a) Supondo que a prefeitura tivesse contratado outros 15 funcionários, de mesma produtividade, quantos dias seriam necessários para retirar do rio aquela quantidade de peixes?

b) Faça uma pesquisa sobre as atitudes que as empresas devem tomar para evitar desastres ambientais como esse.

c) Não jogar lixo na rua, separar material reciclável e evitar o uso de automóvel para percorrer pequenas distâncias são atitudes que todos nós podemos tomar para ajudar na preservação do meio ambiente. Troque ideias com os colegas e façam uma lista de outras atitudes que podem ser tomadas para a preservação do meio ambiente.

28. b) Resposta pessoal. **28. c)** Resposta pessoal.

29 Uma padaria produz 400 pães com 10 kg de farinha de trigo.

a) Quantos pães ela produzirá com uma saca de 60 kg de farinha? **29. a)** 2 400 pães.

b) Quantos quilogramas de farinha são necessários para a produção de 720 pães? **29. b)** 18 kg

30 Para construir uma roda dentada com determinada máquina, perdem-se 30 gramas de material. Depois de 10 dias utilizando essa máquina, que produz 150 rodas dentadas por dia, quantos quilogramas de material serão perdidos? **30.** 45 kg

31 Um automóvel faz certo percurso em 4,5 horas com velocidade média de 80 km/h, consumindo 1 litro de etanol a cada 12 quilômetros.

a) Se a medida da velocidade média fosse de 90 km/h, esse percurso seria feito em quanto tempo? **31. a)** 4 horas.

b) Desejando-se fazer esse percurso em 5 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? **31. b)** 72 km/h

32 Uma torneira fornece 24 litros de água por minuto e enche um tanque em 45 minutos.

a) Duas torneiras iguais a essa encheriam o tanque em quantos minutos? **32. a)** 22,5 minutos.

b) Para encher o tanque em 15 minutos, seriam necessárias quantas dessas torneiras, sabendo que agora ele tem um vazamento?

33 Em uma cidade, uma frota de 600 ônibus transporta 240 000 pessoas por dia. Para reduzir os gastos, a prefeitura propôs retirar 200 ônibus de circulação.

a) Supondo que os usuários desses 200 ônibus passem a usar automóveis e que cada automóvel transporte 4 pessoas por dia, no mínimo quantos automóveis serão necessários para transportar essas pessoas?

b) O que você imagina que acontecerá com o trânsito da cidade e o meio ambiente se a prefeitura de fato tomar essa medida?

33. a) 20 000 automóveis. **33. b)** Resposta pessoal.

34 ***Hora de criar*** – Em duplas, elaborem dois problemas, um cada, que devem ser resolvidos por regra de três simples. Para elaborar os problemas, considerem situações do dia a dia que envolvam a relação entre duas grandezas de naturezas diferentes. Troquem de caderno e resolvam o problema um do outro. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo colega, destroquem para corrigi-los. **34.** Resposta pessoal.

32. b) Como não sabemos o volume de água que escoa do tanque por minuto com o vazamento, não é possível calcular o número de torneiras.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Um navio zarpou para uma viagem carregando alimentos suficientes para 30 dias. Entre passageiros e tripulantes, havia 250 pessoas a bordo. Passados 6 dias, o navio atracou em um porto, onde 10 passageiros desembarcaram, desistindo da viagem. Para quantos dias foram suficientes os alimentos restantes? *Pense mais um pouco...*: 25 dias.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 26** a **33** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Aproveite o **exercício 28** para conversar com os estudantes sobre atitudes para a preservação do meio ambiente. Converse com eles sobre atitudes que podem ser tomadas para evitar a poluição ambiental, sobre os impactos da poluição no meio ambiente, na conservação da biodiversidade, na saúde humana e até na economia. Comente sobre a importância da redução da quantidade de lixo que produzimos e a importância da reciclagem. Pergunte aos estudantes se sabem para onde vai o lixo que eles produzem e o que acontece com as embalagens depois que são descartadas. Se achar conveniente, proponha uma pesquisa sobre os programas de coleta seletiva na cidade em que moram, investigando também a adesão da comunidade a esses programas.

O **item b** do **exercício 33** possibilita a extensão do trabalho com esse tema, ao chamar a atenção para a poluição ambiental. Comente com os estudantes que os automóveis são um dos principais emissores de poluentes nas cidades, comprometendo a qualidade do ar e afetando o clima do planeta a longo prazo. Além disso, os automóveis também são responsáveis pela poluição sonora, que tem grande impacto na saúde, aumentando o estresse, podendo levar a distúrbios do sono, à perda da capacidade auditiva, causando dores de cabeça, falta de concentração, entre outros efeitos nocivos.

Pense mais um pouco...

Peça aos estudantes que organizem os dados em um quadro.

Quantidade de pessoas	250	240
Número de dias de duração dos alimentos	24	x

A resolução do problema pode ser encaminhada do seguinte modo: as grandezas "quantidade de pessoas" e "número de dias" são inversamente proporcionais; ao diminuir a quantidade de pessoas, o número de dias (x) que os alimentos duram aumenta:

$$\frac{x}{24} = \frac{250}{240} \Rightarrow 240x = 24 \cdot 250 \Rightarrow x = 25$$

Para saber mais

Nesta seção, exploramos a organização e a análise dos quadros montados como estratégia de resolução de problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta ou inversa, desenvolvendo também as habilidades (EF09MA07) e (EF09MA08).

Sugerimos que as atividades do **Agora é com você!** sejam desenvolvidas em duplas, para propiciar a troca de experiências e o compartilhamento de estratégias de resolução, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**. Durante as atividades, estimule a cooperação e o diálogo entre os estudantes, e ajude-os a resolver possíveis conflitos que podem surgir, destacando a importância do respeito mútuo.

Ao final, um representante de cada dupla pode mostrar na lousa o procedimento utilizado na resolução de alguma das atividades.

Apresentamos a seguir uma possível resolução do **item d** da **atividade 2**. A montagem do quadro auxilia os estudantes a determinar a porcentagem correspondente ao valor integral do relógio (550 reais). Espera-se que eles concluam que esse valor corresponde a 100%, enquanto 38% corresponderá ao valor do desconto.

Valor (em reais)	Porcentagem
550	100%
x	38%

Como a relação envolvida é de proporcionalidade direta, temos:

$$\frac{550}{x} = \frac{100}{38}$$

$$100x = 550 \cdot 38$$

$$x = 209$$

Logo, o valor do desconto é R$ 209,00.

Se achar conveniente, retome a noção de razão centesimal e a noção de porcentagem.

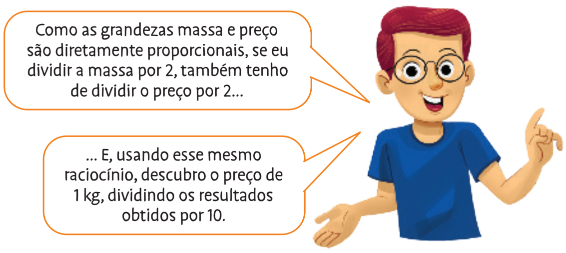
As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

PARA SABER MAIS

Resolvendo problemas com o auxílio de um quadro

Observe o problema que Juca resolveu usando um quadro para organizar seus cálculos.

Em um supermercado que vende por atacado, 20 kg de cebola custam R$ 32,00. Calcule o preço de 1 kg de cebola.



LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

: 2 : 10

Massa (em quilograma)	20	10	1
Preço (em real)	32	16	1,6

: 2 : 10

Assim, Juca descobriu que o preço de 1 kg de cebola é R$ 1,60.

Miriam também fez um quadro para organizar seus cálculos na resolução do seguinte problema.

Em um estádio de futebol, existem 8 600 lugares disponíveis. Em certo dia de jogo, 62% dos lugares estavam ocupados. Quantos lugares estavam ocupados? **1. b)** Resposta possível: inicialmente, Miriam associou o total de lugares disponíveis a 100%. Depois, calculou o número de lugares correspondente a 60%, dividindo o percentual e o número de lugares por 10 e, em seguida, multiplicando os resultados obtidos por 6. Como o percentual pedido é 62%, Miriam teve de calcular o número correspondente a 2%. Ela optou por, primeiro, descobrir o número de lugares correspondente a 1% (dividindo por 100 os valores da primeira coluna do quadro) e, em seguida, o número correspondente a 2% (multiplicando os resultados obtidos por 2). Para finalizar seus cálculos, Miriam adicionou os números de lugares correspondentes a 60% e 2%.

: 10 × 6

Percentual	100	10	60	1	2	60 + 2 = 62
Número de lugares	8 600	860	5 160	86	172	5 160 + 172 = 5 332

: 100 × 2

Assim, Miriam descobriu que 5 332 lugares estavam ocupados.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reúna-se com um colega para responder às questões. **1. a)** Construção de quadro.

a) Como ficaria o quadro de Juca se ele inicialmente dividisse a massa e o preço por 4?

b) Qual foi o raciocínio de Miriam para elaborar o quadro e obter o número de lugares ocupados no estádio?

2 Faça como Juca e Miriam e resolva os problemas a seguir com o auxílio de quadros.

a) Se 18 kg de banana custam R$ 45,00, calcule o preço de 1 kg de banana. **2. a)** R$ 2,50

b) Um automóvel gasta 4 litros de gasolina para percorrer 60 km. Calcule quantos litros de gasolina ele gastará ao percorrer 150 km. **2. b)** 10 litros.

c) Em um estádio de futebol existem 24 500 lugares. Em um dia de jogo, 48% dos lugares desse estádio estavam ocupados. Calcule a quantidade de lugares ocupados nesse dia. **2. c)** 11 760

d) Um relógio que custava R$ 550,00 em determinada loja estava na promoção com um desconto de 38%. Calcule o valor do desconto. **2. d)** R$ 209,00

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo gráficos de barras e de colunas

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida que classifica os países pelo seu nível de desenvolvimento com base em três dimensões: renda, educação e saúde.

Para estudar o IDH de diferentes países, Fred utilizou um mapa coroplético, isto é, um mapa que usa uma escala de cor para representar os dados estatísticos de diferentes localizações geográficas. Mapas desse tipo mostram como os dados variam de um lugar para outro.

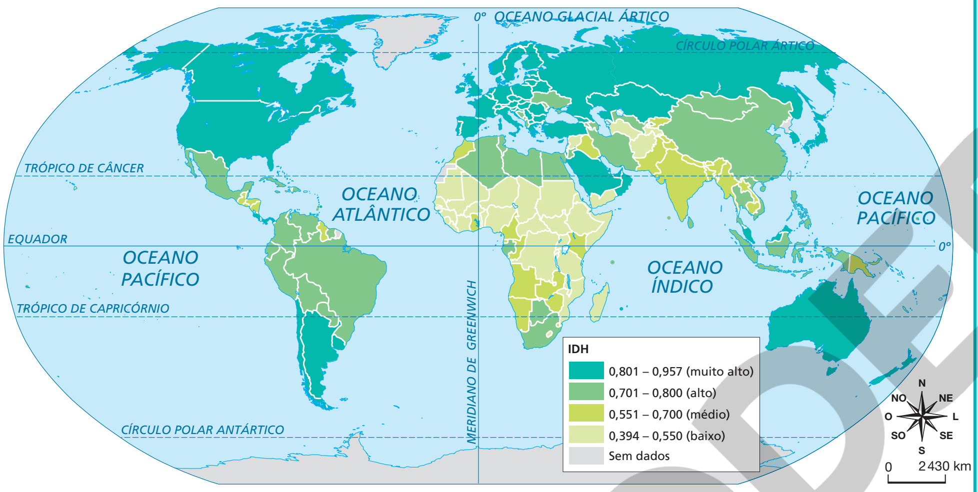
Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) – 2019

Canadá IDH: 0,929

Paquistão IDH: 0,557

Tunísia IDH: 0,740

China IDH: 0,761



SONIA VAZ/ARQUIVO DA EDITORA

Brasil IDH: 0,765

Haiti IDH: 0,510

Etiópia IDH: 0,485

Índia IDH: 0,645

Mianmar IDH: 0,583

Austrália IDH: 0,944

Dados obtidos em: HUMAN DEVELOPMENT REPORTS. **HDR 2020 Tables and Dashboards**. Disponível em: https://hdr.undp.org/data-center/documentation-and-downloads. Acesso em: 30 jun. 2022.

Após analisar os dados do IDH indicados pelo mapa, Fred resolveu fazer um gráfico de barras para comparar os dados do IDH de alguns países para 2019.

Para o gráfico não ficar muito extenso, Fred estabeleceu a medida de 10,0 cm de comprimento para a barra correspondente ao maior dado de IDH que será considerado (Austrália: 0,944). Em seguida, ele calculou a medida do comprimento, aproximada, das outras barras por meio da regra de três. Observe alguns cálculos que ele fez.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA22**.

Esta seção apresenta uma boa oportunidade para promover uma discussão interdisciplinar de temas como pobreza e distribuição de renda. É importante deixar evidente para os estudantes que o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) considera dados relacionados a renda, educação e saúde, mas não considera aspectos como a forma de governo vigente no país, a desigualdade social (de renda, de gênero, de crença), ações de sustentabilidade, entre outros aspectos, que são importantes para determinar a qualidade de vida da população.

Nesse contexto, se julgar adequado, promova um trabalho conjunto com os professores de História, Geografia e Ciências, chamando a atenção dos estudantes para o desempenho dos países também em outros anos e para o significado de possíveis mudanças nesses índices de um ano para outro.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com esse tema, sugerimos:

ATLAS do desenvolvimento humano no Brasil. Disponível em: http://www.atlasbrasil.org.br/. Acesso em: 22 jul. 2022.

Essa página interativa reúne dados dos indicadores de desenvolvimento humano e das desigualdades sociais no Brasil, organizados em mapas, tabelas e gráficos, apresentados de forma simples e dinâmica. São um conjunto de 120 indicadores obtidos por meio do Censo Demográfico e da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios, do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Agora quem trabalha é você!

Se julgar conveniente, é interessante pedir aos estudantes que construam os gráficos propostos nas atividades no computador, utilizando um *software* de planilha eletrônica, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA22).

Na **atividade 2**, os estudantes devem primeiro organizar os dados em uma tabela considerando a medida da altura da coluna correspondente ao país que tem o maior IDH (em 2019, a Noruega) igual a 10 cm e, assim, determinar as medidas das alturas das demais colunas proporcionalmente ao valor do IDH dos demais países.

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Comparando o IDH da Austrália e o da Etiópia, de 2019, Fred organizou o quadro:

País	IDH 2019	Comprimento da barra (cm)
Austrália	0,944	10,0
Etiópia	0,485	*x*

Como as grandezas IDF 2019 e comprimento da barra são diretamente proporcionais, Fred fez uma regra de três para obter, em centímetro, a medida *x*:

$$\frac{0{,}944}{0{,}485} = \frac{10{,}0}{x} \Rightarrow 0{,}944x = 4{,}85 \Rightarrow x = \frac{4{,}85}{0{,}944} \simeq 5{,}1$$

De maneira semelhante, Fred pôde comparar o IDH 2019 da Austrália com o da Índia e, depois, o da Austrália com o do Brasil. Observe como ele organizou as informações em quadros e como utilizou a regra de três para determinar, em centímetro, as medidas *y* e *z* referentes ao comprimento das barras do IDH 2019 da Índia e do Brasil, respectivamente.

País	IDH 2019	Comprimento da barra (cm)
Austrália	0,944	10,0
Índia	0,645	*y*

$$\frac{0{,}944}{0{,}645} = \frac{10{,}0}{y} \Rightarrow 0{,}944y = 6{,}45 \Rightarrow y = \frac{6{,}45}{0{,}944} \simeq 6{,}8$$

País	IDH 2019	Comprimento da barra (cm)
Austrália	0,944	10,0
Brasil	0,765	*z*

$$\frac{0{,}944}{0{,}765} = \frac{10{,}0}{z} \Rightarrow 0{,}944z = 7{,}65 \Rightarrow z = \frac{7{,}65}{0{,}944} \simeq 8{,}1$$

Assim, as barras referentes à Etiópia, à Índia e ao Brasil ficaram com medidas de 5,1 cm, 6,8 cm e 8,1 cm de comprimento, respectivamente.

3. Não necessariamente, porque o IDH considera dados relacionados à renda, à educação e à saúde, mas não considera aspectos como forma de governo vigente no país, desigualdade social (de renda, de gênero, de crença), sustentabilidade, que são importantes para a qualidade de vida.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Calcule a medida do comprimento das barras referentes aos outros países destacados no mapa e faça um gráfico de barras como Fred fez. **1.** Haiti: 5,4 cm; Canadá: 9,8 cm; Paquistão: 5,9 cm; Tunísia: 7,8 cm; Mianmar: 6,2 cm; China: 8,1 cm. Construção de gráfico.

2 Pesquise quais são, atualmente, os três países com maior IDH e quais são os três com menor IDH. Organize esses dados em uma tabela e elabore um gráfico de colunas comparando o IDH desses países. (Sugestão: deixe a coluna maior com 10 cm de altura.) **2.** Construção de gráfico.

3 Os países com maior IDH são necessariamente os países com melhor qualidade de vida? Escreva uma explicação para isso.

Regra de três composta

O procedimento usado para resolver problemas que envolvam mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, é chamado de **regra de três composta**.

Considere as situações a seguir, que envolvem três grandezas.

Situação 1

Uma empresa fornece café da manhã para 80 funcionários, gerando um custo de R$ 5 000,00 para um período de 120 dias. Vamos calcular quanto essa empresa gastaria para fornecer o mesmo café da manhã para 150 funcionários, durante 100 dias.

Vamos chamar de x o preço, em real, desse café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias. Para facilitar, vamos dispor em um quadro os dados do problema.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Número de funcionários	Tempo (em dia)	Preço (em real)
80	120	5 000
150	100	x

Fixando o número de dias em 120, vamos estabelecer uma relação entre o número de funcionários e o preço. Assim, é possível determinar o preço, em real, que essa empresa pagaria para fornecer o café da manhã para 150 funcionários durante 120 dias. Vamos indicar esse preço por z.

Número de funcionários	Tempo (em dia)	Preço (em real)
80	120	5 000
150	120	z

O número de funcionários e o preço são diretamente proporcionais. Então, podemos escrever a seguinte proporção e determinar o valor de z.

$$\frac{80}{150} = \frac{5\,000}{z}$$

$$80z = 150 \cdot 5\,000$$

$$\frac{80z}{80} = \frac{750\,000}{80}$$

$$z = 9\,375$$

Agora, fixando o número de funcionários em 150, vamos estabelecer uma relação entre o tempo e o preço. Então, vamos encontrar o valor de x, que é o preço do café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias.

Regra de três composta

Aplicando as relações de proporcionalidade direta e inversa na resolução de problemas que envolvem a variação de mais de duas grandezas dependentes, o procedimento de resolução aplicado, nesse caso, será uma regra de três composta. No entanto, a relação entre as grandezas é analisada de duas em duas, considerando as demais com valores constantes, para determinar quais das grandezas são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais.

Trabalhe com a **situação 1** na lousa, pedindo aos estudantes que auxiliem com cada etapa desenvolvida e que justifiquem cada uma delas. A construção dos quadros passo a passo mostra a estratégia utilizada e possibilita verificar a propriedade concluída ao final.

Regra de três composta

Analise com os estudantes o desenvolvimento da mesma situação com a aplicação direta da propriedade concluída anteriormente. Mostre a eles que, ao analisar duas grandezas de cada vez, estamos considerando mentalmente os quadros feitos passo a passo.

Número de funcionários	Tempo (em dia)	Preço (em real)
150	120	9 375
150	100	*x*

O tempo e o preço são diretamente proporcionais. Então, podemos escrever a seguinte proporção e determinar o valor de *x*.

$$\frac{120}{100} = \frac{9\,375}{x}$$

$$120x = 100 \cdot 9\,375$$

$$\frac{120x}{120} = \frac{937\,500}{120}$$

$$x = 7\,812{,}5$$

Portanto, o preço que a empresa pagaria para fornecer o café da manhã para 150 funcionários durante 100 dias é R$ 7 812,50.

Observe que a grandeza **preço** é diretamente proporcional à grandeza **tempo** e à grandeza **número de funcionários**. Essa relação conduz a outra forma de resolução desse problema, por meio da aplicação da seguinte propriedade:

> Se uma grandeza é proporcional a outras grandezas, então ela é proporcional ao produto dessas outras grandezas.

Observe o quadro com os dados iniciais dessa situação.

Número de funcionários	Tempo (em dia)	Preço (em real)
80	120	5 000
150	100	*x*

Vamos resolver esse problema aplicando a propriedade apresentada.

$$\underbrace{\frac{5\,000}{x}}_{\text{razão entre os preços}} = \overbrace{\frac{80}{150}}^{\text{razão entre o número de funcionários}} \cdot \underbrace{\frac{120}{100}}_{\text{razão entre o número de dias}}$$

$$\frac{5\,000}{x} = \frac{9\,600}{15\,000}$$

$$9\,600x = 5\,000 \cdot 15\,000$$

$$\frac{9\,600x}{9\,600} = \frac{75\,000\,000}{9\,600}$$

$$x = 7\,812{,}5$$

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 2

FABIO EIJI SIRASUMA/ ARQUIVO DA EDITORA

Em uma indústria, 5 máquinas de mesmo rendimento produzem 600 peças em 5 dias.

Vamos calcular quantas dessas máquinas produziriam 720 peças em 3 dias.

Vamos dispor os dados em um quadro e chamar de *x* o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dia)
5	600	5
x	720	3

Fixando o número de dias em 5, estabelecemos uma relação entre o **número de máquinas** e o **número de peças**. Então, vamos determinar o número de máquinas que produziriam 720 peças em 5 dias, indicando-o por *z*.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dia)
5	600	5
z	720	5

O número de máquinas é diretamente proporcional ao número de peças, então podemos escrever a seguinte proporção e determinar o valor de *z*:

$$\frac{5}{z} = \frac{600}{720}$$

$$600z = 5 \cdot 720$$

$$\frac{600z}{600} = \frac{3\,600}{600}$$

$$z = 6$$

Fixando o número de peças em 720, vamos agora estabelecer uma relação entre o **número de máquinas** e o **tempo**. Então, encontramos o valor de *x*, que é o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dia)
6	720	5
x	720	3

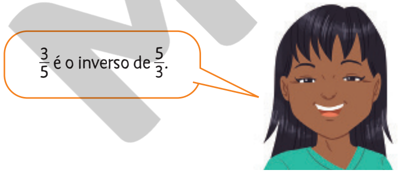
O número de máquinas é inversamente proporcional ao tempo, então a razão entre o número de máquinas é igual ao inverso da razão entre o número de dias.

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$$

$$3x = 30$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{30}{3}$$

$$x = 10$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, o número de máquinas que produziriam 720 peças em 3 dias é 10.

Regra de três composta

Inicialmente, apresente a **situação 2** na lousa para que os estudantes, reunidos em duplas, possam resolvê-la no caderno. Depois, peça a eles que acompanhem a resolução apresentada no livro e comparem com as estratégias que usaram, para verificar se precisam modificar alguma etapa em suas resoluções. A discussão entre colegas é importante para a exposição de ideias, a busca de justificativas para procedimentos e a análise e a comparação com o desenvolvimento do livro. Ao final, organize uma roda de conversa para discutir as dificuldades que encontraram e para compartilhar as estratégias utilizadas pelas duplas.

Exercícios propostos

Neste bloco, os exercícios também podem ser resolvidos em duplas, o que propiciará a ampliação de repertório de estratégias de resolução dos estudantes.

Na correção, convide um representante de cada dupla para apresentar na lousa possíveis resoluções, envolvendo toda a turma no desenvolvimento de cada resolução.

As resoluções dos **exercícios 35** a **40** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

No **exercício 41**, o desafio é que os estudantes compreendam que devem obter o valor a ser acrescido correspondente aos novos funcionários, pois o contrato anterior já engloba os 72 funcionários que a empresa tinha antes. Assim, os estudantes devem descobrir que valor será cobrado para fornecer refeições para 8 funcionários por 40 dias (tempo que falta para completar o contrato).

Montamos o quadro correspondente a essa situação:

Número de funcionários	Tempo (em dias)	Valor (em reais)
72	60 dias	13 824
8	40 dias	x

Analisando as grandezas número de funcionários e tempo em relação ao valor do contrato (grandeza que contém a incógnita), temos:

- "número de funcionários" e "valor" são diretamente proporcionais (duplicando o número de funcionários, o valor do contrato é duplicado etc.);
- "tempo" e "valor" também são grandezas diretamente proporcionais (duplicando o tempo de fornecimento, o valor do contrato é duplicado etc.).

Assim, obtemos:

$$\frac{13\,824}{x} = \frac{72}{8} \cdot \frac{60}{40}$$

$$\frac{13\,824}{x} = \frac{9}{1} \cdot \frac{3}{2}$$

$$27x = 13\,824 \cdot 2$$

$$x = 1024$$

Esse é o valor cobrado pelos 8 funcionários, ou seja, é o valor a ser acrescido no contrato original. Logo, o valor do novo contrato é R$ 14 848,00 (13 824 + 1024 = 14 848).

Vamos resolver novamente esse problema aplicando a propriedade estudada.

Número de máquinas	Número de peças	Tempo (em dia)
5	600	5
x	720	3

As grandezas **número de máquinas** e **número de peças** são **diretamente proporcionais**. No entanto, as grandezas **número de máquinas** e **tempo** são **inversamente proporcionais**. Assim, temos:

$$\underset{\text{razão entre o número de máquinas}}{\frac{5}{x}} = \overset{\text{razão entre o número de peças}}{\frac{600}{720}} \cdot \frac{3}{5} \leftarrow \text{razão inversa entre o número de dias}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{1\,800}{3\,600}$$

$$1\,800x = 5 \cdot 3\,600$$

$$\frac{1\,800x}{1\,800} = \frac{18\,000}{1\,800}$$

$$x = 10$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Em um restaurante, 150 fregueses consomem 3 000 esfirras em 5 dias. Calcule quantas esfirras 200 fregueses vão consumir em 30 dias, admitindo que todos esses fregueses tenham hábitos iguais. **35.** 24 000 esfirras.

36 Uma jovem percorreu de bicicleta o equivalente a 320 km em 10 dias, pedalando 8 horas por dia. Quantos quilômetros ela poderia percorrer em 8 dias, na mesma velocidade, se pedalasse 12 horas por dia? **36.** 384 km

37 Uma gráfica tem 5 máquinas de mesmo rendimento que imprimem 36 000 panfletos em duas horas. Considerando que duas dessas máquinas não estejam funcionando, calcule em quanto tempo as restantes imprimiriam 27 000 exemplares do mesmo panfleto. **37.** 2 h 30 min

38 Nove amigos foram acampar por 6 dias. Para isso, levaram alimento suficiente, calculando 4 refeições diárias. Se chegassem mais 3 amigos e o grupo fizesse 3 refeições diárias, a quantidade de alimento que levaram inicialmente seria suficiente para quanto tempo? **38.** 6 dias.

39 Se 4 tratores iguais realizam um serviço em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia, calcule em quantos dias esse serviço seria realizado com 2 tratores trabalhando 10 horas por dia. **39.** 16 dias.

40 Em 4 horas, 9 pessoas colhem uma quantidade de laranjas que preenche um total de 360 caixas. Quantas pessoas, que trabalham no mesmo ritmo das demais, colhem a quantidade de laranjas necessária para preencher 510 caixas em 3 horas? **40.** 17 pessoas.

41 Uma empresa foi contratada para fornecer refeições a 72 funcionários, durante 60 dias, por R$ 13 824,00. Vinte dias depois, foram contratados mais 8 funcionários. Qual é o valor do novo contrato? **41.** R$ 14 848,00

42 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado por vocês, que deve ser resolvido por meio de uma regra de três composta. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, elaborem um fluxograma cada um, representando o passo a passo para a resolução do problema aplicando a regra de três composta. Destroquem os problemas para corrigi-los e comparem seus fluxogramas. Os passos descritos para a resolução dos problemas são os mesmos? **42.** Resposta pessoal.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. a) 90 km/h 1. b) 3 horas.

1 Uma moto percorreu 225 km em 2,5 h.

- a) Qual foi a medida da velocidade média da moto, em km/h, nesse percurso?
- b) Nessa mesma velocidade, em quanto tempo essa moto percorreria 270 quilômetros?
- c) Qual é a medida do consumo médio dessa moto se, percorrendo 259 km, ela gastou 14 litros de combustível? **1. c)** 18,5 km/L

2 Caatinga (que em tupi-guarani significa "mata branca") é um bioma exclusivamente brasileiro, encontrado na Região Nordeste e em uma pequena faixa do norte do estado de Minas Gerais.

A caatinga abriga a mais povoada região semiárida do planeta. São aproximadamente 27 milhões de pessoas distribuídas em uma superfície de 844 453 km² de área. Qual é a medida da densidade demográfica aproximada da Caatinga?

2. Aproximadamente 32 hab/km².

3 Sabendo que 1 200 frangos consomem 90 kg de ração diariamente, calcule quantos quilogramas de ração 2 000 frangos consumirão por dia. **3.** 150 kg

4 Em uma exposição de equipamentos de limpeza e manutenção, foi apresentada uma máquina que, segundo o fabricante, varre, lava e enxuga uma área de 5 100 m² em 6 horas. Em iguais condições, em quantas horas a máquina executará a mesma operação em uma área medindo 11 900 m²? **4.** 14 horas.

5 Trabalhando 8 horas por dia, 3 pedreiros construíram metade de um muro em 15 dias. Como um pedreiro saiu da equipe, os outros passaram a trabalhar 9 horas por dia para terminar o serviço. No total, o muro foi construído em quanto tempo? **5.** 35 dias.

6 A reciclagem de uma latinha de alumínio economiza energia suficiente para manter um televisor ligado por três horas. Quantas latinhas recicladas são necessárias para manter um televisor ligado por um dia inteiro?

6. 8 latinhas.

7 Uma editora utilizou 6 510 kg de papel para produzir 5 000 livros de 280 páginas cada um. Se cada livro fosse reduzido a 240 páginas, qual seria a medida da massa de papel necessária para a produção de 4 000 desses livros?

7. 4.464 kg

8 (UFU-MG) As idades de um pai e seus dois filhos são diretamente proporcionais aos números 27, 14 e 11, respectivamente. Se a soma de suas idades é de 104 anos, então, as idades de cada um deles, na mesma ordem, são:

8. Alternativa **a**.

- a) 54 anos, 28 anos e 22 anos.
- b) 50 anos, 28 anos e 26 anos.
- c) 56 anos, 26 anos e 22 anos.
- d) 59 anos, 23 anos e 22 anos.
- e) 55 anos, 27 anos e 22 anos.

9 (Unifor-CE) Dividindo-se o número 204 em partes diretamente proporcionais aos números 4 e $\frac{1}{4}$, a menor das partes será: **9.** Alternativa **b**.

a) 8. b) 12. c) 34. d) 48. e) 68.

10 Uma rede de televisão fez uma pesquisa entre os habitantes de uma cidade cuja população é de 21 000 pessoas. Foram entrevistadas 7 500 pessoas, e descobriu-se que 3 000 delas assistem aos programas dessa rede. Supondo que os resultados da pesquisa sejam proporcionais aos que seriam obtidos se todos os moradores fossem entrevistados, quantas pessoas dessa cidade assistem aos programas dessa rede de televisão? **10.** 8 400 pessoas.

11 Para preservar uma área de floresta de medida equivalente a 18 campos de futebol, a cada mês 1 000 000 de pessoas deveriam usar o verso das folhas de papel. Para que a área preservada tivesse a medida equivalente à da área de pelo menos um campo de futebol, quantas pessoas deveriam usar o verso do papel?

11. 55 556 pessoas.

12 (Unifor-CE) Um texto ocupa 6 páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminui-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras (ou espaços) por linha. Nas novas condições, o número de páginas ocupadas pelo texto será: **12.** Alternativa **c**.

a) 24. b) 21. c) 18. d) 12. e) 9.

13 (UFRGS-RS) Se foram empregados 4 kg de fios para tecer 14 m de fazenda com 80 cm de largura, quantos quilogramas serão necessários para produzir 350 m de fazenda com 120 cm de largura? **13.** Alternativa **b**.

a) 130 b) 150 c) 160 d) 180 e) 250

Exercícios complementares

Com este bloco de exercícios os estudantes têm a oportunidade de revisitar os principais conceitos trabalhados neste capítulo. Verifique se eles ainda apresentam dificuldade em algum desses conceitos e, se for o caso, sugira que refaçam atividades referentes a tais assuntos.

Aproveite os **exercícios 6** e **11** para trabalhar o Tema Contemporâneo Transversal **educação ambiental**. Converse com os estudantes sobre como pequenas atitudes (a reciclagem e a reutilização de embalagens e de outros itens) podem levar a grandes mudanças em relação à conservação do meio ambiente e dos recursos naturais.

As resoluções dos **exercícios 1** a **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Verificando

Esses testes são mais uma oportunidade para o estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

No **teste 1**, lembre os estudantes das relações entre grandezas de naturezas diferentes, como a relação entre as medidas da distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la, que determina a velocidade média de um corpo.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{medida do tempo gasto}}$$

$$\text{velocidade média} = \frac{1\,500}{2{,}5} = 600$$

Portanto, a medida da velocidade média do avião é 600 km/h.

Alternativa **d**.

No **teste 2**, lembre os estudantes da relação entre o número de habitantes e a medida da área de uma região, que determina a densidade demográfica dessa região.

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{a medida da área da região}}$$

$$\text{densidade demográfica} = \frac{2\,255\,903}{11\,401} \simeq 198$$

Portanto, a medida aproximada da densidade demográfica da cidade de Manaus em 2021 é 198 hab/km².

Alternativa **c**.

Para a resolução do **teste 3**, lembre os estudantes da relação entre a massa do papel e a sua área, que determina a gramatura desse papel.

$$\text{gramatura} = \frac{\text{medida da massa do papel}}{\text{medida da área do papel}}$$

Os estudantes devem notar que as grandezas gramatura e massa, na situação em que a área do papel é mantida constante, são grandezas diretamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra também aumenta à mesma razão.

Alternativa **c**.

As resoluções dos **testes 4** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Para realizar uma viagem de São Paulo até Salvador, um avião leva 2 h 30 min. Se a medida da distância que o avião percorre nesse trajeto é de 1 500 km, qual é a medida da velocidade média do avião? **1.** Alternativa **d**.

a) 3 000 km/h
b) 750 km/h
c) 652 km/h
d) 600 km/h

2 Em 2021, a medida da área territorial da cidade de Manaus, no Amazonas, era de aproximadamente 11 401 km² e sua população estimada era de 2 255 903 habitantes. Qual era a medida aproximada da densidade demográfica da cidade em 2021? **2.** Alternativa **c**.

a) 50 hab/km²
b) 114 hab/km²
c) 198 hab/km²
d) 225 hab/km²

3 Sobre a gramatura e a massa de um papel, podemos afirmar que essas grandezas são: **3.** Alternativa **c**.

a) inversamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra aumenta na mesma razão.
b) inversamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra diminui.
c) diretamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra aumenta na mesma razão.
d) diretamente proporcionais, pois quando uma aumenta, a outra diminui na mesma razão.

4 Considere as sequências x, 9, 24 e 4, 6, y. Para que essas sequências sejam diretamente proporcionais, x e y devem ser, respectivamente, iguais a: **4.** Alternativa **d**.

a) 3 e 8.
b) 3 e 16.
c) 6 e 8.
d) 6 e 16.

5 Se dividirmos 120 em duas partes, A e B, inversamente proporcionais a 3 e a 2, respectivamente, temos que: **5.** Alternativa **a**.

a) $A = 48$ e $B = 72$.
b) $A = 24$ e $B = 72$.
c) $A = 60$ e $B = 60$.
d) $A = 12$ e $B = 36$.

6 Em uma fábrica, 14 máquinas produzem determinada quantidade de um produto em 6 horas. Em quanto tempo 24 máquinas produziriam a mesma quantidade desse produto?

a) 35 min
b) 3 h 30 min
c) 3 h 50 min
d) 10 h 30 min

6. Alternativa **b**.

7 Uma pessoa lê 20 páginas de um livro a cada 45 minutos. Quanto tempo, em hora, ela levaria para ler um livro inteiro de 300 páginas?

a) 11 h 15 min
b) 11 h 25 min
c) 2 h 22 min
d) 2 h 13 min

7. Alternativa **a**.

8 Uma empresa foi contratada para pintar todos os corredores idênticos de um condomínio de apartamentos. Sabe-se que 3 pintores levam 5 dias para pintar 5 corredores. Quantos pintores serão necessários para pintar 6 corredores em 2 dias? **8.** Alternativa **c**.

a) 3
b) 4
c) 9
d) 10

9 Um cicloviajante percorreu 450 km de bicicleta em 9 dias, pedalando 4 horas por dia. Quantos quilômetros ele teria percorrido em 5 dias se pedalasse 6 horas por dia? **9.** Alternativa **d**.

a) 540 km
b) 500 km
c) 166 km
d) 375 km

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Qual é a unidade de medida de uma razão entre duas grandezas de natureza diferentes?
b) Quando duas grandezas são diretamente proporcionais?
c) Quando duas grandezas são inversamente proporcionais?
d) Escreva um passo a passo que possa ser seguido para a resolução de um problema utilizando uma regra de três composta.
e) Quais medidas você utiliza no dia a dia ou observa em notícias e reportagens que são dadas por meio da razão entre duas grandezas diferentes?
f) Você estudou sobre o PIB *per capita* de um país. O que a expressão "*per capita*" significa?
g) Se Bryan, aos 7 anos, tinha 24 kg de medida de massa e, aos 14 anos, tinha 48 kg, podemos dizer que as grandezas idade e massa são diretamente proporcionais? Por quê?

Organizando:
a) A unidade de medida será sempre dada pela razão entre as unidades de medida das grandezas envolvidas.
b) Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.
c) Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.
d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes façam uma análise da proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.
e) Respostas possíveis: preço por litro de combustível ou de produtos, densidade demográfica, velocidade média, rendimento médio etc.
f) Significa que um valor bruto de um conjunto de dados é dividido igualmente entre o total de pessoas desse mesmo conjunto.
g) Não, pois apesar de a idade ter dobrado e a medida da massa também, isso não significa que ao triplicar, quadruplicar etc. a idade, a massa também será triplicada, quadruplicada etc.

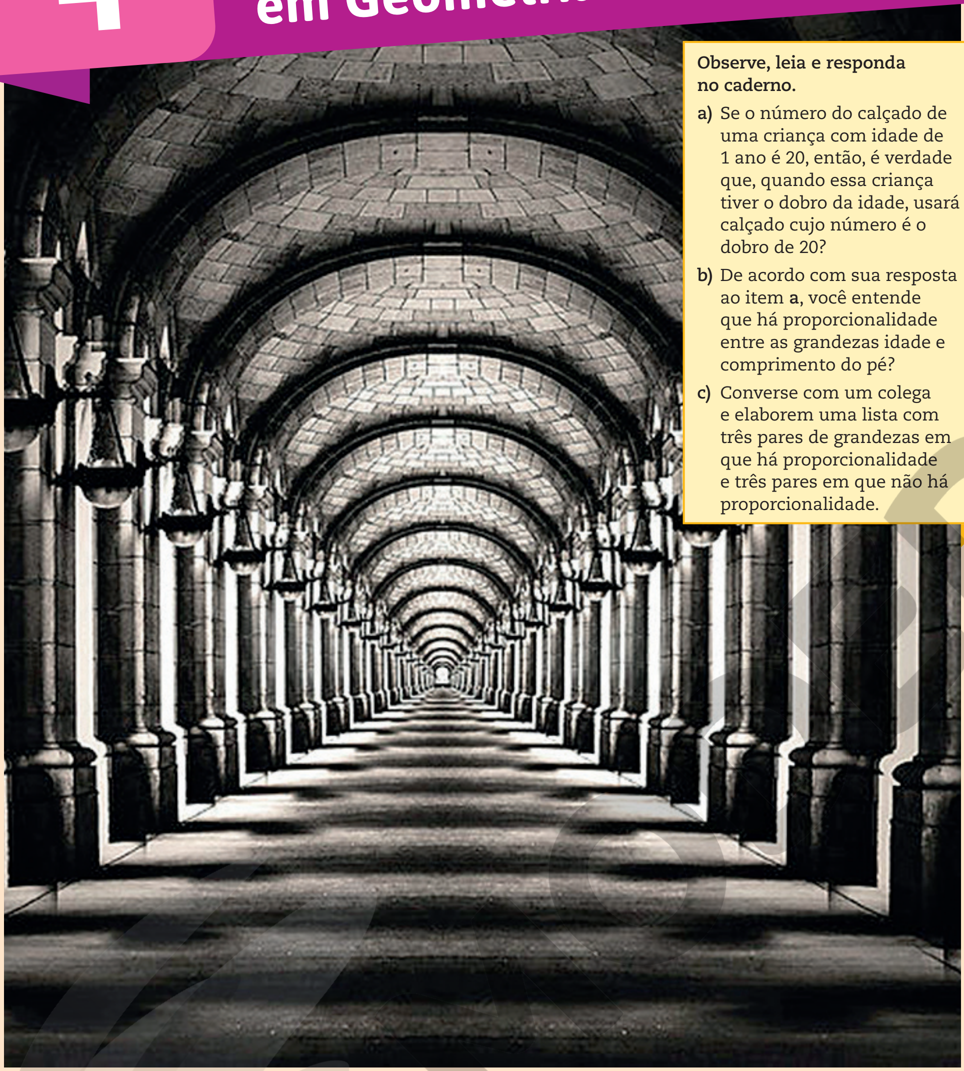
Organizando

Incentive os estudantes a organizar seus aprendizados no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais, fluxogramas ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem os conteúdos estudados no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção, é importante pedir aos estudantes que partilhem suas respostas. Essa estratégia possibilitará o compartilhamento de dúvidas e percepções sobre o conteúdo, contribuindo para o aprendizado de todos.

Capítulo

4 Proporcionalidade em Geometria



SEPEHR GHASSEMI

Observe, leia e responda no caderno.

a) Se o número do calçado de uma criança com idade de 1 ano é 20, então, é verdade que, quando essa criança tiver o dobro da idade, usará calçado cujo número é o dobro de 20?

b) De acordo com sua resposta ao item **a**, você entende que há proporcionalidade entre as grandezas idade e comprimento do pé?

c) Converse com um colega e elaborem uma lista com três pares de grandezas em que há proporcionalidade e três pares em que não há proporcionalidade.

Estação de trem em Washington D.C., Estados Unidos. (Fotografia de 2012.)

a) A frase não é verdadeira.

b) Espera-se que os estudantes entendam que não há proporcionalidade entre as grandezas idade e comprimento do pé.

Paralelas e transversais, cruzando em feixes, compõem um cenário harmonioso nas construções humanas. E a perspectiva oferece aos nossos olhos a ideia de proporcionalidade e uma representação de infinitude.

c) Resposta pessoal.

Capítulo 4 – Proporcionalidade em Geometria

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, ampliamos as noções de razão e de proporção ligadas à Geometria. As atividades buscam inicialmente familiarizar os estudantes com o assunto e depois aplicar os resultados estudados (por exemplo, o teorema de Tales) em situações contextualizadas.

A abertura usa como motivação a associação de retas paralelas e transversais a elementos de construções humanas, ressaltando a noção de proporcionalidade. Amplie a discussão apresentando outras imagens que traduzam essa ideia. É possível mostrar, por exemplo, a presença desse tipo de perspectiva em obras de arte, como nas obras *Avenue of poplars at sunset*, do pintor holândes Vincent van Gogh, ou *Le pont de l'Europe*, do francês Gustave Caillebotte. Se julgar conveniente, promova uma atividade em conjunto com Arte, para mostrar como os artistas trabalham a ideia de paralelas e transversais em suas obras. Essa integração favorece o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois os estudantes podem fruir diferentes manifestações artísticas.

Para as atividades propostas nesta abertura, espera-se que os estudantes percebam que algumas grandezas não são diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais (como a idade e o comprimento do pé, a altura de uma árvore e o tempo de crescimento, o salário e o tempo de serviço em uma empresa etc.). Além disso, podem citar e discutir grandezas que apresentam proporcionalidade, como a distância percorrida e o tempo do percurso realizado a uma velocidade constante, o custo de várias unidades de um produto em relação ao preço por unidade, a quantidade de ingredientes em uma receita comparada à quantidade de receitas que serão produzidas, entre outras situações do cotidiano deles.

1. Razão entre dois segmentos de reta

Habilidade da BNCC: **EF09MA14**.

Neste tópico, retomamos o conceito de proporção e os estudantes devem resolver e elaborar problemas efetuando diferentes operações envolvendo proporcionalidade.

Esta abordagem favorece o desenvolvimento da habilidade (EF09MA14), pois prepara os estudantes para compreender relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Retome o conceito de razão e proporção entre números e entre grandezas, mostrando a ligação entre essas duas Unidades Temáticas da Matemática: a **Geometria** e a **Álgebra**.

Inicialmente, peça aos estudantes que exponham o que entendem sobre razão e proporção. Incentive-os a trocar ideias entre si e citar exemplos. Em seguida, explore com eles as **situações 1** e **2**.

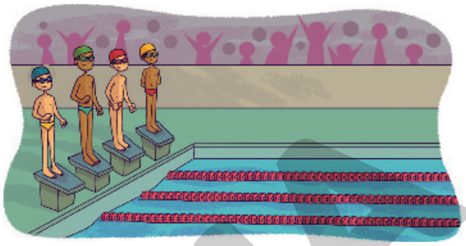
Após os estudantes lerem a **situação 1**, peça que reflitam e respondam se a quantidade de braçadas e a medida da altura são grandezas proporcionais. Espera-se que a resposta seja negativa.

1 Razão entre dois segmentos de reta

Neste capítulo, vamos retomar o conceito de razão entre dois números e o conceito de razão entre grandezas de mesma natureza, estudados anteriormente.

Considere as situações a seguir.

Situação 1



Em um campeonato de natação, na prova de 50 metros nado livre, Leo precisou dar 48 braçadas para atravessar a piscina, enquanto Márcio deu 56 braçadas.

A razão entre o número de braçadas de Leo e o número de braçadas de Márcio é dada por:

$$\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

Isso significa que 6 braçadas de Leo equivalem a 7 braçadas de Márcio.

ILUSTRAÇÕES: LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando que Leo meça 1,80 m de altura e Márcio meça 1,71 m, a razão entre as medidas de suas alturas é:

$$\frac{\text{medida da altura de Leo}}{\text{medida da altura de Márcio}} = \frac{1{,}80 \text{ m}}{1{,}71 \text{ m}} = \frac{180}{171} = \frac{20}{19}$$

- A idade de uma criança e sua altura estão sempre à mesma razão?

Espera-se que os estudantes comentem que não, pois, por exemplo, uma criança aos 3 anos tem cerca de 90 cm e aos 9 anos, cerca de 130 cm. Se estivessem sempre à mesma razão, uma criança que aos 3 anos tem 90 cm de altura, aos 9 anos teria 270 cm de altura, ou seja, 2,7 m, o que não acontece.

Agora, vamos analisar outras duas situações que tratam de razão entre dois segmentos.

Situação 2

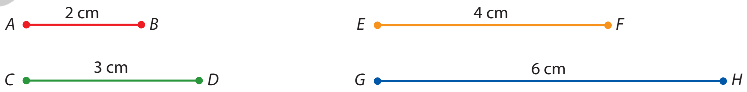
Observe os segmentos de reta a seguir.

A razão entre eles é dada pela razão entre suas medidas: $\frac{AB}{CD} = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$

A razão entre dois segmentos de reta é a razão entre suas medidas tomadas em uma mesma unidade.

Situação 3

Considere os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos calcular as razões:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{EF}{GH} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Como as razões são iguais, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais, isto é:

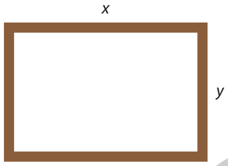
$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

> Dizemos que quatro segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são **segmentos proporcionais** quando suas medidas, tomadas na mesma unidade, formam uma proporção, isto é, quando $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

De acordo com o conceito de segmentos proporcionais, resolvemos problemas como o seguinte.

Para fazer uma tela mosquiteiro com moldura retangular cujas medidas dos comprimentos dos lados estão na razão 3 : 2 (lemos: "três para dois"), Zildo tem uma ripa que mede 5 m de comprimento.

Que medidas devem ter os pedaços da ripa serrados por Zildo, sem haver sobra?



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

Vamos representar essas medidas por x e y.

Assim, podemos escrever:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3y}{2}$$

e

$$2x + 2y = 5$$

Substituindo x por $\frac{3y}{2}$ em $2x + 2y = 5$, temos:

$$2 \cdot \frac{3y}{2} + 2y = 5$$

$$3y + 2y = 5$$

$$y = 1$$

Logo: $x = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$

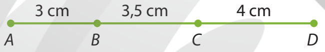
Portanto, a ripa deve ser serrada em pedaços de 1 metro e 1,5 metro.

A proporcionalidade entre segmentos é muito usada em Geometria e na vida prática. Por exemplo, para fazer a ampliação de uma fotografia, é necessário que os lados da fotografia ampliada sejam, respectivamente, proporcionais aos lados da fotografia original.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe a figura.



Considerando as medidas indicadas, determine a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; **1. a)** $\frac{3}{4}$

b) $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$; **1. b)** $\frac{13}{21}$

c) $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$; **1. c)** $\frac{2}{5}$

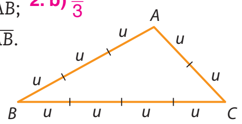
d) $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. **1. d)** $\frac{1}{3}$

2 No triângulo a seguir, determine a razão entre:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; **2. a)** $\frac{3}{4}$

b) $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$; **2. b)** $\frac{2}{3}$

c) $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$. **2. c)** $\frac{4}{3}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

Razão entre dois segmentos de reta

Peça aos estudantes que leiam a **situação 3**, verificando a proporção apresentada. Modifique as razões tomadas desses segmentos e proponha a eles que verifiquem novamente se elas formam uma proporção. Por exemplo:

- $\frac{CD}{AB}$ e $\frac{GH}{EF}$

  $\frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$ e $\frac{GH}{EF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

  Logo: $\frac{CD}{AB} = \frac{GH}{EF}$

- $\frac{EF}{AB}$ e $\frac{GH}{CD}$

  $\frac{EF}{AB} = \frac{4}{2} = 2$ e $\frac{GH}{CD} = \frac{6}{3} = 2$

  Logo: $\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD}$

- $\frac{EF}{CD}$ e $\frac{GH}{AB}$

  $\frac{EF}{CD} = \frac{4}{3}$ e $\frac{GH}{AB} = \frac{6}{2} = 3$

  Como $\frac{4}{3} \neq 3$, concluímos que as razões $\frac{EF}{AB}$ e $\frac{GH}{CD}$ não formam uma proporção.

Relembre a propriedade fundamental das proporções e apresente algumas situações para que os estudantes possam aplicá-la. Se julgar necessário, retome também a resolução de equações polinomiais do 1º grau e de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Em seguida, explore o conceito de segmentos proporcionais e a situação apresentada.

Exercícios propostos

No **exercício 1**, temos que:

a) $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{AC}{AD} = \frac{6{,}5}{10{,}5} = \frac{13}{21}$

c) $\frac{AB}{BD} = \frac{3}{7{,}5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

d) $\frac{BC}{AD} = \frac{3{,}5}{10{,}5} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

No **exercício 2**, considerando u como unidade de comprimento, temos que as medidas dos segmentos são: $AB = 3u$, $BC = 4u$ e $AC = 2u$. Assim, obtemos:

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes aplicarão o conceito de segmentos proporcionais.

As resoluções dos **exercícios 3** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 8**, após a resolução, é interessante que os estudantes substituam os valores encontrados no problema original e verifiquem se estão de acordo com as condições dadas. Apresentamos uma possível resolução.

Considerando as informações desse exercício, temos:

- $AB + BC + CD + AD = 63$ cm
- $AB = 12$ cm e $BC = 15$ cm

Como as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ formam, nessa ordem, uma proporção, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{12}{15} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = \frac{4 \cdot AD}{5}$$

$$AB + BC + CD + AD = 63 \text{ cm}$$

$$12 + 15 + \frac{4 \cdot AD}{5} + AD = 63 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot AD + 5 \cdot AD}{5} = 36 \Rightarrow$$

$$9 \cdot AD = 180 \Rightarrow AD = 20$$

Para o lado $\overline{CD}$, temos:

$$CD = \frac{4 \cdot AD}{5} \Rightarrow CD = \frac{4 \cdot 20}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = 16$$

Portanto, os outros dois lados medem 16 cm e 20 cm.

No **exercício 9**, retome o **exercício 8** e faça uma comparação entre eles com os estudantes, discutindo por que no **9** é possível chegar às respostas com menor número de informações. Espera-se que eles observem que: em um deles, temos um quadrilátero cujos lados têm diferentes medidas; no outro, o quadrilátero é um retângulo, isto é, nos garante implicitamente mais relações entre as medidas de seus lados, pois em qualquer retângulo os lados opostos têm a mesma medida.

Representando as medidas dos lados do retângulo por x e y, temos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2y}{3} \\ 2x + 2y = 1500 \Rightarrow x + y = 750 \end{cases}$$

Substituindo x por $\frac{2y}{3}$ em $x + y = 750$, obtemos:

$$\frac{2y}{3} + y = 750 \Rightarrow \frac{5y}{3} = 750 \Rightarrow y = 450$$

Logo, $x = \frac{900}{3} = 300$.

Portanto, os lados do terreno medem 300 m e 450 m.

Para a medida da área, temos: $300 \cdot 450 = 135000$

A área mede 135000 m².

3 Sendo $\overline{AB}$ um segmento de medida x, calcule essa medida nos seguintes casos:

a) $\frac{AB}{5} = \frac{14}{10}$ **3. a)** 7

b) $\frac{3,4}{AB} = \frac{12}{18}$ **3. b)** 5,1

c) $\frac{0,9}{0,5} = \frac{AB}{3,5}$ **3. c)** 6,3

d) $\frac{2,4}{3,2} = \frac{1,5}{AB}$ **3. d)** 2

4 (PUC-MG) Se o ponto M divide um segmento $\overline{AB}$ de 18 cm na razão $\frac{2}{7}$, as medidas de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são, respectivamente, em cm:

a) 4 e 14.
b) 7 e 11.
c) 8 e 10.
d) 10 e 8.
e) 14 e 4.

4. Alternativa **a**.

5 Uma fotografia foi impressa no tamanho 10 × 15 (lemos: "10 por 15"), ou seja, um lado mede 10 cm e o outro, 15 cm. Para ampliá-la de modo que o lado menor tenha 13 cm, qual deve ser a medida do lado maior? **5.** 19,5 cm

6 Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Calcule a medida de $\overline{CD}$ e $\overline{PQ}$ sabendo que $AB = 12$ cm, $MN = 15$ cm e $CD + PQ = 45$ cm.
6. $CD = 20$ cm e $PQ = 25$ cm.

7 Considere dois triângulos: o triângulo ABC, cujo lado $\overline{AB}$ mede 20 cm e a altura $\overline{CH}$ relativa a esse lado mede 18 cm; e o triângulo MNP, cujo lado $\overline{MN}$ mede 30 cm e a altura $\overline{PG}$ relativa a esse lado mede x cm.

Se $\frac{AB}{MN} = \frac{CH}{PG}$, determine:

a) o valor de x; **7. a)** $x = 27$ cm

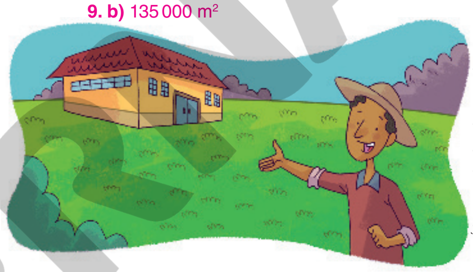
b) a medida da área do triângulo MNP.
7. b) 405 cm²

8 O perímetro de um quadrilátero $ABCD$ mede 63 cm. As medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Se $AB = 12$ cm e $BC = 15$ cm, quais são as medidas dos outros dois lados desse quadrilátero? **8.** $CD = 16$ cm e $AD = 20$ cm.

9 Hélio tem um terreno retangular cujas medidas das dimensões estão na razão 2 : 3. O perímetro desse terreno mede 1500 m. Responda às questões no caderno.

a) Quais são as medidas das dimensões desse terreno? **9. a)** 300 m × 450 m

b) Qual é a medida da área desse terreno?
9. b) 135000 m²



LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

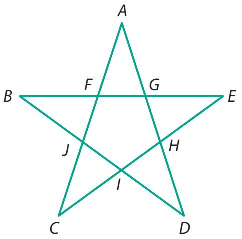
PARA SABER MAIS

Uma razão de ouro

Estudando o pentágono regular estrelado, os gregos descobriram, mais de 500 anos antes de Cristo, um número irracional determinado pelas razões entre os segmentos desse pentágono.

Na figura a seguir, por exemplo, temos:

$$\frac{AC}{AJ} = \frac{AJ}{AF} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \simeq 1,618$$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Cerca de 2000 anos depois, esse número, que já vimos representado pela letra grega fi (ϕ) e que tem infinitas casas decimais sem período, passou a ser chamado de **número áureo** ou **número de ouro**.

Observando a natureza, a arquitetura, algumas razões entre medidas do corpo humano etc., encontramos razões que se aproximam do número de ouro.

Observe o exemplo do girassol.

A estrutura central do girassol é formada por um grande número de pequenas sementes dispostas em espirais, algumas no sentido horário e outras no sentido anti-horário.

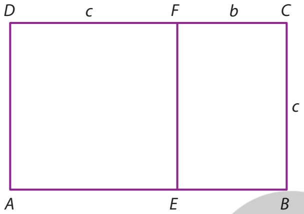
TEERASAK/SHUTTERSTOCK

A razão é dada por:

$$\frac{\text{número de espirais no sentido horário}}{\text{número de espirais no sentido anti-horário}}$$

Chamamos de **retângulo áureo** ou **retângulo de ouro** todo retângulo cuja razão entre as medidas dos lados maior e menor é o número de ouro ($\simeq 1{,}618$).

Para todo retângulo áureo, vale a seguinte propriedade: se dele retirarmos o maior quadrado possível, o retângulo restante também será um retângulo áureo, isto é, a proporção entre os lados se manterá.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Retirando do retângulo *ABCD* o quadrado *AEFD* (maior possível), obtemos o retângulo *EBCF* de modo que:

$$\frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$$

Considerando $c = 1$ em $\frac{c+b}{c}$, temos:

$$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b} \text{ ou } b^2 + b - 1 = 0$$

Chegamos a uma equação do 2º grau cuja resolução será estudada no capítulo **7**.

Resolvendo essa equação, obtemos $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como um dos valores de *b*; logo:

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \simeq 1{,}618$$

Para saber mais

Esta seção explora a razão áurea e a construção de retângulos áureos. Se possível, sugerimos desenvolver atividades utilizando *softwares* de geometria dinâmica, a fim de que os estudantes construam diferentes retângulos áureos, comparem as medidas dos lados de cada retângulo construído e verifiquem a razão entre eles.

Peça aos estudantes que, ao comparar as medidas dos lados dos retângulos construídos, identifiquem se essas medidas e se as razões obtidas são todas expressas por números racionais, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA01). Peça a eles que determinem as medidas das diagonais desses retângulos e que identifiquem se essas medidas são ou não expressas por números racionais. Os estudantes devem notar que as medidas das diagonais não são expressas por números racionais, e que as razões entre as medidas dos lados dos retângulos podem ser expressas por números racionais, mas também por números irracionais, como ocorre para os retângulos áureos, cuja razão é o número de ouro.

Para as construções no *software*, os estudantes podem considerar o valor exato do número de ouro, dado por:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para cada retângulo de ouro que os estudantes construírem com o uso do *software*, proponha que verifiquem se, se dele retirarmos o maior quadrado possível, o retângulo restante também será um retângulo áureo.

Esse tipo de atividade favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **4**, **5** e **7**, pois os estudantes precisam utilizar ferramentas digitais, exercitando a curiosidade e o espírito investigativo e, ainda, compartilhar os resultados obtidos com os colegas, argumentando e validando suas ideias.

Agora é com você!

Peça aos estudantes que, em duplas, leiam e acompanhem a construção de um retângulo áureo por meio de dobraduras (1ª maneira). Depois, eles devem realizar esse processo, reproduzindo em uma folha o retângulo dado. Se julgar conveniente, disponibilize ampliações do retângulo *ABCD* para que os estudantes façam essa atividade.

Em seguida, eles devem acompanhar a construção com régua e esquadro (2ª maneira) e, depois, efetuá-la.

Enquanto os estudantes fazem as construções, percorra a sala de aula acompanhando o trabalho das duplas e faça as intervenções necessárias, caso perceba procedimentos equivocados.

Ao final, faça novamente as construções indicadas propondo aos estudantes que indiquem cada etapa a ser feita. Alerte-os de que tanto as dobraduras quanto as construções sempre apresentam um pouco de imprecisão, com cálculo aproximado. Para minimizar esse problema, é necessário realizar as construções com a maior precisão possível.

Os estudantes podem elaborar diferentes estratégias para descobrir que as folhas de formatos A4 e carta não são retângulos áureos. Por exemplo, dobrando cada folha e extraindo o maior quadrado, para depois calcular a razão das medidas dos lados do retângulo que sobrou da folha (como indicado na 1ª maneira, com dobradura).

Para ampliar o conhecimento dos estudantes sobre o número de ouro, solicite uma pesquisa, que pode ser apresentada à turma em seminários.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe os passos a seguir e construa retângulos áureos de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: com dobradura

- Copie, em uma folha de papel em branco, o retângulo *ABCD* (figura 1).
- Recorte o retângulo e, com dobradura, obtenha o quadrado *AEFD* (figura 2).
- Recorte o quadrado (figura 3) e obtenha um novo retângulo áureo (figura 4).

Figura 1

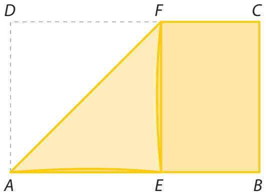


Figura 2

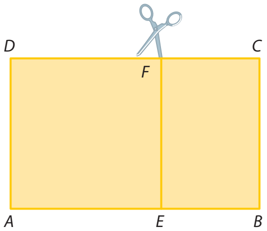


Figura 3

Figura 4

(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

2ª maneira: com régua e esquadro

- Copie novamente, em uma folha de papel em branco, o retângulo *ABCD* (figura 1).
- Trace, com o auxílio de uma régua, uma semirreta com origem em *A* que passe por *C* (figura 5). $\overline{AC}$ é uma diagonal do retângulo.
- Com o auxílio de um esquadro, trace retas perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ (ou à reta-suporte) e determine outros retângulos áureos (figura 6).

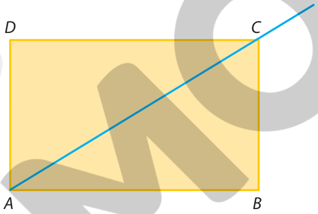


Figura 5

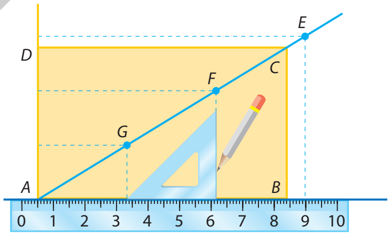


Figura 6

(A imagem não respeita as proporções reais entre os objetos.)

Com os retângulos áureos que construiu, descubra se uma folha de papel de formato A4 (21 cm por 29,7 cm) e uma de formato carta (21,59 cm por 27,94 cm) são retângulos áureos.

As folhas de formatos A4 e carta não são retângulos áureos.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2 Feixe de retas paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano (como as retas *a*, *b*, *c* e *d* da figura 1) chama-se **feixe de retas paralelas**.

Uma reta que corta um feixe de retas paralelas (como a reta *t*) é chamada de **reta transversal**.

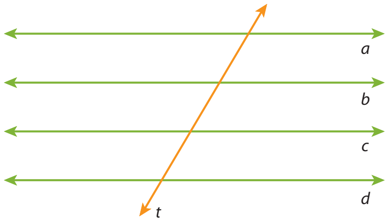


Figura 1

Considere a figura 2, com $a \parallel b \parallel c$, em que as retas *s* e *t* são transversais e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

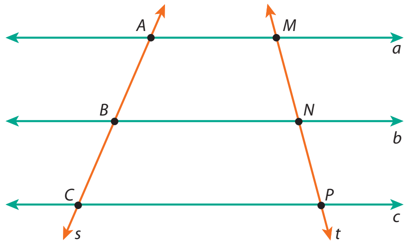


Figura 2

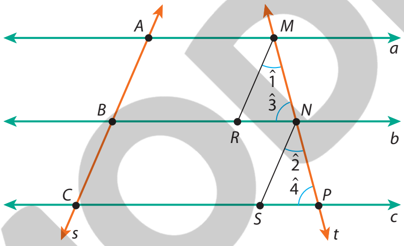
Queremos provar que $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

- **Demonstração**

Por *M* traçamos $\overline{MR} \parallel s$. Com isso, obtemos o paralelogramo *ABRM*, com $\overline{AB} \cong \overline{MR}$. ①

Por *N* traçamos $\overline{NS} \parallel s$. Assim, obtemos o paralelogramo *BCSN*, em que $\overline{BC} \cong \overline{NS}$. ②

De ① e ②, temos $\overline{MR} \cong \overline{NS}$, pois $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



Comparando os triângulos *MRN* e *NSP*, temos:

- $\overline{MR} \cong \overline{NS}$ (já provado)
- $\hat{1} \cong \hat{2}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

Assim, pelo caso LAA_o, os triângulos *MRN* e *NSP* são congruentes. Como $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são lados correspondentes em triângulos congruentes, então $\overline{MN} \cong \overline{NP}$.

Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma reta transversal, então esse feixe determina segmentos congruentes sobre qualquer outra reta transversal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Feixe de retas paralelas

Habilidades da BNCC:
EF09MA10 e **EF09MA14**.

Utilizamos, neste tópico, relações entre as medidas de ângulos formados por um feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais e a congruência de triângulos para a demonstração de proporcionalidade entre medidas de segmentos determinados nessas retas. Essa abordagem favorece o desenvolvimento das habilidades (EF09MA10) e (EF09MA14).

Retome os casos de congruência de triângulos e as relações entre ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal para que os estudantes possam aplicá-los em novas demonstrações que serão feitas.

Ressalte o fato de que as relações entre as medidas dos oito ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal somente são válidas quando essas duas retas são paralelas.

3. Teorema de Tales

Habilidade da BNCC:
EF09MA14.

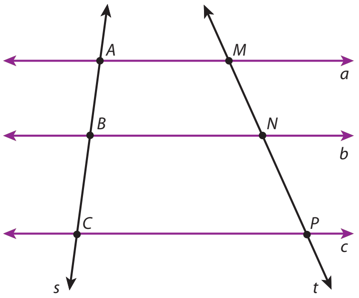
Neste tópico, apresentamos uma demonstração do teorema de Tales. As aplicações desse teorema envolvem cálculos com diferentes operações e relações de proporcionalidade determinadas em feixe de retas paralelas cortadas por transversais, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA14).

Reproduza as demonstrações apresentadas, pedindo a eles que justifiquem cada etapa.

Apresente na lousa a figura do exemplo dado e sugira aos estudantes que proponham maneiras de se obter o valor de *x*. Espera-se que indiquem a aplicação do teorema de Tales. Caso não percebam que o teorema de Tales pode ser aplicado, proponha que façam isso e verifique se consideram a proporção correta. Escolha estudantes que fizeram a resolução correta para mostrarem seu procedimento na lousa, promovendo uma discussão com toda a turma.

3 Teorema de Tales

Considere a figura a seguir, em que *a*, *b* e *c* formam um feixe de retas paralelas e as retas *s* e *t* são transversais.



Hipótese $\begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ s \text{ e } t \text{ são transversais} \end{cases}$

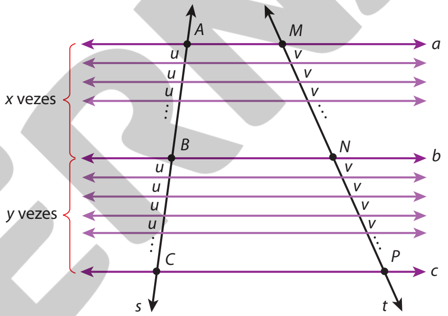
Tese $\left\{ \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \right.$

Queremos provar que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, nessa ordem, são segmentos proporcionais.

- **Demonstração**

Admitindo que exista um segmento de medida *u* que caiba *x* vezes em $\overline{AB}$ e *y* vezes em $\overline{BC}$, com *x* e *y* sendo números inteiros, temos: $AB = xu$ e $BC = yu$.

Logo: $\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu}$ ou $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ ①



Traçando pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas ao feixe, elas dividirão $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em segmentos congruentes.

Indicando por *v* a medida desses segmentos (com $v \neq 0$), temos $MN = xv$ e $NP = yv$ e, portanto:

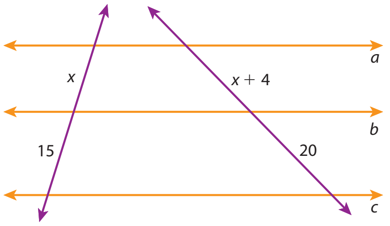
$$\frac{MN}{NP} = \frac{xv}{yv} \text{ ou } \frac{MN}{NP} = \frac{x}{y} \quad ②$$

Comparando as igualdades ① e ②, temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$

Com base nessa demonstração, podemos enunciar o **teorema de Tales**:

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Com o auxílio do teorema de Tales, vamos calcular, como exemplo, o valor de *x* desta figura, sendo $a \parallel b \parallel c$.



$$\frac{x}{15} = \frac{x + 4}{20}$$

$$20x = 15(x + 4)$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x = 12$

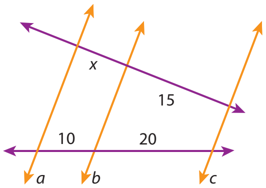
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

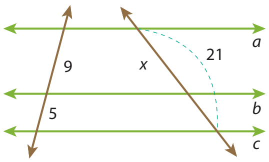
10 Sendo *a* // *b* // *c*, calcule o valor de *x*.

a)



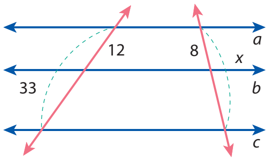
10. a) $x = 7,5$

b)



10. b) $x = 13,5$

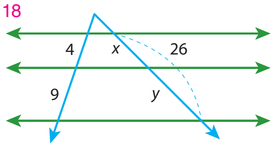
c)



10. c) $x = 22$

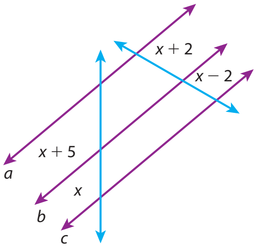
11 Determine os valores de *x* e de *y* nos seguintes feixes de paralelas:

11. $x = 8$ e $y = 18$

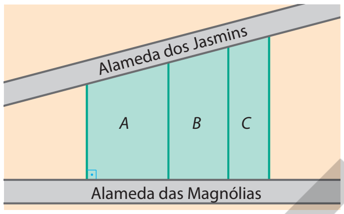


12 Três retas paralelas determinam sobre uma transversal segmentos medindo 4,2 cm e 5,4 cm. Calcule a medida do maior segmento que o feixe determina sobre outra transversal, sabendo que o segmento menor mede 6,3 cm. **12.** 14,4 cm

13 Sendo *a* // *b* // *c*, calcule o valor de *x* aplicando o teorema de Tales. **13.** $x = 10$



14 A figura a seguir representa um terreno com frente para duas alamedas. A frente para a alameda das Magnólias mede 90 m, e a frente para a alameda dos Jasmins, 135 m.



O proprietário do terreno resolveu dividi-lo em três lotes menores, traçando sobre ele duas paralelas perpendiculares à alameda das Magnólias. O terreno A ficou com 40 m de frente para essa alameda, e o terreno B, com 30 m de frente para a mesma alameda. Com base nessas informações, responda.

a) Quanto mede a frente do terreno C para a alameda das Magnólias? **14. a)** 20 m

b) Quanto medem as frentes dos três terrenos para a alameda dos Jasmins?

14. b) Terreno *A*: 60 m; terreno *B*: 45 m; terreno *C*: 30 m.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

PARA SABER MAIS

Um pouco da história de Tales

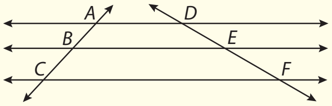
Para tratar de semelhança, é imprescindível retomar os estudos do filósofo e matemático grego Tales de Mileto (cerca de 624-547 a.C.), cujo nome está associado ao seguinte teorema:

Se um feixe de retas paralelas é intersectado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas retas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 10**, **11**, **13** e **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Caso observe que os estudantes estão com dificuldade em resolver o **exercício 12**, peça a eles que façam o esboço da situação para evidenciar as relações existentes.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando $AB = 4,2$ cm, $BC = 5,4$ cm, teremos que $DE = 6,3$ cm e que o maior segmento determinado pelas três paralelas é o segmento $\overline{DF}$. Para calcular a medida desse segmento, os estudantes deverão determinar, inicialmente, a medida do segmento $\overline{EF}$, usando a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{4,2}{5,4} = \frac{6,3}{x}$$

$$x = \frac{6,3 \cdot 5,4}{4,2} = \frac{34,02}{4,2}$$

$$x = 8,1$$

Como $EF = 8,1$ cm, $DF = 14,4$ cm.

O **exercício 14** traz uma boa oportunidade para comentar com os estudantes a expressão “ruas paralelas” em situações nas quais essas ruas não são, necessariamente, paralelas, pois a distância entre elas nem sempre é constante. Esse paralelismo só é mais preciso em cidades planejadas, nas quais as ruas foram construídas em conjunto e não apenas de acordo com o crescimento urbano. Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre cidades planejadas, integrando a atividade com o componente curricular Geografia.

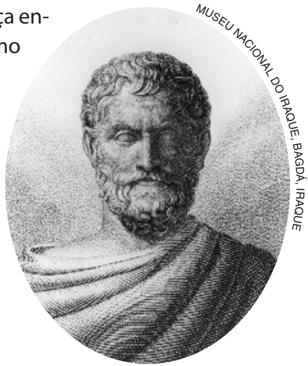
Para saber mais

Proponha uma leitura em voz alta, com alternância de leitores, um por parágrafo.

É importante os estudantes situarem pensamentos e pensadores na linha do tempo e na localização geográfica. No entanto, devem considerar que fatos, ideias e produção de conhecimento nem sempre têm sua origem bem determinada e uma localização hegemônica. Partes de um conceito podem ser desenvolvidas em diferentes épocas e lugares até que o conceito ganhe sentido e completude. Por vezes, as autorias não correspondem ao que acabou ficando registrado nos anais da história.

Explique aos estudantes que o teorema de Tales é base para outro importante assunto do estudo de Geometria: a semelhança de triângulos, que embasa o estudo de Trigonometria. Esses temas serão apresentados adiante ainda neste livro e de modo mais aprofundado no Ensino Médio.

Esse teorema, que provém diretamente da ideia de semelhança entre triângulos, que você estudará no capítulo **5**, é conhecido como **teorema de Tales**.


MUSEU NACIONAL DO IRAQUE, BAGDÁ, IRAQUE

Gravura de Tales de Mileto produzida no século XIX.

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro filósofo e geômetra da Grécia conhecido e o primeiro de seus sábios. Acredita-se também que tenha sido o criador da Geometria demonstrativa.

Nenhum escrito de Tales chegou até nós, o que dificulta determinar precisamente suas ideias e suas descobertas matemáticas. Muito do que sabemos a respeito dele vem do chamado *Sumário eudemiano*, escrito pelo matemático, filósofo e comentarista grego Proclus (411-485 d.C.).

Essa obra é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides e é, ainda hoje, o principal registro histórico do início dessa ciência na Grécia.

Muitos dos conhecimentos de Tales resultaram de viagens que ele empreendeu, especialmente ao Egito. Tales morou por um tempo no Egito, onde teria aprendido Geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicado a semelhança de triângulos.

Segundo o *Sumário eudemiano*, Tales introduziu a Geometria na Grécia após essas viagens. Utilizando metodologias gerais e empíricas, o filósofo grego descobriu muitas proposições, algumas delas envolvendo semelhança.

Além de Proclus, outras fontes fazem menção a Tales. O grego Eudemo de Rodes (350-290 a.C.), primeiro grande historiador da Matemática, por exemplo, afirma que Tales mediu a distância de uma torre a um navio.

Hierônimo, um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), afirmou que Tales teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, por meio da observação e da comparação da própria sombra com a sombra da pirâmide. Tales teria chegado à conclusão de que, quando sua sombra tivesse o mesmo comprimento de sua altura, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento da altura dela.

O matemático e filósofo grego Plutarco (cerca de 46-119 d.C.) também o menciona em sua obra, ao dizer que Tales mediu a altura da pirâmide fincando verticalmente uma vara no chão e comparando as razões entre os dois triângulos formados.

Com base nesses relatos, percebemos que as ideias de proporcionalidade e de semelhança, em particular entre triângulos, estão estreitamente associadas ao nome de Tales. Adicionando a isso a grande importância que a Arquitetura e a Agrimensura tiveram no Egito antigo, bem como o fato de ele ter sido o fundador da Geometria demonstrativa na Grécia e quem primeiro organizou a Matemática dedutiva, é razoável a hipótese de que a primeira sistematização da Geometria tenha ocorrido na época de Tales.

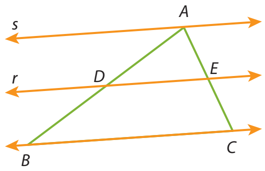

STOCKBYMALAMY/FOTOARENA

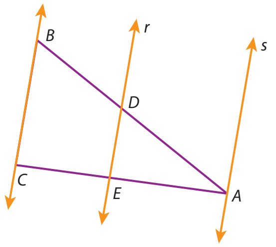
Pirâmides de Gizé no Egito. (Fotografia de 2021.)

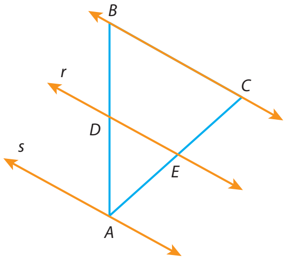
Consequências do teorema de Tales

1ª consequência

Observe os triângulos *ABC* sobre os quais foram traçadas as retas *r* (qualquer) e *s*, que passa pelo vértice *A*; ambas as retas são paralelas à reta $\overleftrightarrow{BC}$.





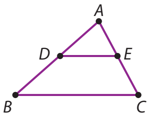


Pelo teorema de Tales, nos três casos, temos: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Podemos expressar essa consequência do teorema de Tales do seguinte modo:

> Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

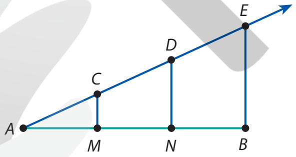
Observe que a recíproca desse teorema é verdadeira: se no triângulo *ABC* vale a relação $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, então $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Acompanhe um exemplo de aplicação dessa propriedade.

Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais.

Pelo ponto *A*, traçamos uma semirreta oblíqua a $\overline{AB}$ sobre a qual, a partir de *A*, marcamos os pontos *C*, *D* e *E*, de modo que $AC = CD = DE$, e traçamos o segmento $\overline{BE}$. Pelos pontos *C* e *D*, com o auxílio de uma régua e de um esquadro, traçamos paralelas a $\overline{BE}$. Como $AC = CD = DE$, então $AM = MN = NB$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Consequências do teorema de Tales

Comente com os estudantes que algumas propriedades relativas a segmentos proporcionais em figuras geométricas decorrem do teorema de Tales. Aqui veremos como 1ª consequência desse teorema uma propriedade que envolve triângulos.

A determinação de novas propriedades com base em teoremas (ou propriedades) já demonstrados é a base para novas demonstrações matemáticas em Geometria (e em outras áreas da Matemática), pois com elas é possível comprovar novas teorias e proposições e, assim, avançar no conhecimento matemático, ferramenta para tantas áreas do conhecimento.

Exercícios propostos

As resoluções e comentários dos **exercícios 15** a **19** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

O **exercício 16** tem foco diferente daquele do **exercício 15**, pois exige uma compreensão maior da propriedade demonstrada, visto que não é uma aplicação direta. Estimule a troca de ideias entre os estudantes sobre que estratégia podem usar e qual a justificativa encontrada.

Eles devem perceber que podem considerar as razões entre os segmentos de um mesmo lado de cada triângulo, na mesma ordem, e verificar se essas frações são equivalentes, ou seja, se elas formam uma proporção. Se formarem uma proporção, os segmentos considerados são proporcionais, o que nos possibilita concluir que os segmentos $\overline{NM}$ e $\overline{GF}$ são paralelos; caso contrário, se as razões obtidas não forem iguais, os segmentos considerados não são proporcionais, logo os segmentos $\overline{NM}$ e $\overline{GF}$ não são paralelos.

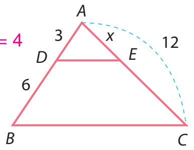
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

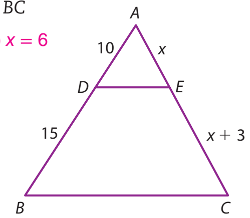
a) $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$

15. a) $x = 4$



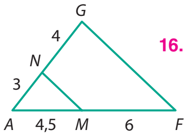
b) $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$

15. b) $x = 6$



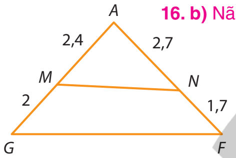
16 Verifique, em cada caso, se o segmento $\overline{NM}$ é paralelo ao lado $\overline{GF}$ do triângulo. Justifique sua resposta.

a)



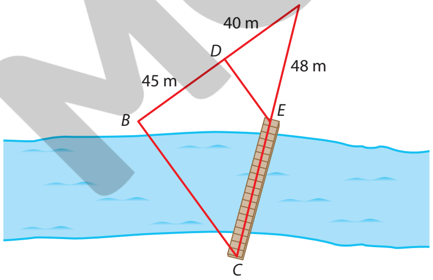
16. a) Sim, pois $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6}$.

b)



16. b) Não, pois $\frac{2,4}{2} \neq \frac{2,7}{1,7}$.

17 Para calcular a medida do comprimento da ponte a ser construída, um engenheiro elaborou o esquema a seguir, em que o segmento $\overline{CE}$ representa a ponte. Sabe-se que $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Calcule a medida do comprimento dessa ponte. **17.** 54 m



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

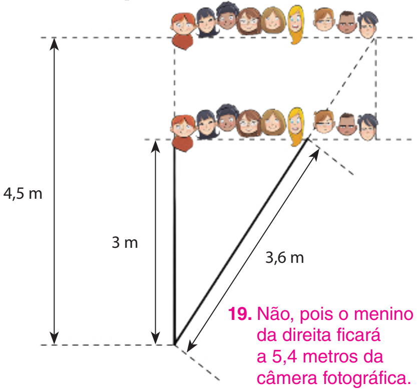
18 Na planta a seguir, as ruas Colibri, Pardal e Canário são paralelas. Determine as medidas das distâncias x e y. **18.** $x = 80$ m e $y = 100$ m.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

19 É hora de fazer o retrato da turma, e todos querem aparecer. Ana, a primeira menina da esquerda, está a 3 metros da câmera; Bete, a última da direita, está a 3,6 metros. Nessa disposição, todas as meninas ficam enquadradas, mas os meninos, não.

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

Então, o fotógrafo pediu a todos que se afastassem, mantendo a mesma posição na fila, de modo que Ana ficasse distante 4,5 metros. Observe o esquema.



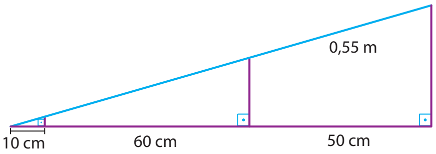
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

19. Não, pois o menino da direita ficará a 5,4 metros da câmera fotográfica.

Sabendo que essa câmera fotográfica mantém uma boa resolução até 5,5 metros, a imagem do menino da direita ficará prejudicada?

20 O proprietário de uma loja, preocupado em oferecer a seus clientes um acesso mais seguro e confortável, vai construir uma rampa ao lado dos degraus da escada da entrada da loja.

Para a construção dessa rampa, deverão ser instaladas três vigas de sustentação: uma a 10 cm do início, outra a 60 cm da primeira e a terceira a 50 cm desta última. Observando o esboço feito pelo dono da loja, determine o comprimento, em metro, da rampa que está destacada em azul. **20.** 1,32 m



21 *Hora de criar* – Em dupla, cada um cria um problema sobre aplicação do teorema de Tales. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **21.** Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

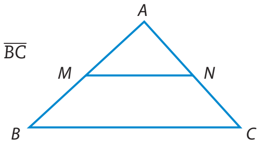
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1 Em um triângulo ABC, foi traçado um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$ pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$.

Esse segmento tem o outro extremo no lado $\overline{AC}$, no ponto N.

Provem que N é ponto médio de $\overline{AC}$. *Pense mais um pouco...:* **1.** Demonstração.



2 Aprendam a dividir um segmento qualquer em 5 partes iguais sem usar a escala da régua.

No caderno, façam os seguintes passos: **2.** Construção de figura.

- tracem um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{AC}$, de modo que B não pertença à reta $\overleftrightarrow{AC}$;
- com um compasso, marquem os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 em $\overrightarrow{AC}$, de maneira que $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$;
- tracem a reta $\overleftrightarrow{P_5B}$;
- com o esquadro deslizando ao lado da régua, tracem, por P_4, P_3, P_2 e P_1, paralelas a $\overleftrightarrow{P_5B}$ que cortem $\overline{AB}$ nos pontos Q_4, Q_3, Q_2, Q_1;
- verifiquem com o compasso que $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4B$.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

3 Justifiquem a construção realizada na atividade anterior.

3. Foi construído um feixe de retas paralelas, cortado por dois segmentos transversais $\left(\overline{AP_5}\text{ e }\overline{AB}\right)$. Como o feixe divide o segmento $\overline{AP_5}$ em partes de medidas iguais, pelo teorema de Tales o feixe também divide o segmento $\overline{AB}$ em partes iguais.

PARA SABER MAIS

Rumo ao teorema das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo

Vamos provar o seguinte teorema:

> Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos alternos internos congruentes.

$$\text{Hipótese}\begin{cases} r \parallel s \\ t \text{ é transversal} \\ \hat{a} \text{ e } \hat{b} \text{ são ângulos alternos internos} \end{cases} \qquad \text{Tese}\left\{\hat{a} \cong \hat{b}\right.$$

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 20** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Ao resolver o **exercício 20**, os estudantes poderão interpretar uma situação bastante comum e importante nas cidades brasileiras: a adaptação de construções para o deslocamento de pessoas que apresentam dificuldades de locomoção, como as que utilizam cadeiras de rodas.

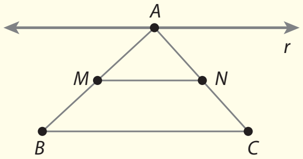
Nesse contexto, solicite aos estudantes que identifiquem locais conhecidos onde essa adaptação já tenha sido realizada e outros onde ela seja fundamental para garantir a acessibilidade. Um dos locais que podem ser observados é a própria escola, criando oportunidade para uma discussão sobre o exercício da cidadania e os direitos do cidadão.

No **exercício 20**, incentive os estudantes a explorar contextos reais, como a construção de rampas de acesso, situações envolvendo a construção civil, determinação de alturas inacessíveis com base no comprimento da sombra, entre outros.

Pense mais um pouco...

Apresentamos a seguir a demonstração solicitada na **atividade 1**.

Considere o triângulo ABC e o ponto médio M de $\overline{AB}$.

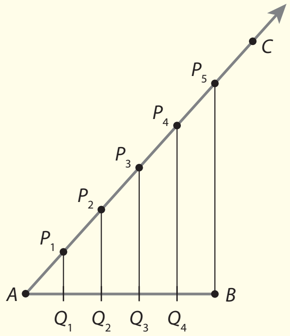


FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Por A, traçamos a reta r paralela a $\overline{BC}$; e por M, o segmento $\overline{MN}$, também paralelo a $\overline{BC}$. Pelo teorema de Tales, temos $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, $AM = MB$, temos $\frac{AM}{MB} = 1$.

Logo, $\frac{AN}{NC} = 1$, o que mostra que N é ponto médio de $\overline{AC}$.

Na **atividade 2**, seguindo as instruções do texto, temos a figura:



WLAMIR MIASIRO ARQUIVO DA EDITORA

Fazendo a verificação com o compasso, confirmamos que:
$AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4B$

Para saber mais

Esta seção explora a demonstração de que ângulos alternos internos determinados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal são congruentes.

O **item b** do **Agora é com você!** é base para a demonstração do teorema das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, que é a 2ª consequência do teorema de Tales.

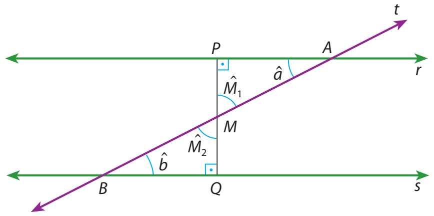
A seguir, apresentamos uma resolução para os itens propostos.

a) Como $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, que mede 82°, temos que $m = n = 41°$. Como as retas $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são paralelas cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AC}$, temos que n e q são medidas de ângulos alternos internos em retas paralelas, ou seja, $q = n = 41°$. Considerando agora a reta $\overleftrightarrow{BE}$, transversal dessas mesmas retas paralelas, temos que p e m são medidas de ângulos correspondentes em retas paralelas (que são congruentes), isto é, $p = m = 41°$.

b) O triângulo ACE tem os ângulos internos de medidas q e p congruentes, pois $q = p = 41°$. Assim, o triângulo ACE é isósceles, pois tem os ângulos da base congruentes.

- **Demonstração**

Construção auxiliar: pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$, traçamos o segmento $\overline{PQ}$, perpendicular às retas r e s.



Comparando os triângulos AMP e BMQ, temos:

1. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (M é ponto médio)

2. $\widehat{M}_1 \cong \widehat{M}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)

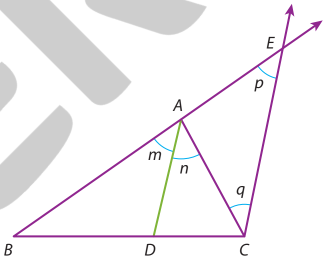
3. $\hat{P} \cong \hat{Q}$ (ângulos retos)

Logo, pelo caso LAA$_o$, os triângulos AMP e BMQ são congruentes. Portanto, $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Agora é com você! **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Observe a figura, em que:

- $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo ABC;
- $\overleftrightarrow{CE} \,/\!/\, \overleftrightarrow{AD}$;
- $m(B\hat{A}C) = 82°$.



a) Calcule o valor de m, n, p e q. **a)** $m = 41°$; $n = 41°$; $p = 41°$; $q = 41°$.

b) Mostre que o triângulo ACE é isósceles.

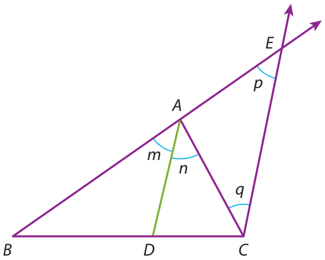
b) Como $p = q$, o triângulo ACE é isósceles.

2ª consequência

Considere o triângulo ABC e a bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao ângulo $\hat{A}$. Traçamos pelo vértice C uma semirreta paralela a $\overline{AD}$, que cruza a semirreta $\overrightarrow{BA}$ em um ponto que chamamos de E.

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dessa maneira:

- $p = m$ (medidas de ângulos correspondentes em retas paralelas)
- $m = n$ ($\overline{AD}$ é bissetriz)
- $n = q$ (medidas de ângulos alternos internos em retas paralelas)

Concluímos, então, que $p = q$.

Logo, o triângulo CAE é isósceles. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.

Substituindo AE por AC em $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE}$, temos: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

> A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

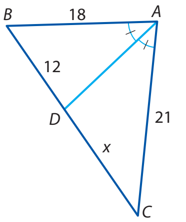
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Calcule x nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{A}$.

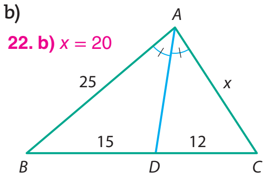
a)

22. a) $x = 14$



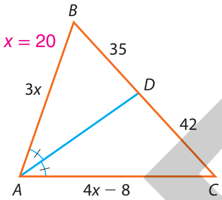
b)

22. b) $x = 20$



c)

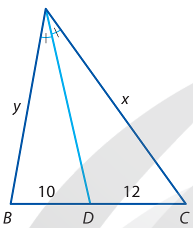
22. c) $x = 20$



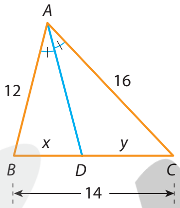
23 Calcule x e y nos triângulos, sabendo que $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo $\widehat{A}$.

a) $x + y = 55$

23. a) $x = 30$ e $y = 25$.

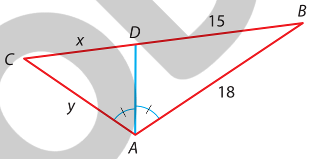


b)



23. b) $x = 6$ e $y = 8$.

c) $x + y = 22$ **23. c)** $x = 10$ e $y = 12$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

24 Com o auxílio de uma régua, construa um triângulo ABC, em que $AB = 4{,}8$ cm, $AC = 7{,}2$ cm e $BC = 8$ cm. Usando régua e compasso, trace a bissetriz $\overline{AD}$. Calcule BD e DC e, depois, verifique os valores obtidos, medindo com a régua a figura construída. **24.** $BD = 3{,}2$ cm e $DC = 4{,}8$ cm.

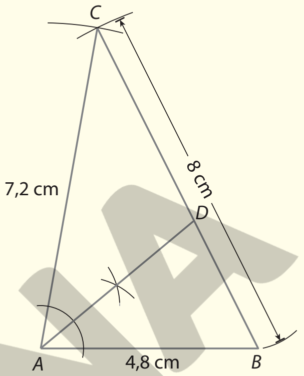
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

25 Considere um triângulo ABC. A bissetriz $\overline{AD}$ determina sobre $\overline{BC}$ dois segmentos, $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, de medidas 2 cm e 2,4 cm, respectivamente. Sabendo que $AB = 5$ cm, determine AC. **25.** $AC = 6$ cm

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 22**, **23** e **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 24**, espera-se que os estudantes construam uma figura parecida com a que segue, resolvendo o exercício.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, teremos:

$BD + DC = 8$

$BD = 8 - DC$

$\frac{4{,}8}{BD} = \frac{7{,}2}{DC}$

Substituindo $BD = 8 - DC$ em $\frac{4{,}8}{BD} = \frac{7{,}2}{DC}$, teremos a medida DC, em centímetro:

$$\frac{4{,}8}{8 - DC} = \frac{7{,}2}{DC}$$

$4{,}8 \cdot DC = 57{,}6 - 7{,}2 \cdot DC$

$12 \cdot DC = 57{,}6 \Rightarrow DC = 4{,}8$

Voltando à primeira equação, encontraremos a medida BD, em centímetro:

$BD = 8 - DC$

$BD = 8 - 4{,}8 = 3{,}2$

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC:
EF09MA22.

Para esta seção, sugerimos solicitar aos estudantes que pesquisem, previamente, sobre o Índice de Vulnerabilidade Social (IVS). Para desenvolver a habilidade (EF09MA22), solicite a eles que pesquisem o IVS do município em que residem, da região e dos principais municípios do estado em que residem. Em seguida, eles podem definir que tipo de gráfico é melhor para representar os dados obtidos e, se possível, utilizar planilhas eletrônicas para obter gráficos com as informações. Esse trabalho inicial também favorece o desenvolvimento das **competências gerais 4** e **5**, pois os estudantes precisam mobilizar os conhecimentos e comunicá-los por meio de diferentes linguagens e, ainda, utilizar tecnologias digitais para compreender situações de diferentes práticas sociais.

Após esse trabalho, pode-se incentivar os estudantes a debater com os colegas qual seria o melhor tipo de gráfico para representar o IVS de todos os municípios brasileiros. Espera-se que eles percebam que, apesar de ser possível representar por meio de um gráfico de colunas, por exemplo, por serem muitos os municípios brasileiros, o gráfico de colunas ou de barras não comunicaria com eficiência. Nesse contexto, incentive-os a conversar sobre o uso de outros tipos de comunicação gráfica, como o cartograma.

Sugestão de leitura

Para ampliar a discussão com os estudantes sobre esse tema, sugerimos:

http://ivs.ipea.gov.br/index.php/pt/sobre. Acesso em: 14 jun. 2022.

Nesse *site*, há informações e explicações sobre o IVS e esse índice pode ser consultado de diferentes maneiras, para diversas localidades do Brasil.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Cartograma do Índice de Vulnerabilidade Social (IVS)

No dicionário, o verbete **cartograma** é definido como:

> **Cartograma**
> ■ substantivo masculino
> quadro ou mapa em que se representa graficamente, por meio de linhas e figuras, a ocorrência quantitativa ou a intensidade de diversos fenômenos (índices de natalidade, distribuição de populações etc.)

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. (ed.). Cartograma. *In*: **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

Com a produção de informações cada vez mais crescente e diversificada, a alfabetização de uma pessoa não está mais restrita a textos. Atualmente, é necessário nos alfabetizarmos em linguagens diversas. A alfabetização cartográfica, por exemplo, aprender a ler e interpretar mapas, como os cartogramas, também é muito importante.

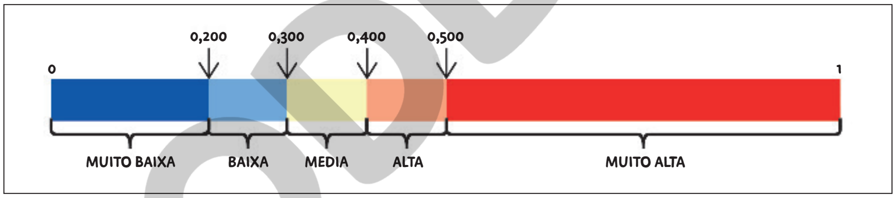
Vamos analisar o tema vulnerabilidade social por meio da comparação de cartogramas elaborados pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) com dados do IBGE de 2000 e de 2010.

O Índice de Vulnerabilidade Social (IVS)

[...] O Índice de Vulnerabilidade Social (IVS), construído a partir de indicadores do *Atlas do Desenvolvimento Humano* (ADH) no Brasil, procura dar destaque a diferentes situações indicativas de exclusão e vulnerabilidade social no território brasileiro, em uma perspectiva que vai além da identificação da pobreza entendida apenas como insuficiência de recursos monetários. [...]

Como ler o IVS

O IVS é um índice que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo a 1, maior é a vulnerabilidade social de um município. [...]



AUTORIA COLETIVA/IPEA

Como é construído o IVS

O IVS é o resultado da média aritmética dos subíndices: IVS Infraestrutura Urbana [saneamento básico e mobilidade urbana], IVS Capital Humano [saúde e educação] e IVS Renda e Trabalho [renda domiciliar *per capita*, desocupação de adultos, trabalho infantil], cada um deles entra no cálculo do IVS final com o mesmo peso. [...]

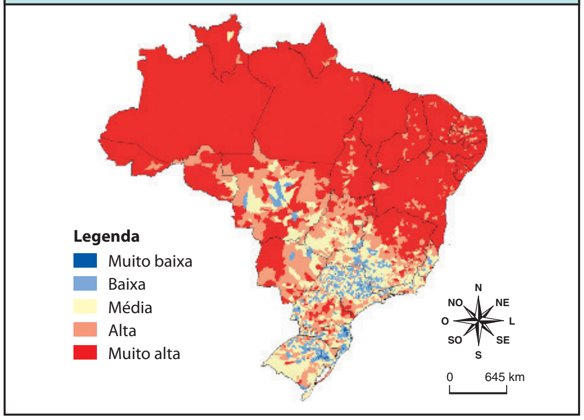
O IVS no Brasil

Em 2000, o Brasil apresentava IVS igual a 0,446. Este valor indica que o país encontrava-se na faixa da alta vulnerabilidade social. Passados dez anos, a vulnerabilidade social é reduzida a 0,326, trazendo o país para a faixa do médio IVS, em um avanço equivalente a 27% em direção a níveis mais baixos de vulnerabilidade social [...].

Fonte: IPEA. **Atlas da vulnerabilidade social nos municípios brasileiros**. Brasília, DF: Ipea, 2015. Disponível em: http://ivs.ipea.gov.br/images/publicacoes/Ivs/publicacao_atlas_ivs.pdf. Acesso em: 28 mar. 2022.

Observe a seguir os cartogramas que mostram a distribuição espacial do Índice de Vulnerabilidade Social (IVS) para os municípios brasileiros nos anos de 2000 e 2010.

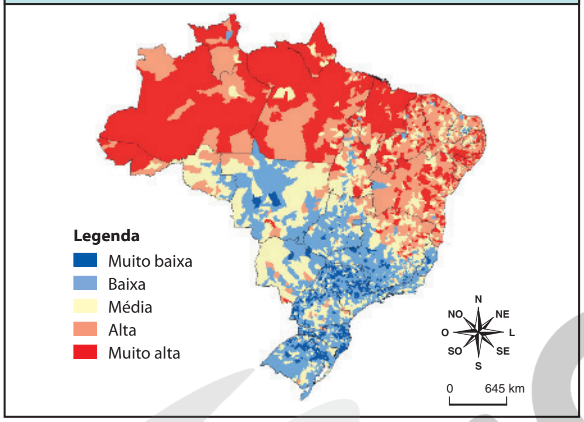
Vulnerabilidade social de acordo com o IVS (2000)



AUTORIA COLETIVA/IPEA/ ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: IPEA. **Atlas da vulnerabilidade social nos municípios brasileiros**. Brasília, DF: Ipea, 2015. Disponível em: http://ivs.ipea.gov.br/images/publicacoes/Ivs/publicacao_atlas_ivs.pdf. Acesso em: 28 mar. 2022.

Vulnerabilidade social de acordo com o IVS (2010)



AUTORIA COLETIVA/IPEA/ ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: IPEA. **Atlas da vulnerabilidade social nos municípios brasileiros**. Brasília, DF: Ipea, 2015. Disponível em: http://ivs.ipea.gov.br/images/publicacoes/Ivs/publicacao_atlas_ivs.pdf. Acesso em: 28 mar. 2022.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe os dois cartogramas, analise com atenção suas legendas e identifique pela cor a situação de cada região. Em seguida, identifique a localização aproximada do município em que você vive em cada cartograma. Respostas pessoais.

a) Em que situação ele se classificava em 2000? E em 2010?

b) Atualmente, quais são os maiores problemas do município em que você vive que podem fazer com que o índice de vulnerabilidade social aumente?

c) Discuta com os colegas o que poderia ser feito para resolver os problemas relacionados a situações de vulnerabilidade social no município em que vocês vivem.

Agora quem trabalha é você!

Auxilie os estudantes no trabalho de localização do munícipio onde moram nos cartogramas e em uma pesquisa que possa ajudá-los nas respostas aos demais itens. Amplie o trabalho de leitura fornecendo outros cartogramas para análise.

Solicite que, em grupos de três ou quatro estudantes, pesquisem e listem aqueles que consideram os cinco maiores problemas atuais do município em que vivem e os confrontem com os de 2010 (estes podem ser identificados pelos adultos com quem residem). Eles devem discutir e elaborar propostas de possíveis soluções aos problemas atuais relacionados a situações de vulnerabilidade social, determinando quais seriam os agentes (poder público, setor privado, instituições públicas ou privadas, população) responsáveis pela execução dessas propostas. Com essa atividade trabalha-se o Tema Contemporâneo Transversal **cidadania e civismo**.

Agende o horário de uma aula para que os grupos exponham o resultado de suas pesquisas e verifiquem quais são as dúvidas e questionamentos mais comuns.

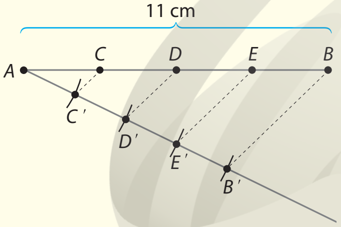
Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 1** a **3**, do **exercício 5** e dos **exercícios 7** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Este bloco de exercícios propicia aos estudantes revisitar os temas desenvolvidos no capítulo, ampliando e solidificando os conhecimentos que construíram. Além disso, eles podem verificar as dúvidas que ainda persistam e saná-las com o auxílio do professor e dos colegas.

Para o **exercício 4**, uma possível construção é:

- Desenhamos primeiro um segmento de reta ($\overline{AB}$) de 11 cm (com o auxílio de uma régua) e traçamos uma semirreta de origem na extremidade A desse segmento, que não esteja contida na reta $\overleftrightarrow{AB}$. Depois, marcamos com o compasso quatro pontos (C', D', E', B') nessa semirreta (a partir de sua origem), de modo que se tenha: $AC' = C'D' = D'E' = E'B'$.
- Traçamos o segmento $\overline{B'B}$ e, por C', D' e E', traçamos segmentos paralelos a $\overline{B'B}$ com o outro extremo em $\overline{AB}$ (com o auxílio de régua e esquadro, sem usar a graduação dos instrumentos), obtendo assim os pontos C, D e E, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes iguais: $AC = CD = DE = EB$
- Uma figura que podemos obter dessa maneira é:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Na resolução do **exercício 6**, é importante verificar se os estudantes interpretaram adequadamente a informação "o lado do quadradinho do quadriculado como unidade de medida", pois apenas com base nessa informação eles podem saber que $AD = 4$ e $BD = 3$ e, assim, usar as relações existentes para chegar à medida EC, ou seja, o valor de x:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow$$

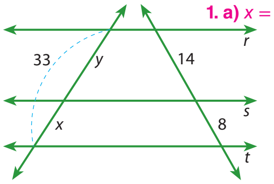
$$\Rightarrow 4x = 15 \Rightarrow x = 3{,}75$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

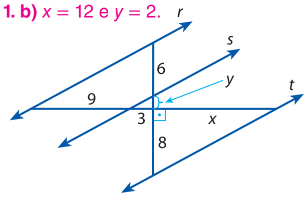
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sendo r // s // t, calcule x e y.

a) **1. a)** $x = 12$ e $y = 21$.

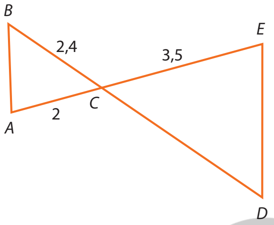


b) **1. b)** $x = 12$ e $y = 2$.

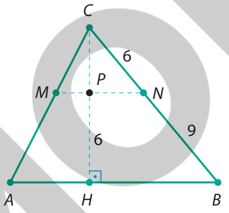


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2 Calcule a medida de $\overline{BD}$ na figura, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. **2.** $BD = 6{,}6$



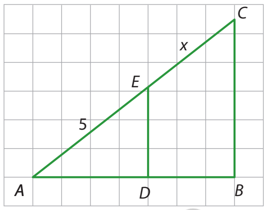
3 Calcule a medida da altura $\overline{CH}$, relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$. **3.** $CH = 10$



4 Construa um segmento de 11 cm e divida-o em quatro partes iguais sem usar a escala da régua. **4.** Construção de figura.

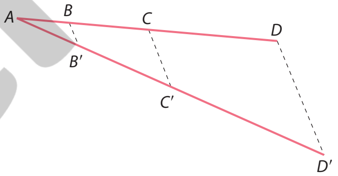
5 As medidas dos lados de um $\triangle ABC$ são: $AB = 21$ cm, $AC = 18$ cm e $BC = 26$ cm. Calcule as medidas dos segmentos determinados no lado $\overline{BC}$ pela bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. **5.** 14 cm e 12 cm.

6 Na figura, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Considerando o lado do quadradinho do quadriculado como unidade de medida, calcule o valor de x. **6.** $x = 3{,}75$

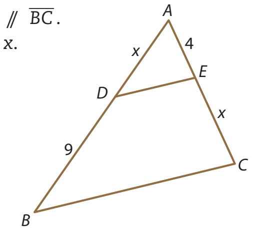


7 A bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$ determina sobre o lado $\overline{BC}$ segmentos de 15 cm e 20 cm. Sabendo que a medida do perímetro do $\triangle ABC$ é 84 cm, calcule as medidas dos lados desse triângulo. **7.** $AC = 21$ cm, $AB = 28$ cm e $BC = 35$ cm.

8 (Unicamp-SP) A figura mostra um segmento $\overline{AD}$ dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm. O segmento $\overline{AD'}$ mede 13 cm, e as retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas a $\overleftrightarrow{DD'}$. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AB'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$. **8.** $AB' = 2{,}6$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm e $C'D' = 6{,}5$ cm.



9 No triângulo, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Calcule o valor de x. **9.** $x = 6$



10. $BD = 3$ cm e $DC = 4$ cm.

10 Construa um triângulo ABC de modo que $AB = 4{,}2$ cm, $AC = 5{,}6$ cm e $BC = 7$ cm. Trace a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Chame de D o ponto de encontro dessa bissetriz com $\overline{BC}$.

Determine as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$.

Em seguida, meça esses segmentos com a régua e compare os valores encontrados com as respectivas medidas obtidas pelo cálculo.

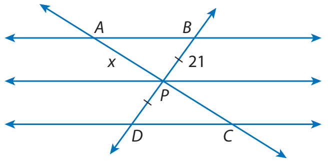
VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 As medidas dos lados de um quadro retangular estão na razão 7 : 5. Se o perímetro do quadro mede 432 cm, quais são as medidas de suas dimensões? **1.** Alternativa **b**.

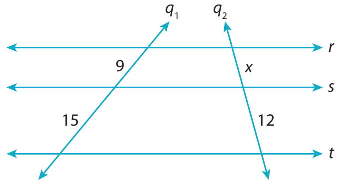
a) 77 cm e 108 cm
b) 90 cm e 126 cm
c) 100 cm e 140 cm
d) 180 cm e 252 cm

2 Na figura a seguir, as retas horizontais são paralelas e $BP = PD$. Qual é a medida de $\overline{AC}$? **2.** Alternativa **d**.



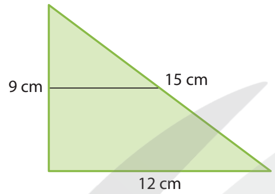
a) 21
b) 42
c) x
d) $2x$

3 Se as retas r, s e t da figura a seguir são paralelas, qual é o valor de x? **3.** Alternativa **b**.



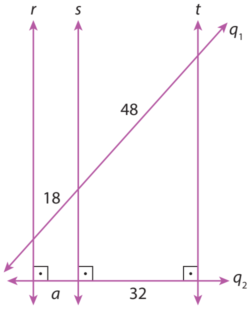
a) 6,0
b) 7,2
c) 8,0
d) 12,0

4 No triângulo da figura a seguir, foi traçado um segmento paralelo à base, que mede 4 cm de comprimento. Qual é a medida do perímetro do triângulo menor gerado? **4.** Alternativa **d**.



a) 3 cm
b) 5 cm
c) 8 cm
d) 12 cm

5 Na figura a seguir, as retas r, s e t são paralelas? Qual é a medida da distância entre as retas r e t?

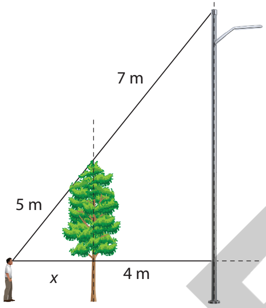


a) Sim; 12.
b) Sim; 44.
c) Não; 12.
d) Sim; 66.

5. Alternativa **b**.

6 Uma pessoa avista uma árvore e um poste alinhados nas condições da imagem.

6. Alternativa **c**.

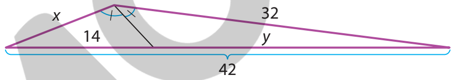


Qual é a medida aproximada da distância entre a pessoa e o poste?

a) 3 m
b) 5 m
c) 7 m
d) 8 m

7 Na figura a seguir, x e y são, respectivamente, iguais a: **7.** Alternativa **c**.

a) 7 e 42.
b) 10 e 30.
c) 16 e 28.
d) 22 e 22.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando

Organizando: **a)** Quatro segmentos são proporcionais, em certa ordem, quando a razão entre as medidas dos dois primeiros for igual à razão entre as medidas dos outros dois, com todas as medidas na mesma unidade.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Em que situação quatro segmentos de medidas AB, CD, EF e GH são proporcionais?

b) Quais são as hipóteses, ou seja, que situações geométricas devem ocorrer para que a aplicação do teorema de Tales seja válida? **b)** Deve-se ter, ao menos, três retas paralelas cortadas por duas transversais.

c) Como você explicaria para um colega como aplicar o teorema de Tales? **c)** Resposta pessoal.

d) Quais são as consequências do teorema de Tales? **d)** 1ª) Em um triângulo, uma reta paralela a um de seus lados determina segmentos proporcionais nos lados que intersecta. 2ª) A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Verificando

Nesta seção, apresentamos testes que abrangem os conteúdos deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado.

Caso eles apresentem dúvidas em relação a alguma das atividades propostas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo; assim também desenvolverão a autonomia no estudo.

As resoluções dos **testes 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Organizando

Acompanhe as respostas pessoais dos estudantes às questões propostas nessa seção. Elas poderão ser o indicador de possíveis dúvidas. Avalie, também, o grau de precisão da linguagem apresentada.

Pode-se propor aos estudantes que compartilhem as respostas com os demais colegas e criem no caderno mapas conceituais que os auxiliem a fazer revisões do conteúdo. A elaboração de mapas conceituais e outros esquemas similares favorece a compreensão e a associação dos conteúdos apresentados no capítulo.

Capítulo 5 – Semelhança

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Apresentamos neste capítulo o conceito de semelhança entre figuras e, em particular, a semelhança entre polígonos, ampliando o estudo sobre proporcionalidade tratado no capítulo 4 deste livro.

O trabalho com triângulos semelhantes é fundamental para o desenvolvimento dos assuntos dos próximos capítulos, como razões métricas e trigonométricas em um triângulo retângulo.

A abertura apresenta como motivação uma amostra da cultura berbere por meio da arte de seus tapetes com motivos geométricos e é uma boa oportunidade para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**. Discuta com os estudantes a importância de manifestações artísticas e culturais como essa para a construção da identidade cultural de um povo e para a preservação de sua história, desenvolvendo, assim, a **competência geral 3**. Se achar conveniente, peça aos estudantes que pesquisem as tradições culturais da cidade ou da região em que moram.

Acompanhe as respostas dadas às questões propostas na abertura e estimule os estudantes a explorar imagens semelhantes a esta.

Capítulo 5 Semelhança


SERGEY-73/SHUTTERSTOCK

Interior de uma casa tradicional berbere com seus tapetes, em Gardaia, Argélia. (Fotografia de 2014.)

Observe, leia e responda no caderno.

a) Que figuras geométricas você identifica nos tapetes da fotografia? Você consegue identificar transformações geométricas de algumas dessas figuras? Que transformações?

b) Utilizando transformações geométricas de alguns polígonos, represente um padrão geométrico inspirado nos tapetes da fotografia.

c) Identifique alguns pares de polígonos congruentes no seu padrão geométrico. Para isso, verifique se todos os seus lados correspondentes são congruentes e se seus ângulos correspondentes são congruentes.

d) Pesquise a importância de preservar e respeitar as tradições culturais de um povo.

a) Resposta possível: polígonos diversos, como triângulos, quadriláteros (paralelogramos: losangos, retângulos), entre outros. Transformações geométricas: reflexão, translação.

b) Construção de desenho.

c) Resposta pessoal.

d) Espera-se que os estudantes reflitam sobre como as tradições culturais são importantes para contar a história de um povo e que preservar e respeitar essas tradições ajudam a manter a identidade cultural de um povo, que os distingue dos demais.

Os tapetes são uma herança cultural para muitos povos do norte da África e do Oriente Médio. Apesar de hoje terem uso mais decorativo, para os berberes, povos seminômades do norte da África, os tapetes originalmente serviam de proteção contra o frio, cobrindo não só o chão das casas, mas também o corpo nas noites mais frias.

Compostos de padrões geométricos variados, esses tapetes, tradicionalmente tecidos à mão por mulheres, comunicam a identidade cultural desses povos por meio de combinações de diferentes figuras geométricas em padrões que contam histórias com temas variados, como fertilidade, riqueza, liberdade e natureza.

1 Figuras semelhantes

Quando uma imagem é formada em uma tela de televisão, de cinema, de celular etc., o tamanho dessa imagem geralmente é diferente do tamanho da imagem original, no entanto, a forma é mantida.

Assim, dizemos que a imagem que aparece na tela é **semelhante** à original.

Além de cópias em tamanho original, as fotocopiadoras podem ampliar ou reduzir determinada imagem; nesse caso, também se mantém a forma do original.

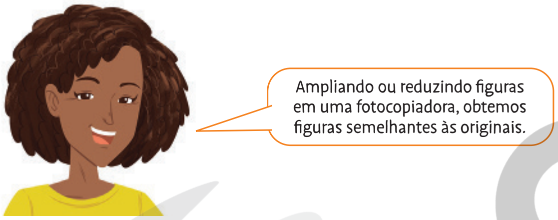
Para obter uma ampliação de, por exemplo, 50%, devemos programar essa máquina para fazer uma cópia de 150%, pois a ampliação deverá ser igual ao original (100%) aumentado de 50%. Se quisermos uma redução de 25%, devemos programar a máquina para 75%, que corresponde ao original (100%) diminuído de 25%.

Fotografia original

Monte Roraima, no Parque Nacional Monte Roraima, município de Uiramutã, Roraima, na fronteira com a Guiana e a Venezuela. (Fotografia de 2018.)

Fotografia ampliada (150% em relação à original)

FOTOGRAFIAS: MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Fotografia reduzida (75% em relação à original)

Figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Em uma fotografia, a medida da altura de João corresponde a 10 cm. Qual deve ser a porcentagem que devemos programar em uma fotocopiadora para que a medida da altura de João em uma cópia ampliada seja de 12 cm?

Pense mais um pouco...: Devemos programar uma cópia com 120%, isto é, 100% do original mais 20% de ampliação.

1. Figuras semelhantes

Habilidade da BNCC: **EF09MA08**.

Retomamos, neste tópico, o conceito de proporcionalidade aplicado à semelhança de figuras geométricas. Os problemas a serem elaborados e resolvidos demandam, além da aplicação de relações de proporcionalidade entre duas grandezas. Tais procedimentos criam condições para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA08).

Pense mais um pouco...

Uma resolução possível para a questão proposta consiste em determinar quanto por cento 12 é de 10, ou seja, calculamos a razão entre essas duas alturas. É importante que os estudantes percebam, inicialmente, que 12 é mais de 100% de 10, visto que $12 > 10$. Fazer estimativas de resultados ajuda a identificar valores inadequados.

$$\frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\% \text{ (ou 1,2)}$$

Logo, 12 é 120% de 10. Portanto, devemos programar uma cópia com 120% de ampliação.

Discuta com os estudantes o fato de que o acréscimo aplicado na medida da altura de 10 cm para 12 cm é 2 cm, o que corresponde a 20% de 10 cm. Por isso, 120% correspondem à medida da altura obtida após o acréscimo.

Os estudantes podem comprovar esses percentuais utilizando uma calculadora para obter 120% de 10 e 20% de 10. Explore também o cálculo mental, tomando por base que calcular 10% de um valor equivale a dividir esse valor por 10, e calcular 50% de um valor equivale a dividir esse valor por 2. Assim, eles podem facilmente concluir que 10% de 10 é igual a 1 (10 : 10 = 1), e como 20% é o dobro de 10%, 20% de 10 deve ser 2.

2. Semelhança de polígonos

Habilidade da BNCC: EF09MA08.

Neste tópico damos continuidade ao estudo da semelhança de figuras, analisando a semelhança de polígonos. Os problemas a serem elaborados e resolvidos demandam a aplicação de relações de proporcionalidade entre duas grandezas, criando condições para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA08).

A malha quadriculada é um importante recurso no trabalho com ampliação/redução e semelhança. Aproveite a figura e destaque oralmente os elementos correspondentes (ângulos e lados) nos dois polígonos da malha. Destaque o fato de que os ângulos internos correspondentes nos dois polígonos são congruentes entre si.

Peça aos estudantes que verifiquem nos dois quadriláteros, do menor para o maior, o que ocorreu com as medidas dos lados correspondentes, usando para isso os elementos da malha. Assim, indicando por ℓ a medida do lado do quadradinho da malha e por d a medida de sua diagonal, verificamos que:

$A'D' = 10\ell = 2 \cdot 5\ell = \mathbf{2} \cdot AD$

$A'B' = 2\ell = 2 \cdot \ell = \mathbf{2} \cdot AB$

$D'C' = 6d = 2 \cdot 3d = \mathbf{2} \cdot DC$

$C'B' = 4d = 2 \cdot 2d = \mathbf{2} \cdot CB$

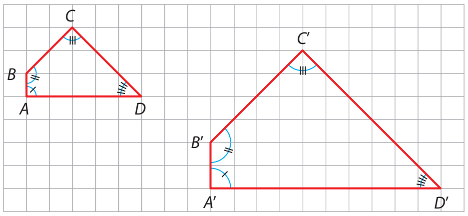
Desse modo, os estudantes verificam que as medidas dos lados do polígono maior correspondem ao dobro das medidas dos lados correspondentes no polígono menor. Retome, então, a noção de segmentos proporcionais para continuar o desenvolvimento teórico.

Solicite aos estudantes que calculem mentalmente as medidas dos perímetros de ambos os polígonos e a razão do maior para o menor e respondam oralmente se essa razão é igual à razão de semelhança entre as medidas dos lados.

Explore o segundo par de figuras, que mostra uma redução, da mesma maneira como foi feito na ampliação.

2 Semelhança de polígonos

O uso de papel quadriculado pode auxiliar o trabalho de ampliação ou de redução de figuras. Acompanhe, por exemplo, como foi obtida a ampliação em 100% do polígono *ABCD*, que resultou no polígono *A'B'C'D'*.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Os pares de ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$, $\widehat{D}$ e $\widehat{D'}$ são chamados de **ângulos correspondentes**. Observe que eles são congruentes, ou seja:

$$\widehat{A} \cong \widehat{A'},\ \widehat{B} \cong \widehat{B'},\ \widehat{C} \cong \widehat{C'} \text{ e } \widehat{D} \cong \widehat{D'}$$

Os pares de lados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{DA}$ e $\overline{D'A'}$ são chamados de **lados correspondentes**. Observe que eles têm medidas de comprimento proporcionais, pois:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{2}{1}$$

Assim, concluímos que o polígono *A'B'C'D'* é semelhante ao polígono *ABCD* e indicamos por:

$$ABCD \sim A'B'C'D'$$

Note que ângulos correspondentes são formados por lados correspondentes. Lados correspondentes são comuns a dois ângulos correspondentes.

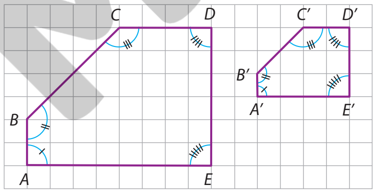
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Como qualquer lado do polígono ampliado (*A'B'C'D'*) tem por medida o dobro da medida do lado correspondente no polígono original (*ABCD*), dizemos que a **razão de semelhança** entre o polígono ampliado e o polígono original é 2. Isso significa que qualquer lado do polígono *A'B'C'D'* tem por medida o dobro da medida do lado correspondente no polígono *ABCD*.

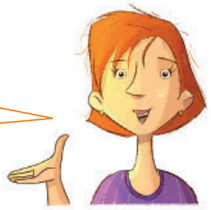
Dois polígonos são **semelhantes** quando os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Agora, vamos reduzir o polígono *ABCDE* em 50%, obtendo o polígono *A'B'C'D'E'*. Acompanhe.

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



Observe que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais. Então, os polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* são semelhantes.

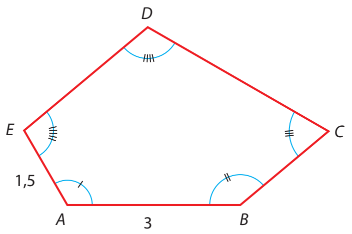


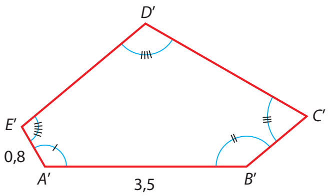
SIDNEY MEIREILES/ ARQUIVO DA EDITORA

A medida de qualquer lado do polígono *A'B'C'D'E'* tem metade da medida do lado correspondente no polígono *ABCDE*. Nesse caso, dizemos que a razão de semelhança entre o polígono reduzido (*A'B'C'D'E'*) e o polígono original (*ABCDE*) é $\frac{1}{2}$. Então:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = \frac{1}{2}$$

Observe agora o par de polígonos.



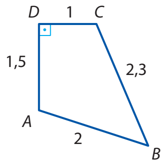


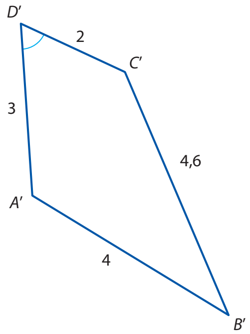
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{3{,}5} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = \frac{15}{8}$$

Esses polígonos têm os ângulos correspondentes congruentes, mas seus lados correspondentes não têm medidas de comprimento proporcionais. Logo, eles **não são semelhantes**.

Observe estes outros polígonos.





$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{2{,}3}{4{,}6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

Esses polígonos têm os lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, mas seus ângulos correspondentes não são congruentes. Logo, eles **não são semelhantes**.

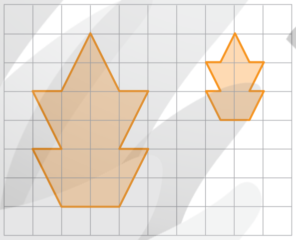
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

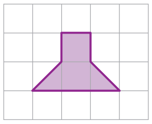
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Qual é a razão de semelhança entre a figura reduzida (à direita) e a figura original (à esquerda) na ilustração a seguir?

1. $\frac{1}{2}$



2 Em um papel quadriculado, amplie esta figura na razão $\frac{3}{1}$. **2.** Construção de figura.



3 Os lados correspondentes de dois polígonos têm medidas de comprimento proporcionais. Podemos dizer que eles são semelhantes? Por quê? **3.** Não, porque é necessário também que os ângulos correspondentes sejam congruentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Semelhança de polígonos

Explore com os estudantes os exemplos apresentados. Ressalte que não basta ocorrer apenas uma das condições, ou seja, as duas condições devem ocorrer para que as figuras consideradas sejam semelhantes:

- ter ângulos correspondentes congruentes;
- ter lados correspondentes proporcionais.

Se possível, leve para a aula um par de polígonos semelhantes aos pentágonos desta página, em tamanho grande, recortados em um papelão ou placa de EVA para sobrepor, um de cada vez, os ângulos correspondentes e mostrar a congruência entre eles.

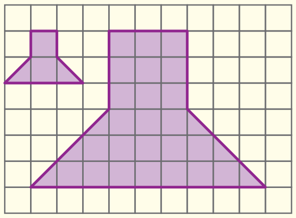
Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** e **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 1**, peça aos estudantes que expliquem o procedimento utilizado para obter essa razão de semelhança.

Para ampliar uma figura feita em um papel quadriculado, um procedimento é multiplicar a medida do comprimento dos segmentos do contorno da figura original (em quantidade de lados ou diagonais dos quadradinhos da malha) de acordo com o fator de ampliação que se quer.

No **exercício 2**, como a razão de semelhança é 3 para 1, devemos triplicar tais medidas de comprimento. Apresentamos essa ampliação, na qual, à esquerda, temos a figura original, e à direita, a figura ampliada na razão $\frac{3}{1}$.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

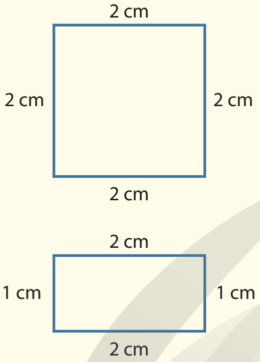
No **exercício 3**, proponha aos estudantes que mostrem um contraexemplo com desenhos.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 4** e dos **exercícios 6** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Para o **exercício 4**, vale destacar que, no caso dos retângulos, se as medidas dos 4 ângulos internos não forem alteradas, a figura continuará a ser um retângulo, mesmo que o aumento ou a redução das medidas dos lados não sejam proporcionais. Nesse caso, não basta que os estudantes respondam que os dois retângulos são semelhantes por serem retângulos, pois isso garante apenas que não houve alteração nas medidas dos ângulos; é necessário que apresentem argumentos sobre as medidas dos lados.

Pergunte: "Qualquer par de retângulos são figuras semelhantes? Por quê?". Espera-se que eles percebam que não, pois, apesar de os ângulos sempre serem retos, nem sempre dois retângulos terão lados proporcionais. Um contraexemplo que pode ser discutido é apresentado a seguir, no qual visivelmente os retângulos não são semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

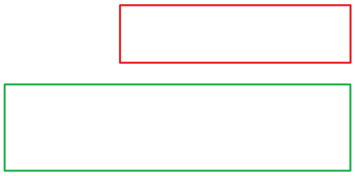
Amplie o questionamento perguntando: "Dois quadrados são sempre figuras semelhantes?".

No **exercício 5**, a figura semelhante à figura A é a figura D. Cada lado da figura D tem medida de comprimento igual ao dobro da medida de comprimento do lado correspondente na figura A; além disso, todos os ângulos correspondentes são congruentes.

Peça aos estudantes que justifiquem por que as demais figuras não são semelhantes à figura A. Uma possível justificativa é falar sobre o "bico": como nas figuras B e C ele permaneceu do mesmo tamanho da figura original, as demais partes dessas figuras também não poderiam ter sido modificadas.

4. c) Sim, pois, além de os lados correspondentes terem medidas de comprimento proporcionais, os ângulos medem 90° e, portanto, os ângulos correspondentes são congruentes.

4 Com uma régua, meça a base e a altura dos retângulos a seguir e, com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos de ambos.

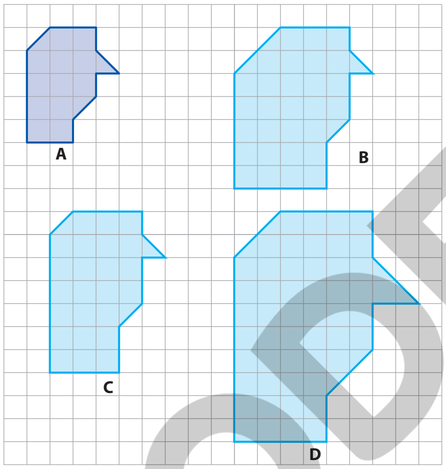


a) Qual é a razão entre a medida da base do retângulo vermelho e a medida da base do retângulo verde? **4. a)** $\frac{2}{3}$

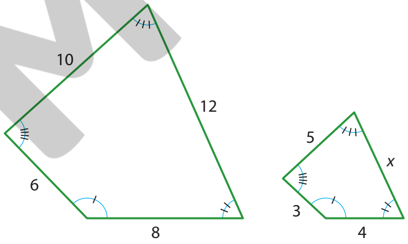
b) Qual é a razão entre a medida da altura do retângulo vermelho e a medida da altura do retângulo verde? **4. b)** $\frac{2}{3}$

c) Esses retângulos são semelhantes? Por quê?

5 Indique a figura semelhante à figura A. **5.** Figura D.

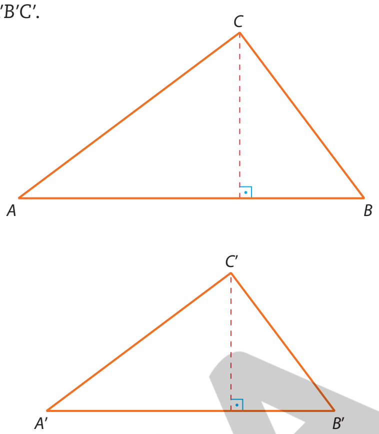


6 Sabendo que os polígonos a seguir são semelhantes, calcule x. **6.** $x = 6$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

7 Considere os triângulos semelhantes *ABC* e *A'B'C'*.



Com uma régua, determine a medida do comprimento dos lados e a medida das alturas relativas a $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Considerando as razões, sempre do triângulo *ABC* para o triângulo *A'B'C'*, responda às perguntas.

a) Qual é a razão entre as medidas de dois lados correspondentes? **7. a)** 1,2

b) Qual é a razão entre as medidas de duas alturas relativas a lados correspondentes? **7. b)** 1,2

c) Qual é a razão entre as medidas dos perímetros? **7. c)** 1,2

d) Qual é a razão entre as medidas das áreas? **7. d)** 1,44

8 Marcos desenhou um triângulo retângulo em um papel quadriculado. O papel tem quadradinhos medindo 1 cm por 1 cm de lado, e Marcos usou 12 vezes a medida do lado para a medida da base e 8 vezes a medida do lado para a medida da altura.

Pedro também desenhou um triângulo retângulo com medida da base igual a 12 vezes a medida do lado do quadradinho e medida da altura igual a 8 vezes a medida do lado do quadradinho, mas em um papel quadriculado com quadradinhos medindo 0,5 cm por 0,5 cm.

Considere que os triângulos desenhados por Marcos e Pedro são semelhantes. **8. a)** $\frac{2}{1}$ **8. b)** $\frac{2}{1}$

a) Qual é a razão de semelhança entre as medidas dos lados do triângulo de Marcos e as medidas dos lados do triângulo de Pedro?

b) Qual é a razão de semelhança entre a medida do perímetro do triângulo de Marcos e a medida do perímetro do triângulo de Pedro?

c) Qual é a razão de semelhança entre a medida da área do triângulo de Marcos e a medida da área do triângulo de Pedro? **8. c)** $\frac{4}{1}$

Nos **exercícios 7** e **8**, verifique se os estudantes repararam que a razão entre as medidas das áreas é o quadrado da razão entre as medidas dos lados correspondentes – razão de semelhança.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Um grupo de amigos fez uma viagem para Recife (PE).

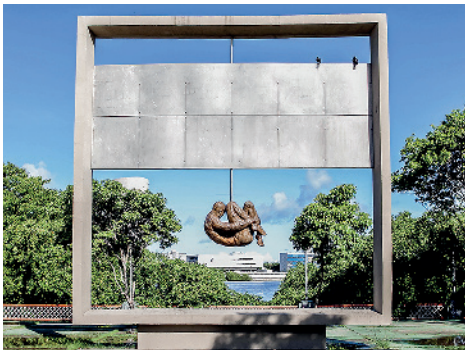
Lá, tiraram muitas fotografias, que foram impressas no tamanho 10 cm × 15 cm.

A fotografia do monumento Tortura Nunca Mais, construído em memória das pessoas torturadas e desaparecidas durante o período da ditadura civil-militar (1964-1985), ficou excelente. Resolveram, então, fazer uma cópia ampliada para cada um, no tamanho 20 cm × 30 cm.

Na fotografia original, o monumento mede 7,2 cm de largura.

Qual é a medida, em centímetro, da largura do monumento na cópia ampliada?

Pense mais um pouco...: 14,4 cm.



THIAGO LEMOS/FOTOARENA

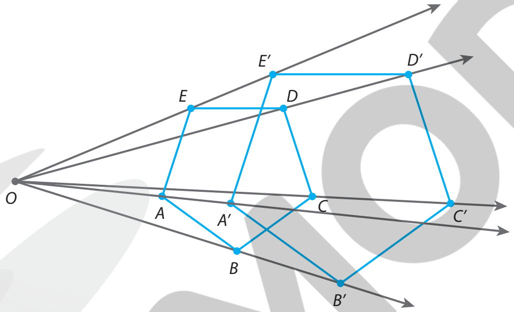
Monumento **Tortura Nunca Mais**, na Praça Padre Henrique, em Recife (Pernambuco). (Fotografia de 2020.)

PARA SABER MAIS

Construindo figuras semelhantes por homotetia

A **homotetia** é um exemplo de transformação geométrica que preserva a forma da figura original, mas não necessariamente seu tamanho, que pode ser ampliado ou reduzido. Desse modo, a figura original e a figura obtida são semelhantes. Essas figuras são chamadas de **figuras homotéticas**.

Acompanhe como ampliar o pentágono *ABCDE*, na razão 1,5, por homotetia.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- Fixamos um ponto *O* (centro de homotetia).
- Traçamos, a partir do ponto *O*, semirretas que passam pelos vértices do pentágono *ABCDE*.
- Fazendo $OA' = 1,5 \cdot OA$, $OB' = 1,5 \cdot OB$, e assim por diante, determinamos os vértices do pentágono ampliado *A'B'C'D'E'*.

O pentágono *A'B'C'D'E'* é semelhante ao pentágono *ABCDE* na razão de semelhança 1,5.

Pense mais um pouco...

Na atividade desta seção, os estudantes devem obter a razão da ampliação feita. Considerando que as fotografias original e ampliada lembram polígonos de lados de medidas 10 cm × 15 cm e 20 cm × 30 cm, respectivamente, vamos determinar a razão entre as medidas dos lados correspondentes.

$$\frac{20}{10} = \frac{30}{15} = \frac{2}{1}$$

Note que as duas fotografias têm lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais e que elas lembram polígonos com ângulos correspondentes congruentes, de medidas 90°; assim, podemos concluir que são semelhantes. Portanto, a medida da largura do monumento na fotografia ampliada também é ampliada na razão de semelhança $\frac{2}{1}$, ou seja, a largura mede 14,4 cm $(7,2 \cdot 2 = 14,4)$.

Para saber mais

Nesta seção, apresentamos a homotetia, que é um procedimento para obter figuras semelhantes.

Peça a alguns estudantes que expliquem oralmente o significado dessa palavra, pesquisando no dicionário ou na internet.

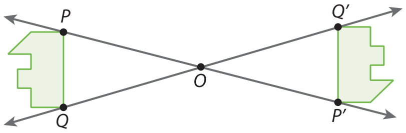
Reproduza essa construção na lousa e discuta cada etapa dela com os estudantes. Em seguida, entregue a cada um deles uma folha de papel sulfite com desenhos de polígonos (previamente preparados) para que façam as homotetias indicadas.

Percorra a sala de aula e acompanhe a resolução das atividades propostas para avaliar se os estudantes compreenderam o significado de homotetia, visto que é um conceito novo e até mesmo diferente daquilo que já conhecem, apesar de seu significado não estar distante do que estão estudando.

Peça-lhes que verifiquem, usando régua e esquadro, que os lados correspondentes são paralelos.

Observe outros exemplos de figuras homotéticas.

a) A figura original foi invertida por homotetia de centro *O* e razão -1.

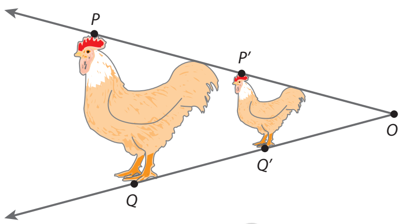


RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, as figuras são congruentes, ou seja, têm ângulos correspondentes de mesmas medidas e lados correspondentes de mesmas medidas.

Note que figuras congruentes também são semelhantes.

b) A figura original foi reduzida por homotetia de centro *O* e razão $\frac{1}{2}$.

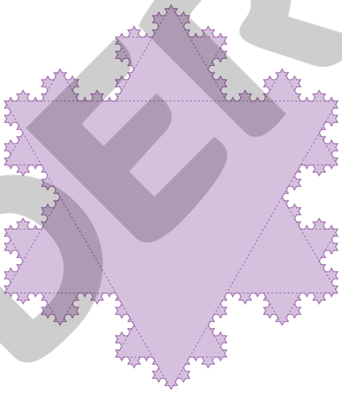


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

c) Por meio da homotetia, podemos formar uma sequência de figuras homotéticas.

A figura conhecida como floco de neve de Koch é criada com um padrão de triângulos equiláteros que pode ser obtido pela combinação das transformações geométricas de translação, rotação e homotetia.

Note que os triângulos que compõem o floco de neve de Koch são semelhantes, ou seja, têm todos a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Floco de neve de Koch. Criado com base nos estudos do matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch de 1906.

Essa figura, formada por repetições de um padrão, é um exemplo de fractal.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Desenhe um triângulo retângulo isósceles. Fixe um ponto O e, por homotetia de centro O, construa o triângulo homotético ao que você desenhou aplicando a razão:

a) 2

b) $-\frac{1}{2}$

1. Construção de figuras.

2 Utilizando algumas das figuras geométricas presentes na fotografia da abertura deste capítulo, escolha um tema e crie um desenho aplicando os conceitos de semelhança e homotetia. **2.** Construção de figura.

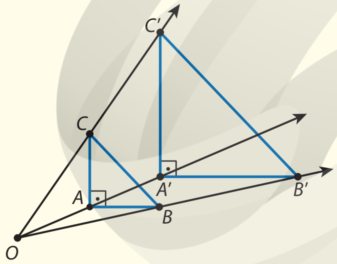
Para saber mais

Peça aos estudantes que analisem os exemplos apresentados. Espera-se que eles percebam que, se a razão da homotetia é 1, a figura obtida é a própria figura original, ou seja, uma homotetia de razão 1 (para qualquer centro) mantém a figura original no mesmo tamanho.

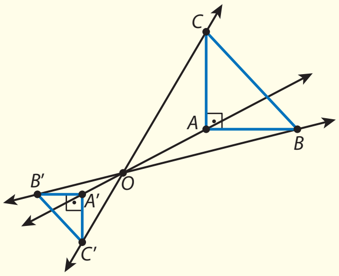
Aproveite para relembrar o que são figuras congruentes. Ressalte que são um caso particular de semelhança, quando essa razão é 1.

Seguem construções para a **atividade 1** do **Agora é com você!**.

a) Com esquadro e régua, desenhamos o triângulo retângulo isósceles *ABC*. Depois, marcamos o ponto *O*, distante do triângulo *ABC*. Em seguida, traçamos três semirretas de origem em *O* passando pelos vértices *A*, *B* e *C*, respectivamente. Em cada semirreta, a partir de *O*, com o auxílio do compasso, demarcamos segmentos que medem o dobro da medida do comprimento do segmento com um extremo em *O* e o outro extremo em um dos vértices do triângulo dado. Assim obtemos os pontos *A'*, *B'* e *C'*, respectivamente, que serão os vértices do triângulo homotético de razão 2, pois $OA' = 2 \cdot OA$, $OB' = 2 \cdot OB$ e $OC' = 2 \cdot OC$. Observe que, quando a razão é positiva e maior que 1, o triângulo homotético está na mesma posição em relação ao triângulo original, e os vértices do triângulo original pertencem aos respectivos lados do triângulo homotético.



b) O procedimento é análogo ao do **item a**, mas, como a razão é negativa, os vértices do triângulo original não pertencem aos lados do triângulo homotético, que estará na posição invertida em relação ao original. Assim, traçamos retas, pois os vértices do triângulo homotético estão na respectiva semirreta oposta àquela que contém cada lado do triângulo original. Sendo a razão um número entre -1 e 0, o triângulo homotético é uma redução do triângulo original na razão indicada. Assim: $OA' = 0{,}5 \cdot OA$; $OB' = 0{,}5 \cdot OB$; $OC' = 0{,}5 \cdot OC$



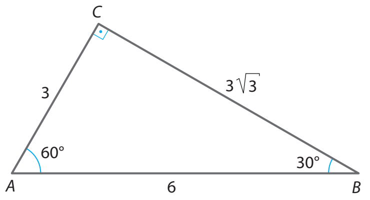
ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

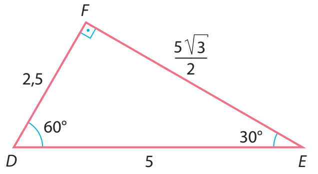
Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes apliquem os conceitos de semelhança estudados e o conceito de homotetia para a criação de um desenho com tema livre. Essa é uma boa oportunidade para o desenvolvimento da **competência geral 4**. Proponha a eles que escolham temas relacionados a seu cotidiano e suas experiências, estimulando-os a utilizar a linguagem visual para partilhar ideias e sentimentos.

3 Semelhança de triângulos

Dizemos que, para dois triângulos serem semelhantes, deve ser possível estabelecer uma correspondência entre as medidas dos lados por proporcionalidade e entre os ângulos, por congruência.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* a seguir.





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{F}$$

- os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{5}$$

Observações

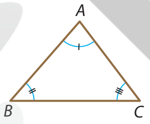
- Para saber quais lados se correspondem, observamos os ângulos opostos a eles. Assim:
  - o lado $\overline{AB}$ corresponde ao lado $\overline{DE}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{C} \cong \hat{F}$);
  - o lado $\overline{AC}$ corresponde ao lado $\overline{DF}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{B} \cong \hat{E}$);
  - o lado $\overline{BC}$ corresponde ao lado $\overline{EF}$, pois são opostos a ângulos congruentes ($\hat{A} \cong \hat{D}$).
- Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é *k*, então:
  - a razão entre duas medidas de altura correspondentes é *k*;
  - a razão entre duas medidas de comprimento de medianas correspondentes é *k*;
  - a razão entre duas medidas de comprimento de bissetrizes correspondentes é *k*;
  - a razão entre as medidas de seus perímetros é *k*;
  - a razão entre as medidas de suas áreas é k^2.

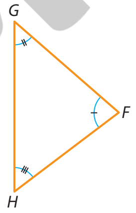
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Indique quais são os lados correspondentes nestes triângulos semelhantes.

9. $\overline{BC}$ e $\overline{GH}$
$\overline{AC}$ e $\overline{FH}$
$\overline{AB}$ e $\overline{FG}$





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

3. Semelhança de triângulos

Habilidades da BNCC: **EF09MA08** e **EF09MA12**.

O conceito de proporcionalidade continua, neste tópico, a embasar nossos próximos passos com o estudo da semelhança aplicada a triângulos e das condições para que isso ocorra. Assim, coloca-se em prática o desenvolvimento das habilidades (EF09MA08) e (EF09MA12).

Para ilustrar os resultados que serão destacados no boxe **Observação**, inicialmente apresente pares de polígonos semelhantes (podem ser desenhados em malha quadriculada em tamanho grande), de modo que os estudantes possam verificar esses resultados, obtendo a razão de semelhança pela proporcionalidade das medidas dos lados, a razão entre as medidas dos perímetros e a razão entre as medidas das áreas.

Exercícios propostos

O **exercício 9** chama a atenção para a identificação dos lados correspondentes entre polígonos semelhantes, um dos procedimentos essenciais para a aplicação de semelhança na resolução de problemas.

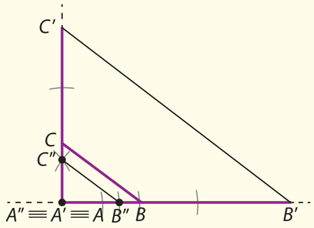
Os estudantes devem compreender e assimilar que os lados correspondentes em polígonos semelhantes são aqueles que estão opostos a ângulos congruentes. Nos dois triângulos do exercício, por exemplo, para determinar os lados correspondentes, devemos observar que, como o lado $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo interno $\hat{C}$ do triângulo *ABC*, devemos encontrar no outro triângulo o lado oposto ao ângulo congruente a $\hat{C}$, que é o ângulo $\hat{H}$, oposto ao lado $\overline{FG}$ do triângulo *FGH*. Assim, podemos concluir que $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ são lados correspondentes em triângulos semelhantes.

De maneira análoga, determinamos que $\overline{AC}$ e $\overline{FH}$, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{GH}$, também são lados correspondentes em triângulos semelhantes.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 10, 11, 12** e **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 13**, com régua e compasso, desenhamos um triângulo escaleno qualquer (três lados de medidas diferentes) e determinamos triângulos semelhantes segundo as razões dadas. Apresentamos uma possível situação na qual utilizamos homotetia para construir os triângulos semelhantes: o triângulo *ABC* é o triângulo escaleno original, o triângulo *A'B'C'* é o triângulo homotético ao triângulo *ABC* na razão 3 (é uma ampliação) e o triângulo *A''B''C''* é o homotético de razão $\frac{3}{4}$ (é uma redução).



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

A resolução da atividade está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

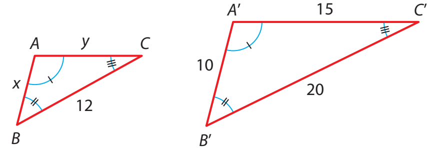
Teorema fundamental da semelhança

Antes de desenvolver esta demonstração, avalie a conveniência de relembrar a 1ª consequência do teorema de Tales, vista no capítulo anterior: "Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina sobre esses lados segmentos proporcionais."

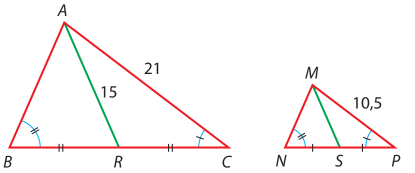
A demonstração do teorema fundamental da semelhança é uma boa oportunidade para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA10). Ao apresentar essa demonstração, certifique-se de que os estudantes compreenderam as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. É importante que os estudantes consigam identificar ângulos correspondentes, congruentes, colaterais e suplementares, por exemplo, para que compreendam as relações entre os ângulos dos triângulos semelhantes analisados.

---

10 Considere o seguinte par de triângulos semelhantes e determine os valores de x e de y. **10.** $x = 6$ e $y = 9$.

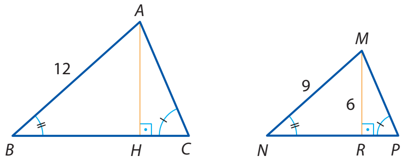


11 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule a medida da mediana $\overline{MS}$ do $\triangle MNP$. **11.** $MS = 7{,}5$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

12 Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, calcule a medida da altura $\overline{AH}$ do $\triangle ABC$. **12.** $AH = 8$



13 Construa com régua e compasso um triângulo escaleno qualquer. Depois, construa um triângulo semelhante a esse na razão de semelhança 3 e outro na razão de semelhança $\frac{3}{4}$.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!) **13.** Construção de figuras.

14 Os lados de um triângulo medem 12,0 cm, 18,0 cm e 20,4 cm. O maior lado de um triângulo semelhante ao primeiro mede 15,3 cm.

a) Qual é a medida do perímetro do segundo triângulo? **14. a)** 37,8 cm

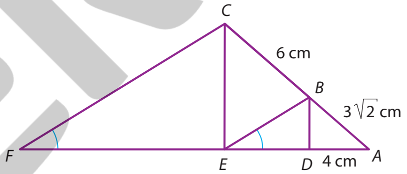
b) Com o auxílio de uma calculadora, determine a medida aproximada da área do segundo triângulo, sabendo que a medida da área do primeiro é de aproximadamente 107,2 cm². **14. b)** Aproximadamente 60,3 cm².

Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Na figura, $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{F}C$.

Determine a medida, em centímetro, de $\overline{AF}$.

Pense mais um pouco...: $AF = (12 + 8\sqrt{2})$ cm.

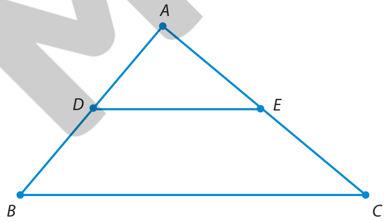


NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Observe a figura a seguir, em que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



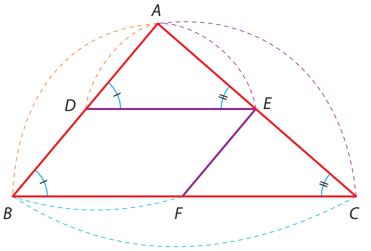
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos provar que os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes.

Para a demonstração formal de um teorema, indicaremos, como em outras vezes, a **hipótese** (proposição aceita como verdadeira) e a **tese** (proposição cuja verdade se quer provar).

Hipótese: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- **Demonstração**

Construção auxiliar: traçamos, por *E*, $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$.

Analise atentamente os passos a seguir para acompanhar a demonstração.

① $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (por hipótese)

② $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (pelo teorema de Tales)

③ $\hat{A} \cong \hat{A}$ (ângulo comum)

④ $\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑤ $\hat{C} \cong \hat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

⑥ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ (pelo teorema de Tales)

⑦ $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

⑧ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de ⑥ e ⑦)

⑨ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (de ② e ⑧)

⑩ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (de ③, ④, ⑤ e ⑨)

Note que os lados correspondentes dos dois triângulos têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes. Portanto, *ADE* e *ABC* são triângulos semelhantes, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

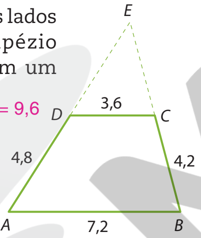
15 Os prolongamentos dos lados não paralelos do trapézio *ABCD* encontram-se em um ponto *E*. Determine:

15. a) *AE* = 9,6

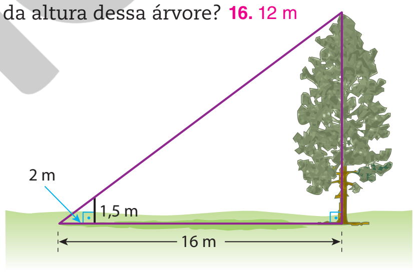
a) a medida de $\overline{AE}$;

b) a medida de $\overline{CE}$.

15. b) *CE* = 4,2



16 Para medir a altura de um pinheiro, Elza pegou um bastão medindo 1,5 m de altura e posicionou-o verticalmente não muito longe do pinheiro. Ela verificou que o bastão projetava uma sombra medindo 2 m de comprimento. Então, no mesmo instante, ela mediu o comprimento da sombra projetada pelo pinheiro, igual a 16 m. Considerando as medidas obtidas por Elza, qual é a medida da altura dessa árvore? **16.** 12 m



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Este bloco de exercícios tem o objetivo de proporcionar a aplicação do teorema fundamental da semelhança. Durante a resolução, verifique se os estudantes entenderam as condições desse teorema e quando ele pode ser aplicado.

A resolução do **exercício 15** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 16**, os estudantes devem identificar o paralelismo entre os segmentos que determinam as alturas do pinheiro e do bastão, uma vez que ambos estão perpendiculares ao solo. Assim, eles devem considerar um triângulo e um segmento paralelo a um dos lados desse triângulo, cujos extremos (pontos distintos) pertencem aos outros dois lados, respectivamente, hipótese segundo a qual devem concluir que o triângulo determinado pelo segmento paralelo é semelhante ao primeiro triângulo. Determinando os lados correspondentes (opostos a ângulos congruentes) e indicando a medida da altura do pinheiro por *x*, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{2}{16} = \frac{1{,}5}{x}$$

$$2x = 16 \cdot 1{,}5$$

$$x = \frac{16 \cdot 1{,}5}{2}$$

$$x = 8 \cdot 1{,}5$$

$$x = 12$$

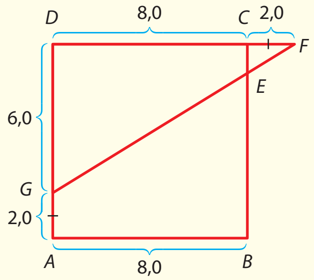
Logo, a medida da altura dessa árvore é 12 m.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 17**, **18** e **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 19**, os estudantes devem observar que, no triângulo *FDG*, o segmento $\overline{CE}$ é paralelo ao lado $\overline{DG}$. Logo, os triângulos *FDG* e *FCE* são semelhantes (pelo teorema fundamental da semelhança). Em seguida, eles devem verificar que conhecem a medida dos outros segmentos da figura. Incentive-os a reproduzir a figura no caderno e a marcar nela os valores conhecidos.

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



Da semelhança entre os triângulos *FDG* e *FCE*, obtemos a seguinte proporção:

$$\frac{2,0}{10,0} = \frac{CE}{6,0}$$

$$10,0 \cdot CE = 2 \cdot 6,0$$

$$10,0 \cdot CE = 12,0$$

$$CE = \frac{12,0}{10,0}$$

$$CE = 1,2$$

No **exercício 20**, observe se os estudantes consideraram o que seria uma projeção plana do esquema que ilustra a situação. Dessa maneira, representando por *r* a medida do raio do disco voador, eles podem escrever a seguinte proporção:

$$\frac{2r}{16} = \frac{30}{30 + 50}$$

$$r = \frac{16 \cdot 30}{2 \cdot 80}$$

$$r = 3$$

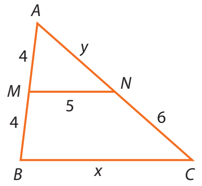
Portanto, o raio do disco voador mede aproximadamente 3 metros.

Alternativa **a**.

17 Determine o valor de x e de y em cada caso.

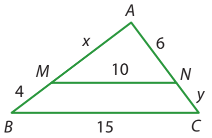
a) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

17. a) $x = 10$ e $y = 6$.



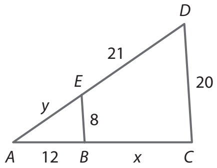
b) $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

17. b) $x = 8$ e $y = 3$.

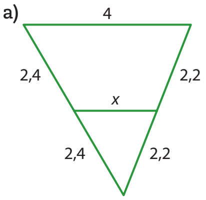


c) $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$

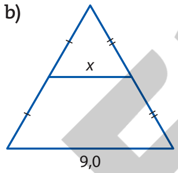
17. c) $x = 18$ e $y = 14$.



18 Calcule x nos seguintes triângulos:



18. a) $x = 2$

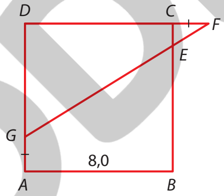


18. b) $x = 4,5$

19 Na figura, *ABCD* é um quadrado e $CF = AG = 2,0$.

Calcule *CE*.

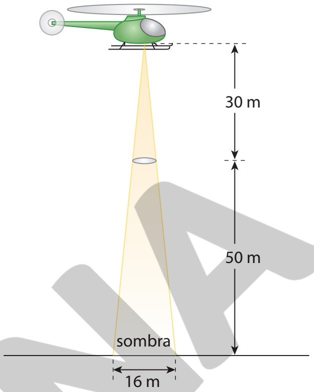
19. $CE = 1,2$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

20 (Unirio-RJ) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura a seguir.

20. Alternativa **a**.



Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em m, aproximadamente:

a) 3,0.
b) 3,5.
c) 4,0.
d) 4,5.
e) 5,0.

21 ***Hora de criar*** – Em dupla com um colega, criem um fluxograma para determinar se dois triângulos são semelhantes. Em seguida, desenhem em seus cadernos dois triângulos semelhantes cada um. Troquem de caderno e, seguindo o passo a passo do fluxograma criado por vocês, verifiquem se os triângulos desenhados pelo colega são, de fato, semelhantes. Destroquem de caderno para a correção. **21.** Resposta pessoal.

Casos de semelhança de triângulos

Você já estudou que dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais. No entanto, podemos reconhecer dois triângulos semelhantes pelos casos a seguir.

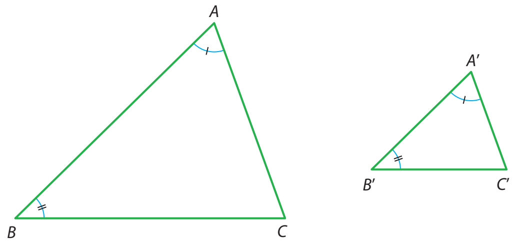
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Casos de semelhança de triângulos

Ao tratar dos vários casos de semelhança, devemos reconhecer as condições necessárias para tal aplicando, por vezes, relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversais e o conceito de proporcionalidade.

Caso ângulo-ângulo (AA)

Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, esses triângulos são semelhantes.



Hipótese: $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

- **Demonstração**

Considerando que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D, traçamos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

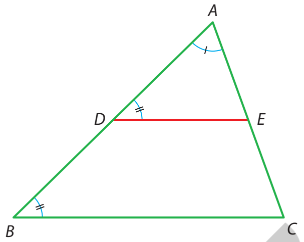
Assim, temos:

① $\hat{D} \cong \hat{B}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

② $\hat{A} \cong \hat{A}'$ (por hipótese)

③ $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção)

④ $\hat{D} \cong \hat{B}'$ (pois $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{D} \cong \hat{B}$)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

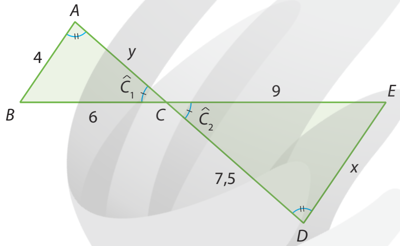
Logo, de ②, ③ e ④ sabemos que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo (ALA), já que esses dois triângulos têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes.

Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

Observe a seguir um exemplo de aplicação do caso de semelhança AA. Vamos calcular o valor de x e de y nos triângulos, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal)
- $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)

Portanto, os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo caso AA.

Caso ângulo-ângulo (AA)

Retome com os estudantes que, para saber quais são os lados proporcionais em dois triângulos semelhantes, devemos primeiro identificar os ângulos internos congruentes (ângulos correspondentes de mesma medida). Os lados correspondentes, também chamados de homólogos, serão os lados opostos ao ângulos congruentes correspondentes. No entanto, assim como foi feito no estudo da congruência de triângulos, algumas situações já nos garantem que há dois triângulos semelhantes (sem verificar os demais elementos necessários para recair na definição de semelhança entre dois triângulos). São os casos de semelhança: AA (dois ângulos correspondentes congruentes), LAL (dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes) e LLL (três lados correspondentes proporcionais). Dentre eles, o mais comumente utilizado é o caso AA.

Reproduza na lousa a demonstração do caso ângulo-ângulo, pedindo aos estudantes que justifiquem a congruência em cada item elencado.

Amplie a aplicação desse caso apresentando-lhes outros exemplos para identificarem quais são os ângulos correspondentes congruentes.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Esse caso de semelhança deve ser diferenciado do caso de mesmo nome para triângulos congruentes. Ressalte que, enquanto os casos de congruência envolvem congruência entre os lados, nos casos de semelhança consideramos a proporcionalidade entre os lados. Se houver congruência entre os lados, haverá também proporcionalidade (de razão 1). Por isso, dois triângulos que são congruentes também são triângulos semelhantes.

Peça aos estudantes que acompanhem no livro o desenvolvimento da demonstração desse caso. Depois, converse com eles sobre o que entenderam.

Assim, os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \quad \text{e} \quad \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

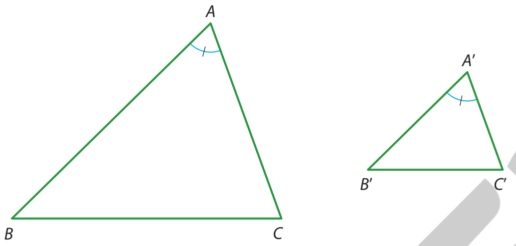
$$\frac{x}{4} = \frac{9}{6} \qquad \frac{y}{7{,}5} = \frac{6}{9}$$

$$x = \frac{36}{6} = 6 \qquad y = \frac{45}{9} = 5$$

Portanto, os valores de x e de y são, respectivamente, 6 e 5.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

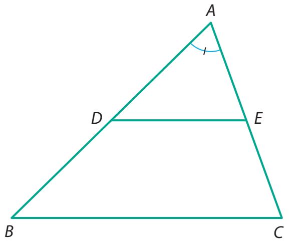


Hipótese: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e $\hat{A} \cong \hat{A'}$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

- **Demonstração**

Considerando que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D, traçamos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.



Vamos mostrar, pelo caso LAL de congruência de triângulos, que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção) e que $\hat{A} \cong \hat{A'}$ (por hipótese). Resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Do teorema fundamental da semelhança ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ou, ainda, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

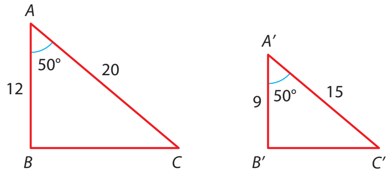
Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$. Então: $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\hat{A} \cong \hat{A'}$ e $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso LAL de congruência de triângulos).

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe agora um exemplo de aplicação do caso de semelhança LAL.
Vamos verificar se estes triângulos são semelhantes.



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

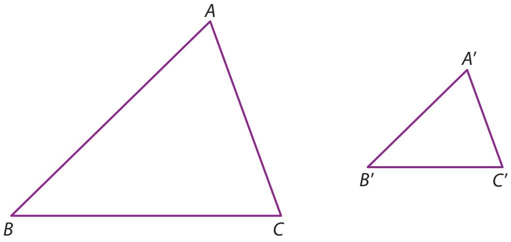
Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{A'}$ (dado)
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, pois $\frac{12}{9} = \frac{20}{15}$

Portanto, os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes pelo caso LAL.

Caso lado-lado-lado (LLL)

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



Hipótese: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Tese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

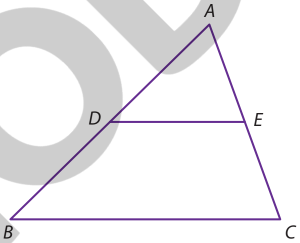
- **Demonstração**

Considerando que $AB > A'B'$, vamos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto *D*, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por *D*, traçamos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Pelo teorema fundamental da semelhança, temos $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Vamos mostrar, pelo caso LLL de congruência de triângulos, que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Como sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ (por construção), resta provar que $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e que $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Do teorema fundamental da semelhança ($\triangle ABC \sim \triangle ADE$), podemos escrever:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ ou, ainda, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Caso lado-lado-lado (LLL)

Apresente esse caso de semelhança ressaltando a diferença entre o caso de congruência de mesmo nome. Reproduza na lousa a demonstração com algumas lacunas e verifique se os estudantes conseguem completá-las antes de acompanharem o desenvolvimento no livro.

Pergunte a eles por que não é citado o caso ângulo-lado-ângulo (ALA) de semelhança. Espera-se que eles observem que, se já houver dois ângulos correspondentes congruentes, recairemos no caso AA, em que apenas um lado é correspondente a outro, não havendo proporção.

Exercícios propostos

Se julgar necessário, retome as relações entre ângulos já estudadas, que apareceram nos problemas envolvendo a aplicação dos casos de semelhança de triângulos, como é o caso de ângulos opostos pelo vértice e das relações entre os ângulos formados por duas paralelas e uma transversal.

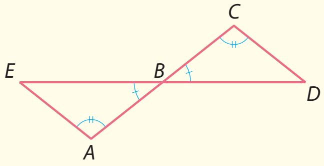
Comente com os estudantes quão importantes são nesses problemas a análise da figura e a identificação da congruência entre os ângulos e da proporcionalidade entre os lados com suas respectivas justificativas embasadas nos conceitos, nas propriedades e nos teoremas já estudados.

Segue uma possível resolução para o **exercício 22**.

Os ângulos internos com vértice em *B* são opostos pelo vértice; logo, são congruentes.

Os ângulos internos com vértices em *A* e *C* são ângulos alternos internos formados por paralelas cortadas por transversal; logo, são congruentes.

Portanto, pelo caso AA, os triângulos *ABE* e *CBD* são semelhantes.



RENAN ORACIC/
ARQUIVO DA EDITORA

A resolução do **exercício 23** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$ ou, ainda, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE}$, pois $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Comparando $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{DE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ (hipótese), temos: $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

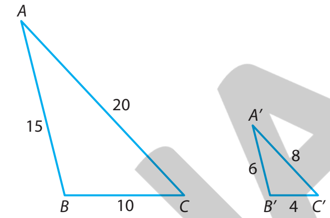
Então, $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Logo: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (pelo caso LLL)

Se $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos provar.

Observe um exemplo de aplicação do caso de semelhança LLL. Vamos verificar se os triângulos são semelhantes.

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

Nesses triângulos, os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ pois } \frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{20}{8}$$

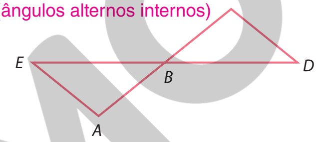
Portanto, os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes pelo caso LLL.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

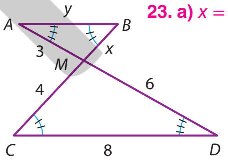
22 Prove que o $\triangle ABE$ e o $\triangle CBD$ são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. Para facilitar a visualização, refaça o desenho marcando os ângulos congruentes ou mudando a posição de um dos triângulos.

22. $\widehat{B}_1 \cong \widehat{B}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)
$\widehat{A} \cong \widehat{C}$ (ângulos alternos internos)



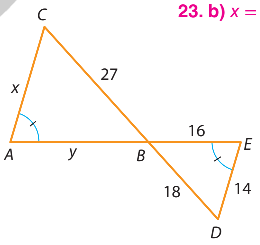
23 Calcule x e y em cada caso.

a)



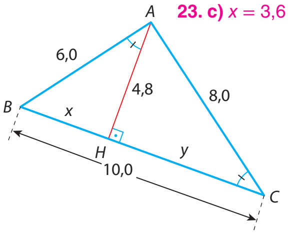
23. a) $x = 2$ e $y = 4$.

b)



23. b) $x = 21$ e $y = 24$.

c)



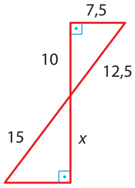
23. c) $x = 3,6$ e $y = 6,4$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

24 Identifique os triângulos semelhantes e calcule o valor de *x*.

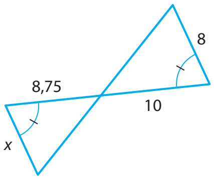
a)

24. a) $x = 12$



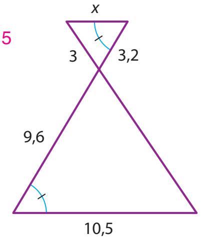
b)

24. b) $x = 7$



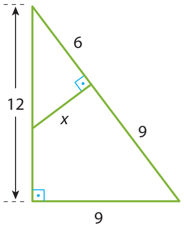
c)

24. c) $x = 3,5$



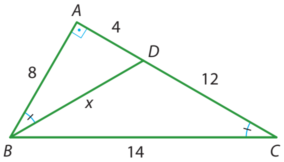
d)

24. d) $x = 4,5$

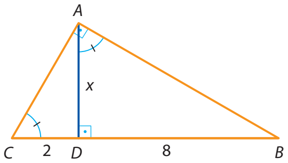


25 Mostre que os triângulos indicados são semelhantes e calcule o valor de *x*.

a) $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$ **25. a)** Demonstração; $x = 7$.

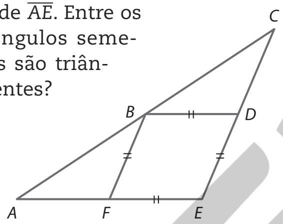


b) $\triangle ADB$ e $\triangle CDA$ **25. b)** Demonstração; $x = 4$.



26 Verifique quais triângulos são semelhantes, sabendo que $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$, $\overline{CE} \parallel \overline{BF}$ e que *F* é o ponto médio de $\overline{AE}$. Entre os pares de triângulos semelhantes, quais são triângulos congruentes?

26. $\triangle ACE \sim \triangle ABF$
$\triangle ACE \sim \triangle BCD$
$\triangle BCD \sim \triangle ABF$
$\triangle BCD \cong \triangle ABF$



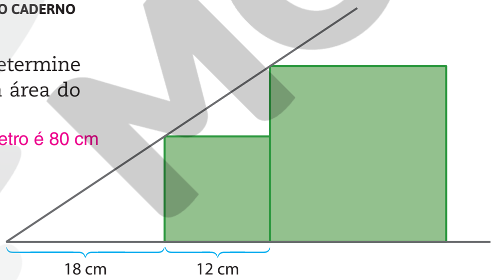
27 ***Hora de criar*** – Em duplas, com o auxílio de régua e transferidor, construam dois triângulos semelhantes cada um, utilizando um dos três casos de semelhança de triângulos. Troquem de caderno e verifiquem a semelhança entre os triângulos construídos pelo colega aplicando um caso de semelhança diferente do utilizado para a construção das figuras. Destroquem de caderno para a correção.

27. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe os dois quadrados da figura e determine a medida do perímetro e a medida da área do quadrado maior.

Pense mais um pouco...: A medida do perímetro é 80 cm e a medida da área é 400 cm².



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

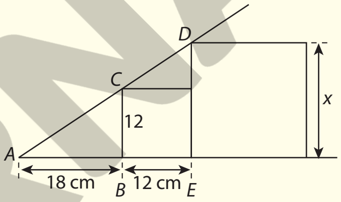
Nesse bloco de exercícios, peça a alguns estudantes que resolvam na lousa exercícios diferentes, mostrando a análise da figura, a identificação dos elementos e as justificativas. Essa proposta possibilita ampliar o repertório de estratégias de resolução dos estudantes.

As resoluções dos **exercícios 24** a **27** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Pense mais um pouco...

Apresentamos uma possível resolução da atividade proposta.

Analisando os dados, podemos desenhar a seguinte figura:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as condições do problema, aplicamos o teorema fundamental da semelhança e, assim, concluímos que os triângulos *ABC* e *AED* são semelhantes. Obtemos, então:

$$\frac{18}{30} = \frac{12}{x}$$

$18x = 360$

$x = 20$

Assim, para a medida do perímetro, obtemos:

$4 \cdot 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$

Para a medida da área, obtemos:

$20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$

Para saber mais

Nesta seção, é necessário providenciar com antecedência o material para que os estudantes realizem em conjunto a construção do pantógrafo e o utilizem.

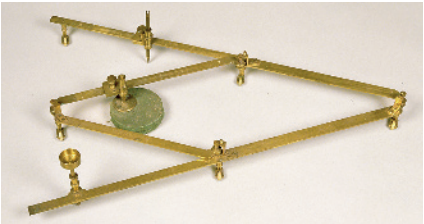
Se não for possível obter material para a construção de um pantógrafo por estudante, é possível formar duplas para usarem o mesmo instrumento. Acompanhe a atividade para garantir que todos tenham oportunidade de manipulá-lo.

Para ampliar a atividade com o pantógrafo, sugira aos estudantes que pesquisem quais profissionais fazem uso desse instrumento em seu trabalho.

PARA SABER MAIS

Construindo um pantógrafo

Pantógrafo é um aparelho usado para ampliar ou reduzir figuras em determinada razão. Esse aparelho foi desenvolvido no século XVII e vem sendo utilizado por artistas para auxiliar na cópia de desenhos em escala ampliada ou reduzida.

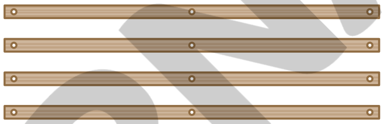


DREWEATT NEATE FINE ART AUCTIONEERS, NEWBURY, BERKS, UK/ BRIDGEMAN IMAGES/FOTOARENA – COLEÇÃO PARTICULAR

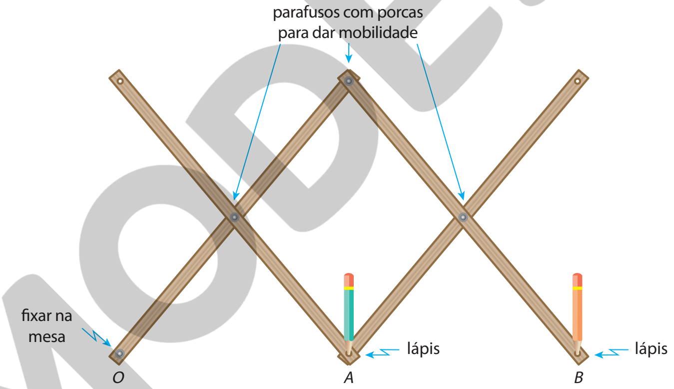
Pantógrafo do século XIX.

Para construí-lo, você vai precisar de:

- 4 ripas de madeira pequenas com as mesmas medidas de comprimento, perfuradas nas extremidades e no centro (peça ajuda a um adulto para evitar acidentes ao perfurar as ripas);
- 2 lápis;
- 3 parafusos com porcas, com medidas de diâmetro compatíveis com os furos nas ripas de madeira.



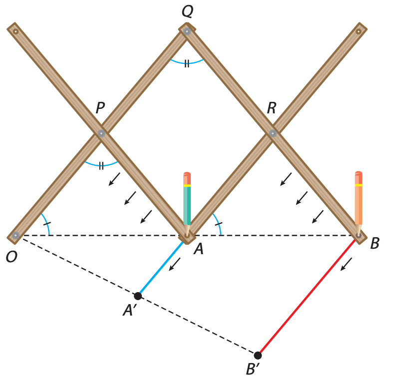
Com os materiais indicados, vamos montar o pantógrafo, conectando as ripas de madeira com os parafusos e as porcas de modo que as junções fiquem móveis; assim, as partes do pantógrafo podem se movimentar umas em relação às outras. Observe o esquema a seguir.

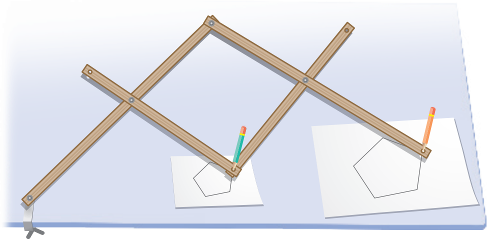


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para utilizar o pantógrafo, fixamos um ponto *O* sobre uma superfície plana, como uma mesa, e colocamos cada um dos lápis nos pontos *A* e *B* indicados no esquema. Quando movemos o lápis em *A*, contornando a imagem original que queremos ampliar, o lápis em *B* também se move, desenhando uma nova imagem semelhante à original, mas ampliada. Para reduzir uma imagem, devemos colocá-la sob o lápis no ponto *B*. Assim, quando movemos o lápis contornando a imagem original em *B*, o lápis em *A* também se move, desenhando uma nova imagem semelhante à original, mas agora reduzida.

Observe na figura a seguir que os triângulos *OPA* e *OQB* são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{OQ}{OP} = \frac{2}{1}$. Assim, quando você traçar com o lápis em *A* um segmento $\overline{AA'}$, o lápis em *B* traçará um segmento $\overline{BB'}$ com o dobro da medida de comprimento. É assim que uma imagem qualquer é ampliada com um pantógrafo.





ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

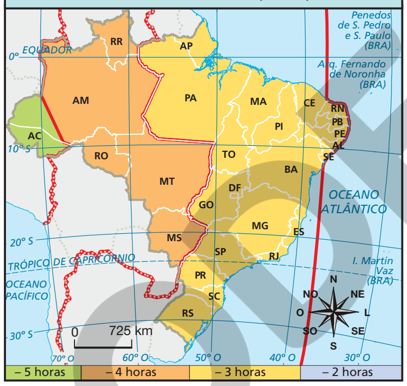
Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O pantógrafo também pode ser utilizado para a ampliação de mapas. Use o pantógrafo que você construiu para ampliar o contorno do mapa do Brasil, de acordo com a razão de semelhança $k = 2$. Não se esqueça de dar título ao mapa, de inserir legenda e rosa dos ventos (para indicar a orientação geográfica) e de corrigir a escala cartográfica de acordo com a ampliação.

1. Construção de figuras.

Fuso horário civil (2018)



SONIA VAZ/ARQUIVO DA EDITORA

Mapa elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101627. Acesso em: 31 maio 2022.

2 Se a razão de semelhança fosse $k = \frac{1}{2}$, como seria o novo mapa desenhado? Desenhe o contorno desse novo mapa utilizando seu pantógrafo. **2.** O novo mapa seria reduzido. Construção de figura.

Observação

- Perfurando as ripas em várias posições, você poderá montar e desmontar o pantógrafo, obtendo outras razões de semelhança.

  Por exemplo, se as ripas forem perfuradas em três partes iguais, você poderá triplicar as medidas lineares de uma figura ou reduzi-las a um terço.

Agora é com você!

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Sugerimos que as atividades sejam feitas em duplas, para facilitar o manuseio do pantógrafo e para que os estudantes, ao trocarem ideias sobre ampliação e redução de figuras semelhantes, aprimorem e enriqueçam o conjunto de conhecimentos e estratégias.

Sugerimos também que, inicialmente, as duplas ampliem e reduzam figuras mais simples, como triângulos e quadriláteros.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC: **EF09MA05** e **EF09MA22**.

Esta seção, ao apresentar os resultados de uma pesquisa que envolve tema de realidade social e identificar o gráfico conhecido como pirâmide etária como o mais adequado para representar os dados dessa pesquisa, favorece o desenvolvimento da habilidade (EF09MA22).

O tema apresentado pode ser aprofundado com base em uma pesquisa sobre a pirâmide etária em outras regiões do Brasil, em um trabalho interdisciplinar com Geografia. Proponha que, em grupos, os estudantes comparem e discutam as informações obtidas.

O contexto e as atividades propostos nesta seção também favorecem o trabalho com a habilidade (EF09MA05), pois os estudantes devem compreender o uso de porcentagem como taxa percentual para interpretar os dados apresentados. Além disso, podem-se fazer perguntas a eles que articulem outros aspectos dessa habilidade, como:

- Se, em 2010, a população do Brasil era cerca de 196 milhões, quantas pessoas eram do sexo feminino e tinham de 0 a 4 anos?

Para responder a esse tipo de pergunta, os estudantes devem adicionar os percentuais relativos às pessoas do sexo feminino (todos os das colunas "Mulheres (em porcentagem)", obtendo que são cerca de 49,4% e aplicar essa taxa percentual ao total de 196 milhões de pessoas para aplicar, então, o percentual relativo ao grupo etário em questão; assim obtemos 4,65 milhões de pessoas, pois:

$196 \cdot 0{,}494 \cdot 0{,}048 \simeq 4{,}65$

Explique aos estudantes que ao adicionar o percentual de pessoas do sexo feminino e o de pessoas do sexo masculino, obtêm-se 99,7%, não 100%, e que isso acontece devido às aproximações consideradas para os percentuais de cada grupo etário.

Incentive-os a elaborar e resolver outros problemas que articulem o desenvolvimento da habilidade (EF09MA05) utilizando o contexto proposto nesta seção.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Um gráfico chamado pirâmide etária

Os gráficos são muito comuns em Matemática e em Física. No entanto, outras ciências, como a Geografia, também fazem uso desse importante instrumento de análise de informações. Particularmente, o gráfico conhecido como **pirâmide etária** é frequente no estudo da distribuição da população de acordo com a idade e o sexo.

Observe a tabela a seguir com dados do Censo realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2010.

Distribuição da população na região Norte do Brasil por sexo e idade – 2010

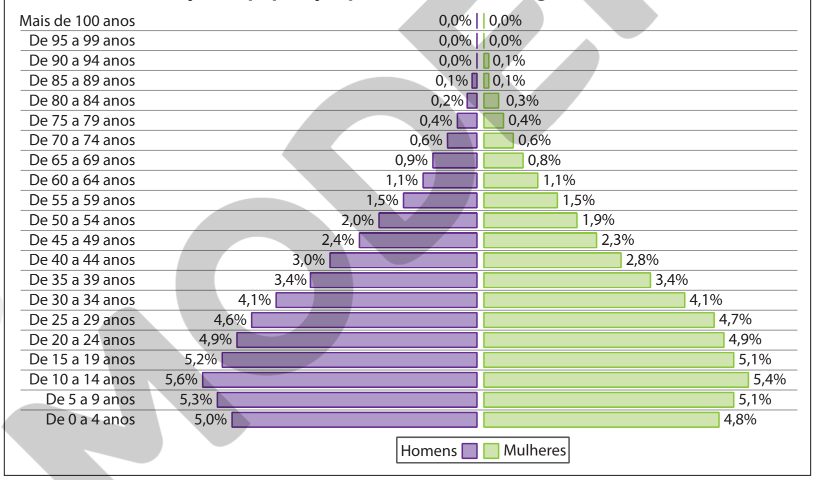
Grupo etário*	Homens (em porcentagem)	Mulheres (em porcentagem)	Grupo etário*	Homens (em porcentagem)	Mulheres (em porcentagem)
0 – 4	5,0	4,8	55 – 59	1,5	1,5
5 – 9	5,3	5,1	60 – 64	1,1	1,1
10 – 14	5,6	5,4	65 – 69	0,9	0,8
15 – 19	5,2	5,1	70 – 74	0,6	0,6
20 – 24	4,9	4,9	75 – 79	0,4	0,4
25 – 29	4,6	4,7	80 – 84	0,2	0,3
30 – 34	4,1	4,1	85 – 89	0,1	0,1
35 – 39	3,4	3,4	90 – 94	0,0	0,1
40 – 44	3,0	2,8	95 – 99	0,0	0,0
45 – 49	2,4	2,3	100 anos ou mais	0,0	0,0
50 – 54	2,0	1,9			

*Intervalo de idade, em anos, no qual o indivíduo se enquadra no momento da pesquisa.

Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo 2010**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/frm_piramide.php?codigo=1. Acesso em: 5 abr. 2022.

Os geógrafos costumam representar essas informações em uma pirâmide etária como esta.

Distribuição da população por sexo e idade – Região Norte – Brasil – 2010



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo 2010**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/frm_piramide.php?codigo=1. Acesso em: 5 abr. 2022.

Por meio desse gráfico, fica fácil saber que a maioria da população pesquisada (60,6%) é constituída por crianças, adolescentes e jovens de até 29 anos. Com base nesse gráfico, também é possível traçar um perfil da população, por sexo e por grupo etário, o que contribui na elaboração de projetos que atendam às suas necessidades, visto que esses dados indicam aos governos quanto e em que setores – educação, esporte e lazer, saúde etc. – se deve investir.

1. a) Não.

1. b) Maior, pois a população terá envelhecido; cerca de 64% da população acima de 60 anos em 2060, de acordo com a projeção.

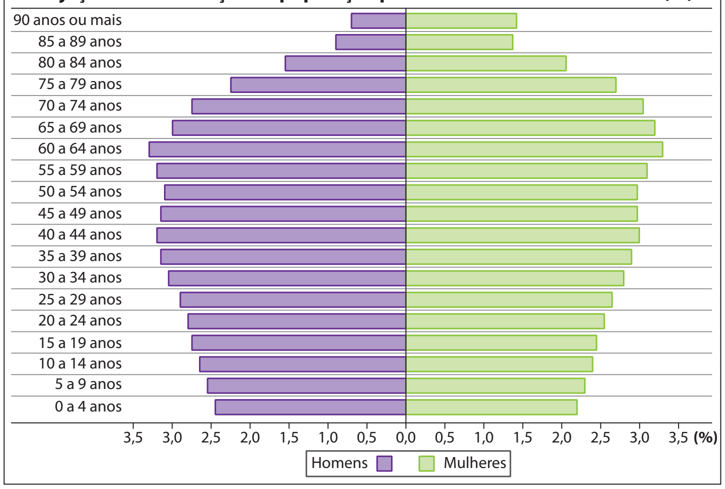
Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. c) Sim. Resposta possível: a aposentadoria, a pensão e a assistência médica e hospitalar aos idosos serão mais onerosas e terão menos contribuintes para lhes dar suporte.

1 Observe a pirâmide etária relativa à projeção da população do Brasil para 2060.

Projeção da distribuição da população por sexo e idade – Brasil – 2060 (%)



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeções da população do Brasil e Unidades da Federação por sexo e idade**: 2010-2060. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados. Acesso em: 31 maio 2022.

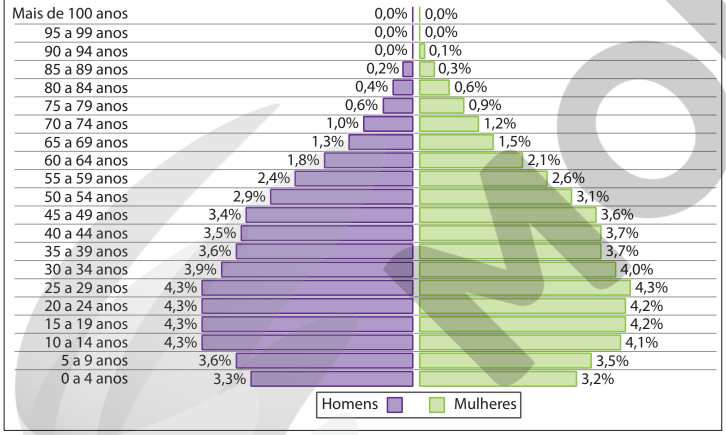
a) A maior parte dessa população também é constituída por crianças, adolescentes e jovens?

b) Em relação aos dias de hoje, os futuros governos do Brasil deverão destinar à terceira idade uma parte maior ou menor de seu orçamento? Por quê?

c) Pesquise previdência social e previdência privada. A mudança prevista no perfil da população brasileira afetará a atual situação previdenciária brasileira? Por quê?

2 Agora, observe a pirâmide etária relativa à população da região Sul do Brasil em 2010.

Distribuição da população por sexo e idade – Região Sul – Brasil – 2010



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo 2010**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/webservice/frm_piramide.php?codigo=4. Acesso em: 5 abr. 2022.

Que diferenças você observa nessa pirâmide em relação à da região Norte? **2.** Resposta pessoal.

Agora quem trabalha é você!

Para ampliar as questões propostas, sugira outras comparações de pirâmides etárias, por meio do exemplo a seguir.

Peça aos estudantes que identifiquem a faixa etária em que estarão no ano 2060 e qual será a porcentagem prevista da população referente a essa faixa etária.

Para a resolução dos **itens b** e **c** da **atividade 1**, favorecendo o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**, pode ser interessante comentar com os estudantes a estrutura etária em países desenvolvidos, onde a maior parte da população é constituída por adultos e o número de idosos é expressivo. Nesses países, a expectativa de vida comumente é alta (cerca de 85 anos para os homens e 90 anos para as mulheres), fato que influencia na distribuição de recursos pelo Estado e leva a reformas no sistema previdenciário, porque uma parte maior dos recursos econômicos do país deve ser destinada à aposentadoria e aos serviços de saúde para garantir a qualidade de vida da população idosa.

Sugestões de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos:

PROJEÇÕES indicam aceleração do envelhecimento dos brasileiros até 2100. **Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada**, out. 2021. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/portal/categorias/45-todas-as-noticias/noticias/10716-projecoes-indicam-aceleracao-do-envelhecimento-dos-brasileiros-ate-2100?highlight=WyJlbnZlbGhlY2ltZW50byJd. Acesso em: 23 jul. 2022.

O artigo analisa projeções populacionais para o Brasil com base em três cenários, evidenciando o processo de envelhecimento populacional e indicando que a mudança da estrutura etária do país é inevitável.

MIRANDA, G. M. D.; MENDES, A. C. G.; SILVA, A. A. O envelhecimento populacional brasileiro: desafios e consequências sociais atuais e futuras. **Revista Brasileira de Geriatria e Gerontologia**, n. 19, maio/jun. 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbgg/a/MT7nmJPPRt9W8vndq8dpzDP/?lang=pt. Acesso em: 23 jul. 2022.

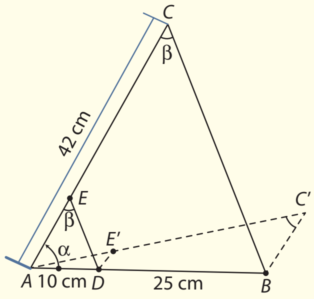
Nesse artigo, discutem-se os desafios atuais e futuros do envelhecimento populacional brasileiro com relação ao planejamento de políticas públicas.

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos tratados no capítulo e verificar possíveis dificuldades que ainda tenham. As atividades podem ser desenvolvidas em duplas, o que amplia e enriquece o repertório de estratégias deles e consolida os conhecimentos construídos. Proponha aos estudantes que refaçam atividades anteriores sobre os assuntos em que ainda tenham dificuldade.

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** e dos **exercícios 5** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **item a** do **exercício 4**, como foram dados apenas dois lados do triângulo *ABC* e não foram mencionados os ângulos internos, existem infinitos triângulos que satisfazem as exigências do enunciado. Vamos construir dois triângulos que podem ilustrar a situação.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

No **item b**, analisando o triângulo *ABC* e o triângulo *ADE*, verificamos que eles são semelhantes pelo caso AA, pois $\hat{A}$, de medida α, é ângulo comum, e os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{C}$ são ângulos correspondentes em retas paralelas, ou seja, são congruentes (de medida β). Assim, os lados correspondentes desses dois triângulos têm medidas proporcionais:

- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

  $\dfrac{35}{10} = \dfrac{42}{AE}$

  $AE = 12$

- $AC = AE + EC$

  $42 = 12 + EC$

  $EC = 30$

Portanto, $\overline{AE}$ mede 12 cm e $\overline{EC}$ mede 30 cm.

Note que nesses cálculos não foi usada a medida do lado $\overline{BC}$. Portanto, eles são válidos qualquer que seja a medida do lado $\overline{BC}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. b) Falsa. Resposta possível: dois triângulos semelhantes com razão de semelhança diferente de 1 não são congruentes.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

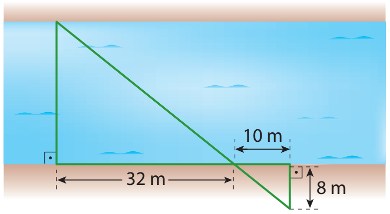
1 Classifique cada sentença a seguir em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.

a) Todos os triângulos congruentes são semelhantes. **1. a)** Verdadeira.

b) Todos os triângulos semelhantes são congruentes.

c) Dois triângulos isósceles que têm os ângulos do vértice congruentes são semelhantes. **1. c)** Verdadeira.

2 (Covest-PE) A figura a seguir representa um rio cujas margens são retas paralelas.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o inteiro mais próximo da largura do rio, medida em metro? **2.** 26

3 (Enem) A sombra de uma pessoa que mede 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir: **3.** Alternativa **b**.

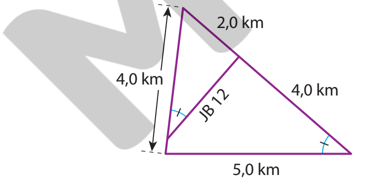
a) 30 cm.
b) 45 cm.
c) 50 cm.
d) 80 cm.
e) 90 cm.

4 Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo medem, respectivamente, 35 cm e 42 cm. No lado $\overline{AB}$, distante 10 cm de *A*, marca-se um ponto *D*. Por *D*, traça-se uma paralela a $\overline{BC}$, que encontra $\overline{AC}$ no ponto *E*. **4. a)** Construção de figura.

a) Construa uma figura que represente a situação. **4. b)** $AE = 12$ cm e $EC = 30$ cm.

b) Determine as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$.

5 O esquema a seguir representa a relação entre quatro estradas.

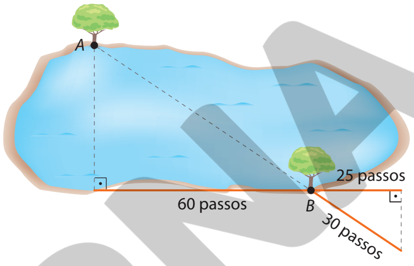


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine a medida do comprimento da estrada JB 12. **5.** 2,5 km

6 Os lados de um triângulo medem 15 cm, 20 cm e 25 cm. Calcule as medidas aproximadas dos lados de um triângulo semelhante a ele que tenha perímetro medindo aproximadamente 45 cm. **6.** Aproximadamente: 11 cm, 15 cm e 19 cm.

7 Observe no esquema a seguir o procedimento usado por Marcelo para determinar a medida da distância entre as árvores *A* e *B* próximas do lago.



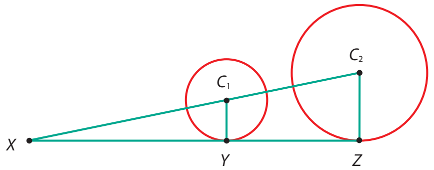
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que a medida do comprimento do passo de Marcelo é de 75 cm, determine a medida da distância entre essas árvores, em metro. **7.** 54 m

8 As medidas dos perímetros de dois triângulos semelhantes são 48 cm e 60 cm. As medidas das áreas deles são, respectivamente, 96 cm² e 150 cm². O maior lado do triângulo maior mede 25 cm. Determine a medida do maior lado do triângulo menor. **8.** 20 cm

9 Uma pessoa sobe uma rampa que mede 4,0 m de altura na parte mais alta. Após caminhar 12,3 m sobre a rampa, ela nota que está a 1,5 m de altura em relação ao solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. **9.** 20,5 m

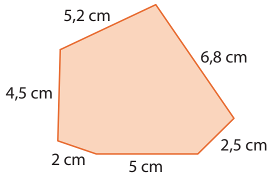
10 Na figura, o raio da circunferência menor mede 6 cm e o da maior mede 10 cm. Se $XC_1 = 30$ cm e $\overline{YC_1} /\!/ \overline{ZC_2}$, determine a medida do comprimento do segmento $\overline{C_1C_2}$. **10.** $C_1C_2 = 20$ cm



VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um arquiteto desenhou um pequeno esboço de um ambiente a ser decorado e, em seguida, reproduziu o desenho ampliando-o na razão 1:5 para inserir mais detalhes. A figura a seguir mostra o primeiro esboço feito pelo arquiteto.

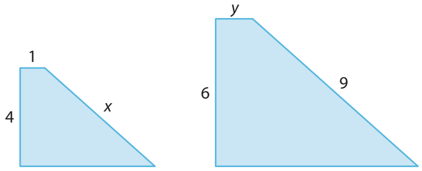


Com base nesse esboço, qual é a medida do perímetro do ambiente a ser decorado no desenho ampliado? **1.** Alternativa **d**.

a) 26 cm
b) 105 cm
c) 52 cm
d) 130 cm

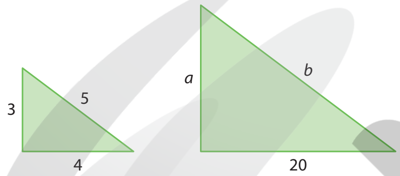
2 Para que os polígonos a seguir sejam semelhantes, os valores de x e de y devem ser, respectivamente: **2.** Alternativa **a**.

a) 6 e $\frac{3}{2}$.
b) $\frac{27}{2}$ e $\frac{3}{2}$.
c) 6 e $\frac{2}{3}$.
d) 3 e 2.

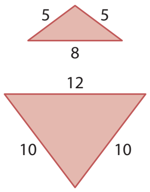


3 Para que os triângulos a seguir sejam semelhantes, os valores de a e b devem ser iguais, respectivamente, a: **3.** Alternativa **a**.

a) 15 e 25.
b) 9 e 15.
c) 12 e 20.
d) 9 e 25.



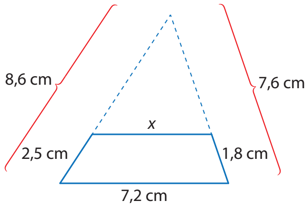
4 Os triângulos a seguir são semelhantes?



a) Sim, pois $\frac{8}{5} = \frac{12}{10}$.
b) Sim, pois $\frac{8}{5} \neq \frac{10}{12}$.
c) Não, pois $\frac{8}{5} \neq \frac{12}{10}$.
d) Não, pois $\frac{8}{5} \neq \frac{10}{12}$.

4. Alternativa **c**.

5 O quadrilátero a seguir foi obtido ao traçar um segmento de reta cortando dois lados de um triângulo e paralelo ao terceiro lado. Qual é a medida aproximada de x? **5.** Alternativa **b**.



a) 4,9 cm
b) 5,1 cm
c) 6,1 cm
d) 7,3 cm

6 O triângulo ABC é obtusângulo, $AB = x$ cm e os ângulos internos com vértices em A e em B são congruentes. Considerando um triângulo DEF tal que $DF = 3x$ cm, cujos ângulos com vértice em D e em F são congruentes entre si e, ainda, congruentes aos dois ângulos agudos do triângulo ABC, então, os triângulos ABC e DEF são:

a) congruentes (pelo caso ALA). **6.** Alternativa **d**.
b) congruentes (pelo caso LAA_o).
c) semelhantes (pelo caso LAL).
d) semelhantes (pelo caso AA).

7. Alternativa **b**.

7 Para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso LLL, é preciso que eles tenham:

a) lados correspondentes congruentes.
b) lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais.
c) ângulos correspondentes com medidas proporcionais.
d) ângulos correspondentes congruentes.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) Quais são as condições para que dois polígonos sejam considerados semelhantes?
b) Descreva cada um dos casos de semelhança de triângulos que você estudou.

Organizando: **a)** As medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais, e os ângulos correspondentes devem ser congruentes.
b) Caso AA: triângulos semelhantes se dois de seus ângulos correspondentes são congruentes; caso LAL: triângulos semelhantes se dois lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais e se os ângulos entre eles são congruentes; caso LLL: triângulos semelhantes se três lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando

Nesta seção são propostos testes que abordam os conteúdos apresentados ao longo deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado.

Caso os estudantes apresentem dúvidas em relação a algum dos testes propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo; assim eles também desenvolverão a autonomia no estudo.

As resoluções dos **testes 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Organizando

No **item a**, em tese, espera-se que os estudantes respondam apresentando as condições genéricas para que dois polígonos sejam semelhantes: medidas dos lados correspondentes proporcionais; ângulos correspondentes congruentes.

No **item b**, verifique se os estudantes conseguem descrever os casos de semelhança apresentando um exemplo de triângulos semelhantes para cada caso (AA, LAL, LLL). Lembre-se de verificar se as medidas dos lados de cada triângulo satisfazem as condições de existência do triângulo: medida do lado maior é menor do que a soma das medidas dos outros lados; medida do lado menor é maior do que a diferença das medidas dos outros lados.

Diversificando

Esta seção explora a construção de uma câmara escura de orifício e a imagem projetada por meio dela.

As atividades propostas no **Agora é com você!** podem ser feitas com os estudantes organizados em duplas.

Solicite a eles que, em duplas, construam com uma caixa de papelão uma câmara escura de orifício e que desenhem na folha de papel vegetal a reprodução da imagem de um objeto à sua escolha.

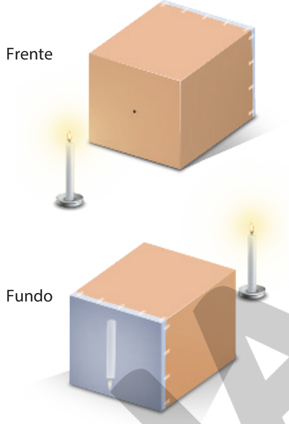
A resolução da **atividade 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

DIVERSIFICANDO

Câmara escura de orifício

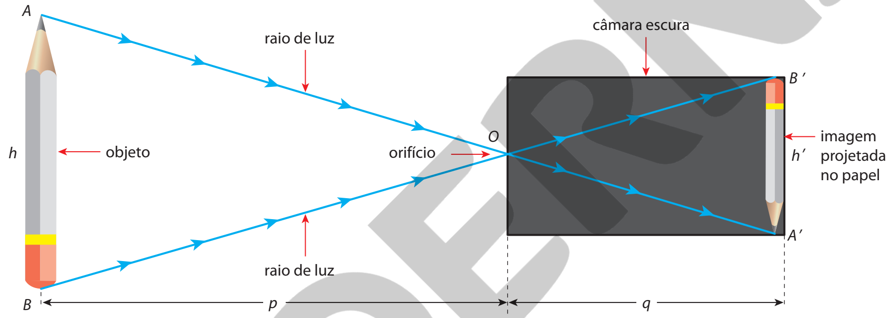
A câmara escura de orifício, precursora das câmeras fotográficas modernas, é um dispositivo óptico muito simples, pois forma imagens apenas com a focalização dos raios de luz ao atravessarem um pequeno orifício. Ela pode ser feita com uma caixa ou uma lata qualquer, desde que suas paredes internas sejam opacas e escuras. De um lado, deve ter um pequeno orifício e, na parte oposta, uma folha de papel branca.

Quando apontamos o orifício da câmara escura para um objeto iluminado, observamos a projeção da imagem invertida desse objeto sobre o papel. Isso ocorre em virtude de uma importante propriedade da luz, que é a de se propagar em linha reta. Observe o esquema a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

(Representação esquemática. As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)



Os triângulos *OBA* e *OB'A'* são semelhantes.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse esquema, h é a medida da altura do objeto, h' é a medida da altura da imagem projetada e da caixa também, p é a medida da distância do objeto até o orifício e q é a medida da distância da imagem até o orifício. Os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes: $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$, $A\hat{B}O \cong A'\widehat{B'}O$ e $B\hat{A}O \cong B'\widehat{A'}O$. Portanto, por semelhança, $h \cdot q = p \cdot h'$.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Resposta esperada: com a câmara escura um artista pode projetar cenas reais e a imagem de qualquer objeto diretamente no papel ou em telas e simplesmente desenhar por cima da imagem projetada, o que torna muito mais fácil a criação de desenhos em perspectiva.

1 Originalmente desenvolvida como um instrumento científico e muito utilizada na Antiguidade para observações astronômicas, a câmara escura se tornou popular entre os artistas do século XVI como um instrumento para auxiliar na criação de pinturas e facilitar o desenho em perspectiva. Explique como a câmera escura poderia auxiliar um artista na criação de uma pintura.

2 Felipe usou uma caixa de formato cúbico, com aresta medindo 20 cm de comprimento, para fazer uma câmara escura e retratar um quadro pendurado na parede de sua casa. Qual é a medida mínima da distância que esse quadro, de 50 cm × 50 cm, deve ficar do orifício da câmara para aparecer por inteiro no papel? **2.** A medida da distância do quadro até o orifício deve ser de, no mínimo, 50 cm.

Capítulo

6

Um pouco mais sobre Estatística

BJDLZX/E+/GETTY IMAGES

Observe, leia e responda no caderno. **a)** Resposta pessoal.

a) Você tem o hábito de acompanhar a previsão meteorológica para a cidade em que você vive? Se tem, com que frequência?

b) Em sua opinião, a faixa percentual de acerto da precisão meteorológica veiculada pela imprensa situa-se em:
   a) 0% a 33%;
   b) 34% a 66%;
   c) 67% a 100%.

c) Pesquise quais são as principais variáveis de monitoramento para a previsão meteorológica.

d) Escreva sobre a importância da previsão meteorológica para as seguintes atividades: agricultura e pesca, navegação marítima e aérea, turismo.

> “Céu vermelho à noite, alegria do pastor...
> Céu vermelho pela manhã, alerta para o pastor.”

Rebanho de ovelhas pastando em colina durante o pôr do sol. (Fotografia de 2015).

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam com base em observações feitas no local em que vivem.

“Céu vermelho à noite, alegria do pastor... Céu vermelho pela manhã, alerta para o pastor”. Mencionando esse ditado popular inglês, a BBC (British Broadcasting Corporation) propõe um desafio sobre a probabilidade de o pastor de ovelhas acertar a previsão meteorológica .

Dados obtidos em: BBC Brasil. Disponível em: http://www.bbc.com/portuguese/geral-42286388. Acesso em: 1 abr. 2022.

Observar os fenômenos da natureza sempre foi importante para desenvolver práticas de cultivo em diferentes épocas e para diferentes povos. Atualmente, a Probabilidade e a Estatística continuam sendo essenciais para diversas práticas agrícolas que têm na meteorologia uma ferramenta para, por exemplo, planejar, tomar decisões e evitar perdas ou prejuízos.

c) Temperatura, umidade relativa do ar, direção e velocidade do vento, pressão atmosférica, precipitação etc.

d) Planejamento para uma boa produção; segurança à tripulação, passageiros e aos navios e aeronaves; garantia de boa diversão.

Sugestões de leitura

Previsibilidade. **METEOBLUE.** Disponível em: https://content.meteoblue.com/pt/especificacoes/variaveis-meteorologicas/previsibilidade. Acesso em 13 jun. 2022.

Nesta página, apresentam-se alguns conceitos sobre previsibilidade e probabilidade relacionados à previsão do tempo.

SANTOS, A. C. C. INMET chama atenção para elevação de temperatura no país. **Instituto Nacional de Meteorologia.** Disponível em: https://portal.inmet.gov.br/noticias/inmet-chama-atenção-para-elevação-de-temperatura-no-país. Acesso em: 13 jun. 2022.

Nesta matéria, apresentam-se causas naturais para as mudanças climáticas e outras associadas às ações humanas.

Capítulo 6 – Um pouco mais sobre Estatística

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo retoma e amplia assuntos tratados no campo da Estatística ao longo dos anos anteriores. Trabalha as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e apresenta o desvio médio absoluto, uma medida de dispersão. Além disso, explora cálculos de probabilidade e cálculos de porcentagem no contexto de juro.

Aproveite o tema de abertura para retomar o conceito de probabilidade e averiguar os conhecimentos que os estudantes já construíram sobre esse tema, explorando informalmente com eles a situação do ditado popular inglês apresentado.

O trabalho com os **itens a** a **d** e o contexto sobre previsão do tempo possibilita aos estudantes discutirem sobre probabilidade e previsibilidade. Incentive-os a pesquisar a diferença entre esses termos no que se refere à previsão do tempo. Eles também podem pesquisar a probabilidade de precipitação. Essa atividade de pesquisa pode ser realizada por meio de um trabalho interdisciplinar com Ciências. Sugerimos discutir as mudanças climáticas e o papel da ação humana, bem como a importância do uso sustentável e consciente dos recursos naturais. Pode-se incentivar os estudantes a propor iniciativas individuais e coletivas para a solução de problemas ambientais da cidade ou da comunidade e a justificar a importância de unidades de conservação para a preservação da biodiversidade, da urbanização planejada e da redução do desmatamento. Dessa maneira, é possível os estudantes desenvolverem a **competência geral 10**, pois percebem a importância de ações individuais e coletivas e de tomadas de decisões pautadas na sustentabilidade.

1. Recordando as medidas de tendência central

Habilidades da BNCC:
EF09MA22 e **EF09MA23**.

Este tópico retoma e amplia o estudo sobre medidas de tendência central moda, media e média aritmética e possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF09MA23). Se julgar necessário, retome os conceitos de amostra, variável estatística e frequência.

Formule situações com os estudantes para levantar dados do grupo e montar tabelas de frequências. Envolva variáveis qualitativas e variáveis quantitativas. Este trabalho possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF09MA22). Se julgar conveniente, explore a elaboração de gráficos, discutindo com os estudantes aqueles que são mais pertinentes a cada situação. Em seguida, proponha que determinem a moda em todas as situações e, nos grupos de dados numéricos, peça a eles que calculem a média e a mediana.

Explore o significado dessas três medidas de posição (ou de tendência central). Peça aos estudantes que:

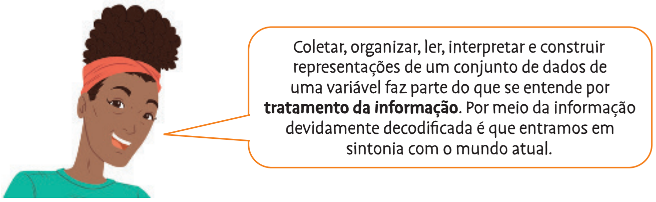
- indiquem quando podem calcular cada uma dessas medidas;
- identifiquem o que essas três medidas têm de diferente;
- expliquem como se determina cada uma delas.

Organize os estudantes em duplas e proponha que elaborem uma tabela de distribuição de frequências correspondente a uma situação na qual possam ser obtidas as três medidas de tendência central: média, moda e mediana.

Depois, troque as situações criadas entre as duplas de modo que cada uma calcule as três medidas na situação criada por outra dupla.

Ao final, faça uma correção coletiva, em uma roda de conversa, socializando as situações criadas e as resoluções.

1 Recordando as medidas de tendência central



A necessidade de compreender informações veiculadas por meio de diversas linguagens e plataformas indica a importância da habilidade de coletar dados e analisar informações por meio de instrumentos como tabelas, gráficos, mapas, esquemas, algoritmos etc.

Também é importante aprender a efetuar cálculos de medidas de tendência central e medidas de dispersão.

Assim, desenvolvemos a capacidade de resolver e formular problemas, tomar decisões e fazer previsões que possibilitarão realizar escolhas mais adequadas, pautadas na análise dos dados e das opções.

Vamos considerar uma situação na qual recordaremos alguns conceitos.

A tabela apresenta o resultado de uma pesquisa sobre o número de avós que residem na mesma casa de cada estudante do 9º ano.

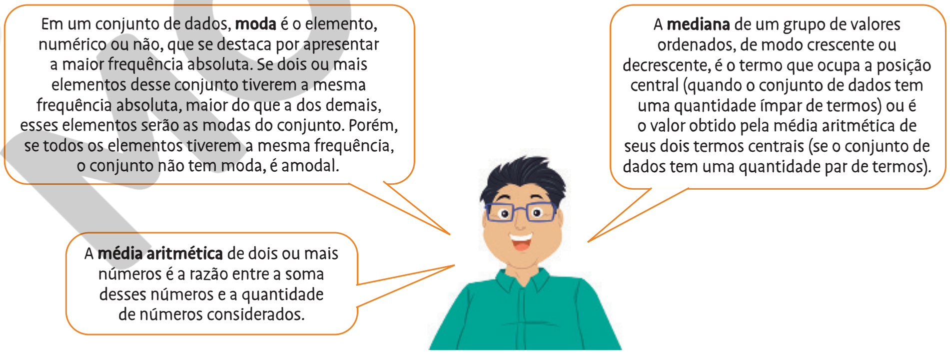
Avós e netos na mesma casa

Número de avós residentes	0	1	2	3	4
Frequência absoluta	19	19	9	2	1

Dados fictícios.

Embora essa seja uma situação bastante simples e os valores da variável número de avós que residem na casa do estudante já estejam organizados na tabela de distribuição de frequências, ainda podemos observar outros aspectos desse conjunto de valores por meio das medidas de tendência central.

Vamos recordar as medidas de tendência central **moda**, **média aritmética** e **mediana**.



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

No exemplo da pesquisa em relação ao número de avós, obtemos:

- As modas do número de avós que residem na casa dos estudantes do 9º ano, por terem maior frequência (19), são 0 e 1.
- A média aritmética é dada por:

$$\frac{19 \cdot 0 + 19 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{19 + 19 + 9 + 2 + 1} = \frac{47}{50} = 0{,}94$$

- Escrevendo em ordem crescente os dados referentes ao número de avós que residem na casa dos estudantes do 9º ano, isto é, escrevendo o rol, e destacando os dois termos centrais, obtemos:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4

Como o número de elementos é par, a mediana é dada pela média aritmética desses dois termos centrais: $\frac{1 + 1}{2} = 1$

Quanto à distribuição dos valores, ainda podemos observar que ela apresenta **amplitude** igual a 4, que é a diferença entre o maior e o menor valor da variável estudada, ou seja, $4 - 0 = 4$; no caso, o número de avós que residem na casa dos estudantes do 9º ano.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A tabela mostra o número de irmãos dos estudantes do 9º ano E. Qual das alternativas representa melhor a média aritmética, a moda e a mediana do número de irmãos dos estudantes do 9º ano E, respectivamente? **1.** Alternativa **a**.

Pesquisa do 9º ano E

Número de irmãos	Frequência absoluta
0	5
1	15
2	10
3	15
4	5

Dados obtidos pelos estudantes.

a) 2 irmãos, 1 e 3 irmãos, 2 irmãos.
b) 2,7 irmãos, 4 irmãos, 2 irmãos.
c) 1,7 irmão, 1 irmão, 4 irmãos.
d) 2,1 irmãos, 3 irmãos, 2 irmãos.
e) 1,7 irmão, 1 e 3 irmãos, 3 irmãos.

2 Observe as notas obtidas em uma avaliação de Matemática por um grupo de 5 estudantes:

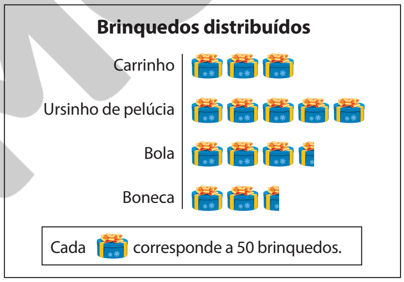
7,0 5,5 4,0 6,0 8,5

a) Calcule a média aritmética das notas obtidas por esses estudantes. **2. a)** 6,2
b) Considerando essas notas, determine a mediana e a moda. **2. b)** A mediana é 6,0, e a moda não existe.
c) Dos 5 estudantes, quantos obtiveram nota abaixo da média do grupo? **2. c)** Três estudantes.

3 Uma associação beneficente distribui brinquedos para crianças no mês de Outubro. Observe no gráfico a distribuição do último ano.

a) Qual é o brinquedo modal? **3. a)** Ursinho de pelúcia.
b) Construa uma tabela de distribuição de frequência para essa situação. **3. b)** Construção de tabela.
c) É possível calcular a média para essa situação?
d) Essa situação seria melhor apresentada se estivesse em um gráfico de linha?

3. c) Não, pois a variável **brinquedo** não é um número.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela associação beneficente.

3. d) Não, pois o gráfico de linha é usado principalmente para representar um fenômeno no decorrer do tempo.

Exercícios propostos

Este bloco de exercícios explora as medidas estatísticas estudadas e possibilita aos estudantes aplicarem e ampliarem sua compreensão acerca das medidas de tendência central média, moda e mediana.

As resoluções dos **exercícios 1**, **2** e **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

No **exercício 3**, incentive os estudantes a analisar o gráfico apresentado. Verifique se eles reconhecem o tipo de gráfico – um pictograma – e se identificam seus elementos. Proponha alguns questionamentos sobre o gráfico que os auxiliem na resolução do exercício, por exemplo:

- O que significa o símbolo da caixinha de presente? (Resposta: Espera-se que reconheçam que ela indica uma quantidade fixa de brinquedos distribuídos, no caso, 50 brinquedos.)
- Quantas bonecas foram distribuídas? (Resposta: Os estudantes devem interpretar o significado da “meia caixinha de presente”, associando seu valor à metade do valor de uma caixinha inteira, ou seja, meia caixinha corresponde a 25 brinquedos distribuídos. Assim, podem concluir que foram distribuídas 125 bonecas.)

No **item b**, uma possível tabela é a que segue:

Brinquedos distribuídos

Tipo de brinquedo	Frequência absoluta
Carrinho	150
Ursinho de pelúcia	250
Bola	175
Boneca	125

Dados obtidos pela associação beneficente.

No **item d**, os estudantes se deparam com a análise do tipo de gráfico mais adequado para comunicar as informações coletadas. Amplie essa discussão, retomando com eles os diferentes tipos de gráfico já estudados (gráfico de colunas, de barras, de setores etc.).

2. Medida de dispersão – desvio médio absoluto

Habilidade da BNCC: **EF09MA23**.

As medidas de dispersão (ou de variabilidade) são as medidas estatísticas que tratam dessa caracterização.

As medidas de tendência central de um conjunto de dados nos dão a ideia da concentração desses dados em torno de um valor (média, moda ou mediana); no entanto, elas não nos informam quanto esses dados estão dispersos, ou seja, não caracterizam a amostra quanto à variabilidade (ou espalhamento) dos dados.

No cálculo do desvio padrão, utilizamos o desvio médio absoluto, de que tratamos neste capítulo. O desvio padrão e a variância são medidas de dispersão estudadas no Ensino Médio.

4 (Enem) Depois de jogar um dado em formato de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente:

a) 3, 2 e 1.
b) 3, 3 e 1.
c) 3, 4 e 2.
d) 5, 4 e 2.
e) 6, 2 e 4.

4. Alternativa **b**.

5 *Hora de criar* – Imagine uma variável – pode ser idade, altura, massa, dia do aniversário etc. Pesquise entre os colegas de turma e organize os dados dessa variável. Com eles, crie um problema sobre média aritmética, moda e mediana. Troque-o com um colega e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

5. Resposta pessoal.

2 Medida de dispersão – desvio médio absoluto

Acompanhe a situação a seguir.

Uma rede de lanchonetes encomendou uma pesquisa para decidir entre duas empresas fornecedoras de achocolatados.

A pontualidade na entrega, as condições de pagamento e o preço do produto eram equivalentes, porém a porcentagem de cacau variava nos diversos lotes em ambas as empresas.

DAR1930/SHUTTERSTOCK

Sementes de cacau e cacau em pó, usado em produtos como o achocolatado.

Nessa pesquisa foram examinados ao acaso potes de 8 lotes com o seguinte resultado:

Teor de cacau em amostras de achocolatados								
Empresa A	43%	47%	49%	49%	49%	50%	51%	54%
Empresa B	43%	46%	48%	49%	49%	51%	52%	54%

Dados obtidos pela rede de lanchonetes.

Para comparar os resultados, foram obtidas as **medidas estatísticas de tendência central**.

- A moda de A é 49, e a moda de B é 49.

  As modas são iguais.

- A mediana de A é: $\frac{49 + 49}{2} = 49$; a mediana de B é: $\frac{49 + 49}{2} = 49$

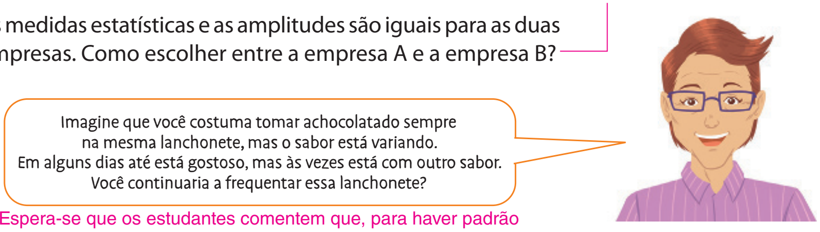
  As medianas são iguais.

- A média aritmética de A é: $\frac{43 + 47 + 49 + 49 + 49 + 50 + 51 + 54}{8} = \frac{392}{8} = 49$;

  a média aritmética de B é: $\frac{43 + 46 + 48 + 49 + 49 + 51 + 52 + 54}{8} = \frac{392}{8} = 49$.

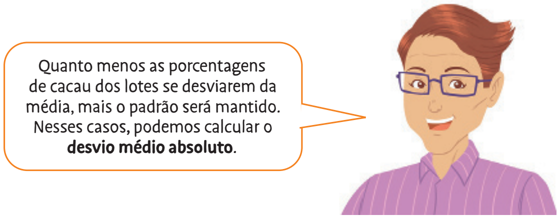
  As médias aritméticas são iguais.
- As amplitudes de A e de B são iguais a 11 (54 – 43).
- As medidas estatísticas e as amplitudes são iguais para as duas empresas. Como escolher entre a empresa A e a empresa B?

Espera-se que os estudantes percebam que, neste caso, apenas com as medidas estatísticas consideradas e amplitudes, não é possível definir a empresa mais adequada.



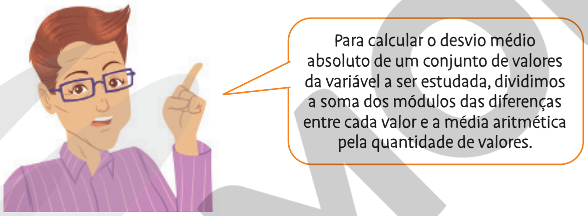
Espera-se que os estudantes comentem que, para haver padrão de qualidade, é importante manter o sabor do achocolatado.

Em uma reunião, os cozinheiros consultados observaram a importância de os lotes de achocolatado apresentarem regularidade na composição de cacau para manterem o padrão ao qual os fregueses se acostumaram.



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

O **desvio médio absoluto D_m** de um conjunto de valores de uma variável estudada mede o grau de dispersão e de concentração dessa variável. Quanto maior o desvio médio absoluto, maior é a dispersão e menor é a concentração, ou seja, em média, os valores se afastam mais da média aritmética. E vice-versa.



Lembrando: as médias aritméticas de A e de B são iguais a 49.

$$D_{mA} = \frac{|43 - 49| + |47 - 49| + |49 - 49| + |49 - 49| + |49 - 49| + |50 - 49| + |51 - 49| + |54 - 49|}{8}$$

$$D_{mA} = \frac{6 + 2 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 + 5}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

Medida de dispersão – desvio médio absoluto

Para ampliar a compreensão dos estudantes quanto às medidas de tendência central, a amplitude e o desvio médio de um conjunto de dados, sugerimos desenvolver uma atividade utilizando planilhas eletrônicas.

Nesses *softwares* é possível digitar um conjunto de dados e utilizar as ferramentas dele para determinar automaticamente tais medidas. Ao organizar as informações na planilha eletrônica de modo a obter essas medidas automaticamente, podem-se desenvolver atividades investigativas que propiciem aos estudantes compreender o significado de cada medida. Por exemplo, se entrarem com um conjunto de seis dados sendo todos iguais a 10, a média será 10, o desvio médio absoluto será 0 e a amplitude será 0 também. Ao mudar algum dos valores desse conjunto de dados para 0 e outros dois para 5, obtêm-se desvio médio absoluto igual a 3,125, média igual a 7,5 e amplitude igual a 10.

Incentive-os a explorar diferentes conjuntos de dados a fim de perceber como as medidas de tendência central e a amplitude auxiliam na interpretação deles.

Esse tipo de atividade utilizando recursos tecnológicos favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois os estudantes podem utilizar os recursos das planilhas eletrônicas para resolver problemas e para produzir conhecimentos. Além disso, podem desenvolver a **competência geral 7** à medida que compreendem o significado das medidas de tendência central e da amplitude em cada situação que simulam e precisam justificar e argumentar sobre a alteração em relação à mudança dos valores do conjunto de dados.

Medida de dispersão – desvio médio absoluto

Sugerimos ampliar o estudo contextualizando-o com situações reais e significativas em que as medidas de tendência central e de dispersão possam ser utilizadas. Um exemplo são pesquisas de opinião ou pesquisas de intenção de votos, comuns de serem realizadas em anos eleitorais, e que podem ter reflexos na realidade social. Se julgar conveniente, pode-se tratar de pesquisas amostrais e de como as medidas estatísticas auxiliam na compreensão dos dados. Assim, os estudantes desenvolvem a **competência geral 1**, pois podem perceber como os conhecimentos matemáticos auxiliam na explicação da realidade e a importância de compreendê-los para produzir uma sociedade mais justa e democrática.

Sugestão de leitura

POZZEBOM, E. R. Como são feitas as pesquisas eleitorais. **Agência Senado**, 24 set. 2014. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2014/09/24/como-sao-feitas-as-pesquisas-eleitorais. Acesso em: 22 jul. 2022.

Nesta matéria, apresentam-se algumas informações sobre pesquisas eleitorais, amostra e erros que podem ocorrer em pesquisas desse tipo.

Exercícios propostos

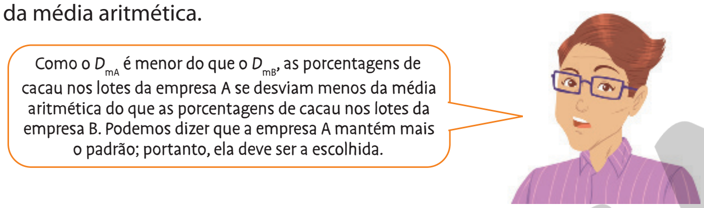
A resolução do **exercício 6** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

$D_{mA} = 2$ significa que os valores do conjunto de dados de A se distanciam, em média, 2 pontos percentuais da média aritmética.

$$D_{mB} = \frac{|43 - 49| + |46 - 49| + |48 - 49| + |49 - 49| + |49 - 49| + |51 - 49| + |52 - 49| + |54 - 49|}{8}$$

$$D_{mB} = \frac{6 + 3 + 1 + 0 + 0 + 2 + 3 + 5}{8} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

$D_{mB} = 2{,}5$ significa que os valores do conjunto de dados de B se distanciam, em média, 2,5 pontos percentuais da média aritmética.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

6 Os irmãos Caio e Cauê estudam na mesma turma. Ao término do ano letivo, tiveram como resultados bimestrais os dados da tabela a seguir.

Avaliação bimestral de Caio e Cauê

Bimestre	1º		2º		3º		4º	
Disciplina	**Caio**	**Cauê**	**Caio**	**Cauê**	**Caio**	**Cauê**	**Caio**	**Cauê**
Língua Portuguesa	7,0	5,0	7,0	7,5	7,0	7,5	7,0	9,0
Inglês	6,0	4,5	5,5	6,0	6,5	7,5	6,5	6,0
História	7,5	5,5	7,5	7,0	8,0	7,5	8,0	8,5
Geografia	8,0	5,0	7,5	8,0	8,0	7,5	7,5	9,0
Ciências	7,5	6,0	7,5	7,5	7,0	7,5	8,0	8,5
Matemática	9,5	5,5	9,5	8,0	10	7,5	9,5	8,0

Dados obtidos por Caio e Cauê.

a) Calcule as modas das notas de cada irmão. **6. a)** Caio: 7,5; Cauê: 7,5.

6. b) Não há moda; idem.

b) Qual é a moda de Caio em Língua Portuguesa? E qual é a moda de Cauê no 3º bimestre?

c) Qual é a mediana das notas de Caio em Matemática? E de Cauê? **6. c)** 9,5; 7,75.

d) Suponha que a média mínima de aprovação em cada matéria seja 6,0 e que todos os bimestres tenham o mesmo peso. Algum deles foi reprovado em alguma das disciplinas? **6. d)** Não.

e) Qual é o desvio médio absoluto de cada um deles em Geografia? E no 1º bimestre?

f) Qual dos dois teve aproveitamento mais regular em Geografia? E no 1º bimestre? **6. f)** Caio; Cauê.

g) Em Língua Portuguesa, qual é o desvio médio absoluto de cada irmão? **6. g)** Caio: 0; Cauê: 1,125.

h) No 3º bimestre, qual é o desvio médio absoluto de cada irmão? **6. h)** Caio: ≃ 0,9; Cauê: 0.

6. e) Caio: 0,25, Cauê: 1,1875; Caio: ≃ 0,8, Cauê: ≃ 0,4.

7 *Hora de criar* – Troque com um colega um problema, criado individualmente por vocês, sobre desvio médio absoluto. Para isso, elabore ou obtenha por meio de uma pesquisa um conjunto de valores de uma variável numérica qualquer. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

7. Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Pesquisando sobre o mercado de trabalho

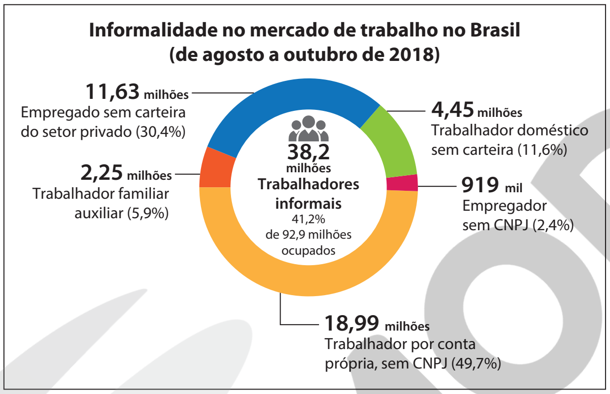
Diferentemente do que ocorria há 20 ou 50 anos, o cenário atual no mercado de trabalho é de redução da necessidade de mão de obra "física", devido ao uso cada vez mais frequente de máquinas, por exemplo. Além disso, cada vez mais, recursos tecnológicos podem ser operados por inteligência artificial. Entre outros fatores, isso, contribui para a redução da necessidade de mão de obra qualificada, isto é, especializada em determinadas áreas.

Apesar da dificuldade que pode ser ingressar no mercado de trabalho para a maioria dos jovens, alguns conseguem se destacar criando soluções inovadoras com *startups* e empresas ligadas à tecnologia. Psicólogos do trabalho indicam que estudar seja a porta de entrada para o mercado de trabalho, mas apontam que apenas ter um diploma de ensino superior ou de ensino técnico, por exemplo, pode não ser suficiente. Para ir além, é importante estar atento às mudanças sociais e tecnológicas e às tendências de sustentabilidade e diversidade, de modo a perceber necessidades atuais e promover mudanças que causem impacto na sociedade.


CAVAN IMAGES/GETTY IMAGES

Alguns dados indicam uma precarização do mercado de trabalho, com um crescente número de trabalhos informais ou subempregos.

Informalidade no mercado de trabalho no Brasil (de agosto a outubro de 2018)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua Mensal**. Rio de Janeiro: IBGE, 2015-. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=73086. Acesso em: 27 jul. 2022.

Os jovens formam um dos grupos mais afetados pelo desemprego no Brasil. Dos quase 14 milhões de desempregados no quarto trimestre de 2020, cerca de 70% eram pessoas na faixa-etária entre 14 e 24 anos de idade, segundo dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD), realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Com a inserção das novas tecnologias, esse grupo encontra um mercado de trabalho cada vez mais exigente e consequentemente com mais dificuldades para garantir novas oportunidades.

Fonte: PIERRI, V. Desemprego entre os jovens aponta mercado de trabalho desafiador. **Jornal da USP**, Ribeirão Preto, 6 abr. 2021. Disponível em: https://jornal.usp.br/atualidades/desemprego-entre-os-jovens-aponta-mercado-de-trabalho-desafiador/. Acesso em: 27 jul. 2022.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA23**.

O contexto dessa seção favorece o desenvolvimento da **competência geral 6**, pois os estudantes podem discutir vivências e experiências que lhes possibilitem compreender relações próprias do mundo do trabalho. Além disso, a habilidade (EF09MA23) é desenvolvida à medida em que eles realizam uma pesquisa.

Peça aos estudantes que se reúnam em duplas e façam a leitura do texto, destacando as informações que julgarem mais importantes.

Caso perceba dificuldade de entendimento do gráfico apresentado, auxilie-os, por exemplo, orientando-os para a leitura das legendas distinguidas pelas cores. Peça que verifiquem se a adição das porcentagens das partes totalizam 100%.

Outra ação conveniente para o entendimento dos dados é verificar se a soma das quantidades de trabalhadores indicadas coincide com os 38,2 milhões de trabalhadores informais e se esse número corresponde a 41,2% de 92,9 milhões.

Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos nas práticas sociais de modo a investigar, interpretar e avaliar criticamente as informações e produzir argumentos consistentes são procedimentos que proporcionam aos estudantes o desenvolvimento da **competência específica 4**.

Agora quem trabalha é você!

As atividades propostas possibilitam aos estudantes planejar e realizar pesquisa amostral envolvendo contextos relacionados ao mundo do trabalho; eles também precisarão apresentar os resultados da pesquisa com base em medidas de tendência central e de dispersão que as tornem compreensíveis. Solicite que produzam textos, sínteses, tabelas e gráficos adequados, construídos com o auxílio de planilhas eletrônicas ou de calculadora.


RONALDO ALMEIDA/PULSAR IMAGENS

Jovem padeiro em Guarani, Minas Gerais. (Fotografia de 2022.)

Assim, ressalta-se a importância de ações da sociedade e dos governos que precisam estar atentos às mudanças, a fim de garantir mecanismos que facilitem o ingresso dos jovens no mercado de trabalho; as empresas, por exemplo, podem assumir o compromisso de serem **mentoras** de jovens que estão ingressando no mercado de trabalho.

Mentor: que ou quem tem experiência e auxilia um aprendiz; guia, conselheiro.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com três colegas para realizarem uma pesquisa amostral. Depois, faça o que se pede em cada item.

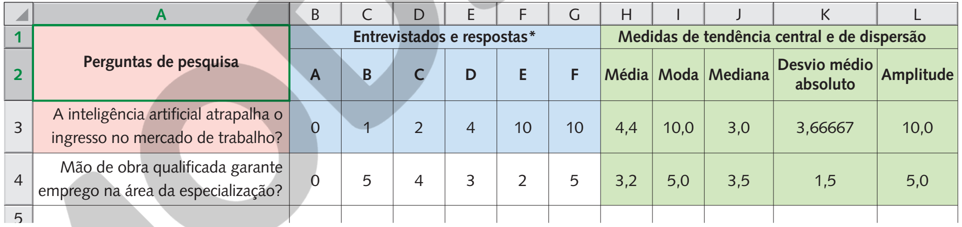
a) Definam um objetivo de pesquisa que aborde a percepção dos jovens em relação ao mercado de trabalho e, depois, elaborem perguntas de pesquisa relacionadas a esse objetivo. **a)** Resposta pessoal.

b) Definam uma população e uma maneira de determinar amostras para a pesquisa, por exemplo:
- se a população for os estudantes do 9º ano da escola, pode-se sortear 10 estudantes de cada turma do 9º ano;
- se a população for os jovens de 14 a 19 anos que moram na mesma rua que vocês, pode-se sortear 10% das casas de cada rua e entrevistar os jovens que residirem nelas.

b) Resposta pessoal.

c) Realizem a pesquisa considerando a amostra que definiram no item **b**. **c)** Realização da pesquisa amostral.

d) Observem como é possível organizar os dados de uma pesquisa amostral utilizando uma planilha eletrônica. **d)** Espera-se que os estudantes organizem um quadro na planilha eletrônica, como o do exemplo apresentado neste item da atividade.


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Perguntas de pesquisa	Entrevistados e respostas*						Medidas de tendência central e de dispersão				
2		A	B	C	D	E	F	Média	Moda	Mediana	Desvio médio absoluto	Amplitude
3	A inteligência artificial atrapalha o ingresso no mercado de trabalho?	0	1	2	4	10	10	4,4	10,0	3,0	3,66667	10,0
4	Mão de obra qualificada garante emprego na área da especialização?	0	5	4	3	2	5	3,2	5,0	3,5	1,5	5,0
5												

*Com respostas de 0 a 10, em que 0 indica que o entrevistado discorda totalmente da afirmação e 10, concorda totalmente.

Nas colunas B a G são indicadas as respostas dos entrevistados, em uma escala de 0 a 10, cujos nomes foram alterados para A, B, C, D, E e F. As informações das colunas H a K podem ser obtidas automaticamente por meio de recursos da planilha eletrônica. Por exemplo, ao digitar =MÉDIA(B3:G3) na célula H3, obtém-se a média das respostas dos entrevistados para a pergunta indicada na célula A3.
- Agora, utilizando os recursos de uma planilha eletrônica, organizem os dados coletados e determinem a média, a moda, a mediana, o desvio médio absoluto e a amplitude desses dados.

e) Com os recursos da planilha eletrônica, criem gráficos que facilitem analisar as informações coletadas. Depois, façam um resumo dos resultados obtidos na pesquisa e os comuniquem aos demais colegas da turma ou da escola. **e)** Resposta pessoal.

PARA SABER MAIS

A Matemática e os jogos

Blefar: fazer crer no que não é verdade; enganar, ludibriar.

John von Neumann era um gênio indiscutível. Tanto que em 1927, com apenas 24 anos, esse matemático húngaro se tornou o mais jovem professor da Universidade de Berlim. Mas Von Neumann tinha uma cisma: jogar mal pôquer. Resolveu estudar o jogo, e logo concluiu que só a matemática não o salvaria. Porque no pôquer é fundamental saber **blefar**. Von Neumann mergulhou no tema e, um ano depois, escreveu um artigo científico a respeito: *Theory of Parlor Games* ("teoria dos jogos de salão", em inglês). Ele estava inaugurando a Teoria dos Jogos, ramo da Matemática que estuda estratégias de competição e cooperação. De início, debruçou-se sobre jogos de "soma zero" – aqueles em que um ganha e outro perde, como no pôquer. Mais tarde, John Nash, outro matemático, estenderia a teoria aos jogos de "soma não zero", em que todos podem sair ganhando ou perdendo.

[...]

Suponha que você jogou dois dados. A chance que os dois têm de cair com o número 6 é mero fruto da sorte, certo? A humanidade sempre achou que sim. Até que, no século 16, o polímata lombardo Girolamo Cardano (1501-1576) resolveu crackear os dados. Ele anotou todas as 36 combinações possíveis e, a partir daí, notou que certas combinações tinham bem mais chance de sair. Cardano não ficou rico. Mas seu estudo foi o pontapé inicial na Teoria das Probabilidades.

Fonte: HORTA, M. A ciência das apostas. **Superinteressante**, São Paulo, ed. 384, jan. 2018. p. 46.


MILANAZAVR/SHUTTERSTOCK

Na experiência descrita, quando lançamos dois dados, o resultado obtido em um deles independe do resultado obtido no outro. Por isso, esses resultados são chamados de **eventos independentes**.

Porém, existem experimentos aleatórios que envolvem **eventos dependentes**, isto é, a ocorrência de um evento interfere nos resultados de outro evento. Acompanhe um exemplo de um experimento que envolve esse tipo de evento.

- Em uma urna há 7 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se as bolas sorteadas não são recolocadas na urna, qual é a probabilidade de a primeira bola sorteada ser vermelha e a segunda, amarela?

Note que para o 1º sorteio, a probabilidade é $\frac{3}{10}$, pois são 3 bolas vermelhas de 10 possibilidades de sorteio; mas, como consideramos que 1 bola vermelha foi sorteada no 1º sorteio, então, no 2º sorteio teremos 7 bolas amarelas e 2 bolas vermelhas. Assim, a probabilidade de uma bola amarela ser sorteada nessas condições é de $\frac{7}{9}$. Portanto, calculamos a probabilidade p de ser sorteada uma bola vermelha no 1º sorteio e uma amarela no 2º sorteio, assim:

$$p = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de sortear bola amarela no 2º sorteio, dado que no 1º foi sorteada uma vermelha.

Probabilidade de sortear bola vermelha no 1º sorteio

Para saber mais

Essa seção explora a habilidade (EF09MA20), abordando situações que envolvem eventos dependentes e eventos independentes.

Incentive os estudantes a elaborar estratégias de cálculo da probabilidade quando os eventos são dependentes.

Para o exemplo proposto, eles podem nomear as bolas vermelhas como A, B e C e as amarelas como 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Assim, os resultados desejados do sorteio (primeiro, uma bola vermelha e, depois, uma amarela) podem ser representados por pares como:

- (A, 1), (A, 2), ..., (A, 6) e (A, 7);
- (B, 1), (B, 2), ..., (B, 6) e (B, 7);
- (C, 1), (C, 2), ..., (C, 6) e (C, 7).

Observa-se que são 21 possibilidades para que o evento "sortear uma bola vermelha e, depois, uma amarela" ocorra.

Como são 10 bolas no primeiro sorteio e 9 no segundo, há um total de 90 resultados possíveis (pois $10 \cdot 9 = 90$).

Se os estudantes não os compreenderem, pode-se listar todos os resultados possíveis, considerando as demais possibilidades de sorteio, além daquelas em que ocorre bola vermelha no 1º sorteio e amarela no 2º, já indicadas.

Amplie o trabalho da seção propondo aos estudantes outras atividades que envolvam probabilidade.

Sugerimos a atividade "Apostas no relógio":

> Este experimento trata de um jogo muito simples: sorteamos dois números de 0 a 59 e, utilizando dois ponteiros em um relógio, representamos os números sorteados como seus minutos. Dessa forma, o relógio será dividido em duas regiões (setores circulares).
>
> Jogaremos com dois times: um deles vence se a marca de 0 min estiver na maior região e o outro, se estiver na menor. O que queremos saber é se algum dos times tem mais chances de vencer do que outro.
>
> Apostas no relógio. **Recursos educacionais multimídia para a Matemática no Ensino Médio**. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1365. Acesso em: 22 jul. 2022.

Na análise dos resultados do jogo, proponha aos estudantes que construam o gráfico que representa as frequências relativas dos pontos dos dois times e um gráfico de dispersão para os dados, incentivando-os a discutir sobre cada um deles.

Agora é com você!

Para a **atividade 1**, organize os estudantes em grupos, distribua dois dados de cores diferentes para cada grupo e peça a eles que realizem o experimento "lançar os dois dados simultaneamente" e anotem os pares de números que aparecem nas faces voltadas para cima.

Dessa maneira, os estudantes vivenciam a situação e podem comprovar os resultados possíveis que foram apresentados. Podem também perceber o que os resultados (2, 3) e (3, 2) têm de diferente, por exemplo.

Em seguida, sugira que façam outro experimento relacionado ao lançamento de dois dados: observar a soma dos pontos obtidos nas faces superiores. Proponha que escrevam todos os resultados possíveis e determinem a probabilidade de ocorrência de cada resultado.

Faça o mesmo para a observação da diferença em módulo dos pontos obtidos nas duas faces superiores e para a observação do produto dos números das faces superiores.

Na **atividade 2**, a probabilidade é $\frac{21}{130}$, pois a probabilidade de ser sorteada uma vogal no 1º sorteio é $\frac{5}{26}$ e, dado que isso ocorreu, a probabilidade de sortear uma consoante no 2º sorteio será $\frac{21}{25}$. Dessa maneira, fazendo $\frac{5}{26} \cdot \frac{21}{25}$, obtemos a probabilidade pedida.

Na **atividade 3**, a probabilidade de o presidente ser do 7º ano é dada por $\frac{2}{8}$; dado que um estudante do 7º ano tenha sido sorteado no 1º sorteio, no 2º sorteio a probabilidade de que um estudante seja sorteado é $\frac{3}{7}$. Assim, o produto entre $\frac{2}{8}$ e $\frac{3}{7}$, que resulta em $\frac{6}{56} = \frac{3}{28}$, é a probabilidade de o presidente ser do 7º ano e o vice-presidente, do 8º ano.

1. b) Carol, pois a probabilidade de acerto é $\frac{5}{18}$, enquanto a de Sofia e a de Rafael é $\frac{1}{6}$.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

1. c) Sofia, pois a probabilidade de acerto é $\frac{3}{4}$, enquanto a de Rafael é $\frac{1}{6}$ e a de Carol é $\frac{1}{4}$.

1 O lançamento simultâneo de dois dados cúbicos corresponde a um espaço amostral de 36 pares ordenados.

Carol, Rafael e Sofia brincam de jogar dois dados como esses. Responda, em cada item, qual deles tem a maior probabilidade de ganhar e justifique sua resposta.

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

a) Na primeira rodada, eles apostaram que a soma dos números das faces de cima seria: Carol (6), Rafael (7) e Sofia (8).

b) Na segunda rodada, as apostas foram na diferença em módulo entre os números das faces de cima: Carol (1), Rafael (3) e Sofia (0).

c) Na terceira rodada, eles apostaram que o produto dos números das faces de cima seria: Carol (número ímpar), Rafael (número primo) e Sofia (número par).

2 Em uma caixa há 26 fichas com letras de A a Z, sem que alguma letra seja repetida. Dessas fichas, uma após a outra e sem reposição, serão sorteadas duas. Qual é a probabilidade de sortear primeiro uma vogal e, depois, uma consoante? Por quê? **2.** Veja as respostas neste *Manual*.

3 Em uma urna estão os nomes de 8 estudantes de uma escola, sendo 3 nomes de estudantes do 9º ano, 3 nomes de estudantes do 8º ano e 2 nomes de estudantes do 7º ano. Serão sorteados dois desses nomes para compor o grêmio estudantil da escola, de maneira que o primeiro nome sorteado será o presidente do grêmio e o segundo, o vice-presidente. Explique como você pode determinar a probabilidade de ser sorteado um estudante do 7º ano para presidente e um do 8º ano para vice-presidente. **3.** Veja as respostas neste *Manual*.

1. a) Rafael, pois a probabilidade de acerto é $\frac{1}{6}$, enquanto a de Carol e a de Sofia é $\frac{5}{36}$.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Juros compostos

O **juro** (j) é a quantia com que um devedor remunera um credor pelo uso de seu dinheiro por um **período** (t) previamente combinado. Para o empréstimo dessa quantia, chamada de **capital** (c), geralmente é estabelecida uma **taxa percentual** (i).

$$\text{juro} = \text{capital} \cdot \text{tempo} \cdot \text{taxa, ou } \ j = c \cdot t \cdot i$$

Há o **juro simples**, que é calculado apenas sobre o capital inicial, mesmo quando o período do empréstimo é renovado. Acompanhe o exemplo a seguir.

Suponha que tomo emprestado R$ 500,00 por 4 meses e combino de pagar juro simples a uma **taxa de juro** (i) de 10% por mês.

Após o tempo combinado, devo devolver o capital (500) adicionado ao juro (10% de 500 = = 0,10 · 500 = 50, ou seja, R$ 50 por mês). Essa soma é o **montante** (m).

$$\text{montante} = \text{capital} + \text{juro ou } \ m = c + j$$
$$\text{ou } \ m = c + c \cdot t \cdot i \ \text{ ou } \ m = c \cdot (1 + t \cdot i)$$

Se, após 1 mês, eu quitar o empréstimo, devo devolver ao credor os 500 reais mais a quantia de 10% de 500, referente ao juro de 1 mês. Mas, se eu continuar com o empréstimo, após 2 meses, a dívida será igual aos 500 mais 2 · (10% de 500). E segue: após 3 meses, os 500 mais 3 · (10% de 500); após 4 meses, os 500 mais 4 · (10% de 500).

Cálculo do montante considerando o juro simples, à taxa de 10% ao mês:

1º mês: $m = 500 + 1 \cdot 10\%$ de $500 = 500 \cdot (1 + 1 \cdot 0{,}10) = 500 \cdot 1{,}10 = 550$

2º mês: $m = 500 + 2 \cdot 10\%$ de $500 = 500 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}10) = 500 \cdot 1{,}20 = 600$

3º mês: $m = 500 + 3 \cdot 10\%$ de $500 = 500 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}10) = 500 \cdot 1{,}30 = 650$

4º mês: $m = 500 + 4 \cdot 10\%$ de $500 = 500 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}10) = 500 \cdot 1{,}40 = 700$

No **juro composto**, entretanto, a cada período, o juro é calculado sobre o saldo devedor. Acompanhe como fica o cálculo do montante considerando juro composto, à taxa de 10% ao mês:

1º mês: $m = 500 + 1 \cdot 10\%$ de $500 = 500 + 0{,}10 \cdot 500 = 1{,}10 \cdot 500 = 550$

2º mês: $m = 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 500 = (1{,}10)^2 \cdot 500 = 605$

3º mês: $m = 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 500 = (1{,}10)^3 \cdot 500 = 665{,}5$

4º mês: $m = 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}10 \cdot 500 = (1{,}10)^4 \cdot 500 = 1{,}4641 \cdot 500 = 732{,}05$

Assim, para determinar o montante *m* calculado a juros compostos, considerando um capital inicial *c*, uma taxa *i* e o período *t*, utilizamos a expressão:

$$m = c \cdot (1 + i)^t$$

Acompanhe a comparação do empréstimo de R$ 500,00, a ser quitado em 4 meses, com juros de 10% ao mês, considerando o pagamento a juros simples e a juros compostos.

Meses após o empréstimo	Montante acumulado (juro simples)	Montante acumulado (juros compostos)
1	R$ 550,00	R$ 550,00
2	R$ 600,00	R$ 605,00
3	R$ 650,00	R$ 665,50
4	R$ 700,00	R$ 732,05

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considerando o exemplo apresentado nessa seção, com o auxílio de uma calculadora,construa uma tabela com a primeira coluna para os 12 meses, a segunda coluna para os juros compostos, a terceira coluna para os juros simples e a quarta coluna para a diferença entre os juros em cada período. A diferença também aumenta cada vez mais? **1.** Construção de tabela; sim.

2 Carlos fez um empréstimo de R$ 1 000,00 a uma taxa de juros compostos de 20% ao mês. Podemos dizer que após 4 meses a dívida de Carlos duplicou? **2.** Sim.

3 Um empréstimo de R$ 1 000,00 foi realizado para ser quitado após um mês, à taxa mensal de juro de 5%. No dia do pagamento, no entanto, o cliente pediu mais um mês para quitar toda a dívida; para isso, seria aplicada uma taxa mensal de juro de 6% sobre o valor atual da dívida. Nessas condições, como você calcularia o total a ser quitado após o segundo mês? Qual é esse valor?
3. Veja as respostas neste *Manual*.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA05**.

A seção explora cálculos envolvendo porcentagens e possibilita aos estudantes resolver problemas nesse contexto, além de compreender os juros compostos como uma aplicação sucessiva de percentuais, mobilizando a habilidade (EF09MA05).

Explore a noção de juro simples propondo outras atividades antes de trabalhar com o juro composto. Depois, reproduza na lousa o cálculo com juro composto, analisando cada etapa com os estudantes. Em seguida, peça a eles que façam uma comparação entre a aplicação de juros simples e a de juros compostos para uma mesma situação, levantando semelhanças e diferenças.

Para ampliar, proponha que formulem e compartilhem com os colegas novos problemas envolvendo juros compostos e a aplicação sucessiva de percentuais.

Agora quem trabalha é você!

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Na **atividade 3**, após um mês de vencimento, a dívida deve ser calculada multiplicando o valor emprestado por 1,05 (pois 100% + 5% = 105% = 1,05). A esse valor, no entanto, após 2 meses da dívida e considerando que no 2º mês o juro é de 6% sobre o valor da dívida, deve ser aplicado o fator 1,06 (pois 100% + 6% = 106% = 1,06). Assim, a dívida após o 2º mês é dada por 1000 · 1,05 · 1,06 = 1113; logo, R$ 1113,00.

Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 4**, no **item a**, considerando que o produto custe *x* reais, devemos multiplicar esse valor por 75% para obter o preço dele com um desconto de 25%. Como ele será pago em 60 dias, a cada 30 dias deve ser aplicada uma taxa de 8% de juro, o que implica multiplicar o valor devido por 1,08. Assim, após 2 meses, o valor a ser pago em relação ao valor original é dado por $x \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08$, que equivale a $x \cdot 0{,}81$. Portanto, deve-se multiplicar o valor original por 0,81. No **item b**, como o valor a ser pago corresponde a 81% do valor original (pois 0,81 = 81%), então o cliente terá um desconto de 19% (pois 100 – 81 = 19).

Exercícios complementares

O bloco de exercícios traz atividades que retomam os principais conceitos tratados no capítulo, propiciando aos estudantes mobilizar os conhecimentos construídos e sanar possíveis dúvidas que ainda tenham.

Proponha a eles que resolvam os exercícios individualmente. Depois, peça que se reúnam em duplas para comparar as respostas e as estratégias utilizadas. Nesse momento, eles podem descobrir e reorganizar as estratégias utilizadas. Incentive-os a explicar oralmente ao colega de dupla como pensaram.

Para finalizar, escolha estudantes de duplas diferentes para apresentarem a resolução proposta pela dupla. Aproveite o momento e discuta os procedimentos utilizados, validando-os com a turma.

As resoluções dos **exercícios 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

---

4 Em determinado dia, uma loja ofereceu um desconto de 25% sobre qualquer um de seus produtos, podendo pagar à vista ou em até 60 dias com uma taxa mensal de juro composto de 8%. Nessas condições, responda:

a) Qual é a taxa percentual que deve ser aplicada ao preço original do produto se ele for quitado em 60 dias?

b) Ao quitar o produto após 60 dias, o cliente teve desconto ou acréscimo em relação ao valor original do produto? Percentualmente, quanto foi esse desconto ou acréscimo?

4. Veja as respostas neste *Manual*.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Exercícios complementares:

1 (Saresp) Após corrigir as provas de 30 estudantes da mesma classe de 8º ano, a professora de Matemática anotou, em ordem crescente, as notas a eles atribuídas.

1,0 – 2,0 – 2,5 – 3,0 – 3,0 – 4,0 – 4,0 – 4,0 – 4,0 – 5,0
5,0 – 5,0 – 5,5 – 5,5 – 6,0 – 6,0 – 6,0 – 6,0 – 6,0 – 6,5
6,5 – 7,0 – 7,5 – 7,5 – 7,5 – 8,0 – 8,0 – 8,5 – 9,0 – 9,0

Se a professora sortear uma dessas 30 provas, a probabilidade de que a nota a ela atribuída seja maior do que 6,5 é: **1.** Alternativa **b**.

a) $\frac{3}{30}$
b) $\frac{9}{30}$
c) $\frac{18}{30}$
d) $\frac{24}{30}$

2 Considerando as notas do exercício **1**, obtenha:

a) a moda; **2. a)** 6,0
b) a mediana; **2. b)** 6,0
c) a média aritmética. **2. c)** Aproximadamente 5,6.

3 Colete entre você e mais sete colegas os seguintes dados: massa (em quilograma), idade (em mês) e altura (em centímetro). Em seguida, obtenha de cada um desses conjuntos de dados: **3.** Respostas pessoais.

a) o rol;
b) a moda;
c) a mediana;
d) a média aritmética;
e) o desvio médio absoluto.

4 Considerando o exercício **3**, em qual das variáveis (idade, massa e altura) o conjunto de dados é mais regular? Em qual é menos regular? Justifique. **4.** Resposta pessoal.

5 (Enem) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar? **5.** Alternativa **d**.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O quadro a seguir apresenta a idade dos 10 professores de uma escola. Qual é a idade média desses professores? **1.** Alternativa **c**.

23	25	25	28	31
24	32	32	27	23

a) 21,3
b) 27,1
c) 27
d) 26,8

2 Qual é a moda das velocidades medidas por um radar em um intervalo de 10 segundos, apresentadas no quadro a seguir? **2.** Alternativa **a**.

61	60	59	59	58
58	62	58	57	56

a) 58 **b)** 59 **c)** 62 **d)** 56

3 Qual é a mediana dos valores do quadro a seguir? **3.** Alternativa **b**.

23	72	72	49	84
271	650	47	48	74

a) 73 **b)** 72 **c)** 74 **d)** 60,5

4 Uma turma do 9º ano tem 20 estudantes. Destes, 15 têm 15 anos, 3 têm 16 e 2 têm 14 anos. Qual é o desvio médio dessas idades?

a) 0,295
b) 0,305
c) 0,275
d) 0,285

4. Alternativa **d**.

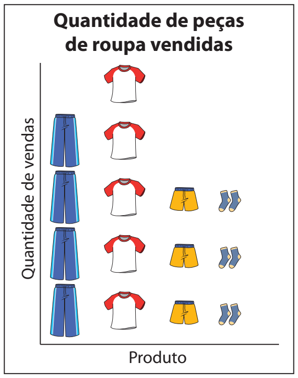
5 Os entrevistados de uma pesquisa deveriam votar com números de 1 a 3, em que 1 é insatisfeito, 2, satisfeito e 3, muito satisfeito. O resultado está no quadro: **5.** Alternativa **c**.

Nota	Total de entrevistados
1	239
2	132
3	132

Qual é a mediana dessas notas?

a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5

6 Analisando o gráfico de vendas a seguir, qual é a peça de roupa mais vendida por essa loja? Qual dos conceitos – moda, mediana, média aritmética – ela representa? **6.** Alternativa **c**.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Anotações do gerente da loja.

a) Calça, moda.
b) Bermuda, mediana.
c) Camiseta, moda.
d) Par de meias, média aritmética.

7 Qual é a probabilidade de uma pessoa tirar o mesmo número em dois lançamentos simultâneos de um dado cúbico não viciado? **7.** Alternativa **b**.

a) 1 **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{36}$ **d)** $\frac{1}{12}$

8. Alternativa **a**.

8 Percentualmente, ao lançar uma moeda duas vezes, qual a probabilidade de nas duas ela cair com a mesma face voltada para cima?

a) 50%
b) 25%
c) 33,3%
d) 75%

9. Resposta pessoal.

9 Considere o conjunto das alternativas das respostas que você deu nas questões anteriores desta seção **Verificando**. A moda é:

a) a. **b)** b. **c)** c. **d)** d.

Organizando

Organizando: **a)** Média, mediana, moda e desvio médio absoluto.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais são as medidas de tendência central e de dispersão estudadas?
b) Em que casos do cotidiano é importante sabermos o cálculo de juro? **b)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes falem sobre casos de empréstimos ou contas a pagar.
c) Em qual caso – juro simples ou juro composto – o juro aumenta mais rapidamente em um mesmo período e com a mesma taxa? **c)** Juro composto.

Verificando

Nesta seção, apresentamos testes que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso os estudantes apresentem dúvidas em relação a algum deles, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

Sugerimos, ainda, que os estudantes se organizem em duplas para resolverem os testes e, depois de corrigidos, cada estudantes resolve novamente aqueles que tiver errado.

As resoluções e comentários dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Organizando

As questões propostas nesta seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação dos estudantes.

É interessante que cada estudante responda individualmente e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou ampliando-as.

Capítulo 7 – Equações do 2º grau

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Ampliamos o estudo de equações polinomiais sistematizando o tratamento de uma equação polinomial do 2º grau com uma incógnita, que, para simplificar a linguagem, passaremos a denominar equação do 2º grau. Neste capítulo, analisamos procedimentos variados de resolução das equações incompletas e das completas e de suas aplicações na resolução de problemas.

O desenvolvimento dos temas possibilitará aos estudantes desenvolver habilidades necessárias ao estudo das funções polinomiais do 2º grau. São empregados novos recursos algébricos e aplicadas propriedades já estudadas.

Destacamos também a conexão da Unidade Temática **Álgebra**, foco deste capítulo, com **Geometria** e **Grandezas e medidas**, quando associamos figuras geométricas e utilizamos as noções de área e de volume. O tema da abertura faz a associação do tablado quadrado de um ringue de boxe com um problema envolvendo uma equação do 2º grau: dada a medida da área desse tablado, determinar suas dimensões (medidas dos lados do quadrado). As **questões a** e **b** propostas possibilitam valorizar a cultura juvenil e explorar contextos relevantes para os estudantes. Incentive-os a compartilhar com os colegas os esportes que praticam ou pelos quais se interessam, mesmo que neles não sejam identificados tablados quadrados. Pode-se realizar um trabalho interdisciplinar com Educação Física; organize grupos de até quatro estudantes e oriente-os a pesquisar materiais na internet para apresentar determinada modalidade esportiva de seu interesse. Garanta que cada grupo tenha autonomia para escolher uma modalidade esportiva, mas que as modalidades não se repitam, preferencialmente. Organize uma exposição dos trabalhos, possibilitando aos estudantes discutir sobre o local onde cada modalidade esportiva é praticada, as suas regras, atletas brasileiros reconhecidos ou que sejam da região onde os estudantes residam, leis sobre incentivo à prática de esportes e maneiras de obter bolsas, como a Bolsa atleta.

a) O boxe estreou nas Olimpíadas em 1904, em Saint Louis, Estados Unidos. Nos Jogos de Los Angeles, Estados Unidos, em 1984, foi obrigatório o uso de capacete. Categorias: Masculino – Mosca-ligeiro (até 49 kg), Mosca (até 52 kg), Galo (até 56 kg), Leve (até 60 kg), Médio-ligeiro (até 64 kg), Meio-médio (até 69 kg), Médio (até 75 kg), Meio-pesado (até 81 kg), Pesado (até 91 kg), Superpesado (acima de 91 kg). Feminino – Mosca (até 51 kg), Leve (até 60 kg), Meio-pesado (até 81 kg).

Capítulo 7

Equações do 2º grau

PA IMAGES/ALAMY/FOTOARENA

Observe a fotografia e responda às questões no caderno.

a) Pesquise o boxe amador nas Olimpíadas: em qual ano foi introduzido, obrigatoriedade do uso do capacete, categorias dos boxes masculino e feminino.

b) Além do boxe, você conhece outros esportes nos quais os atletas ficam sobre tablados?

c) Pesquise as medidas oficiais dos tablados de alguns dos esportes que você mencionou no item **b**. **c)** Resposta pessoal.

Anthony Joshua enfrenta Carlos Takam em luta de boxe realizada no Reino Unido. (Fotografia de 2020.)

b) Resposta pessoal. Possível resposta: Judô, MMA, Muay Thai.

Oficialmente, o tablado de um ringue de boxe deve ser quadrado, com medida dos lados variável de 4,9 m a 7,0 m, além de uma borda mínima de 0,6 m.

Se uma academia de esportes dispõe de uma superfície quadrada de 36 m² para construir um ringue de boxe, o construtor pode resolver uma equação do 2º grau para determinar a medida dos lados desse ringue. Reúna-se a um colega para pensarem em uma estratégia de resolução desse problema, que será retomado neste capítulo.

Sugestões de leitura

MINISTÉRIO da Cidadania. **Bolsa atleta**. Disponível em: https://www.gov.br/cidadania/pt-br/acoes-e-programas/bolsa-atleta. Acesso em: 14 jun. 2022.

Página governamental que traz informações sobre o programa de incentivo a atletas.

MINISTÉRIO da Cidadania. **Lei de Incentivo ao Esporte**. Disponível em: https://www.gov.br/cidadania/pt-br/acoes-e-programas/lei-de-incentivo-ao-esporte. Acesso em: 14 jun. 2022.

Página governamental com informações sobre a Lei de Incentivo ao Esporte e com editais e informações sobre projetos desse contexto.

1 Equações do 2º grau com uma incógnita

Considere a situação a seguir.

O engenheiro Vítor recebeu uma encomenda para a construção de uma piscina retangular, com duas exigências:

1ª) comprimento medindo 10 m a mais que a largura;

2ª) área medindo 144 m².


TONKIN IMAGE/SHUTTERSTOCK

Para determinar as medidas da largura e do comprimento dessa piscina, Vítor representou a da largura por x, e a do comprimento por $x + 10$.

Como a medida da área de um retângulo é o produto das medidas da largura e do comprimento, ele escreveu:

$$x \cdot (x + 10) = 144 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x - 144 = 0$$


FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a equação obtida, $x^2 + 10x - 144 = 0$, tem uma só incógnita (x), cujo maior expoente é 2. Ela é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**.

Toda equação do 2º grau com uma incógnita pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{\text{forma reduzida de uma equação do 2º grau}} \text{ (com } a \neq 0)$$

Os números reais a, b e c são os coeficientes da equação do 2º grau, sendo:

- ***a*** o coeficiente do quadrado da incógnita (coeficiente de x^2);
- ***b*** o coeficiente da incógnita (coeficiente de x);
- ***c*** o termo independente da incógnita.

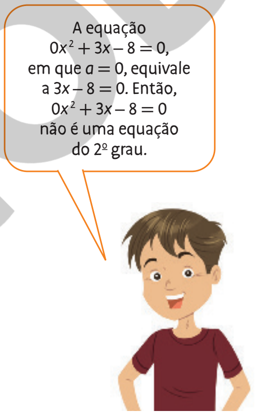
Nos exemplos a seguir, as equações do 2º grau estão escritas na forma reduzida, e destacamos seus coeficientes a, b e c.

a) Na equação $5x^2 - 6x + \frac{1}{5} = 0$, $a = 5$, $b = -6$ e $c = \frac{1}{5}$

b) Na equação $-0{,}4x^2 + 9x = 0$, $a = -0{,}4$, $b = 9$ e $c = 0$

c) Na equação $\frac{x^2}{2} - 10 = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ e $c = -10$

d) Na equação $-\frac{\sqrt{5}}{5}x^2 = 0$, $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $b = 0$ e $c = 0$



ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

1. Equações do 2º grau com uma incógnita

Habilidade da BNCC: **EF09MA09**.

Neste tópico são apresentados conceitos e informações sobre equações do 2º grau e, assim, mobilizados aspectos da habilidade (EF09MA09), pois os estudantes poderão compreender equações desse tipo e o que são suas raízes.

Retome e explore a situação da abertura, na qual as medidas dos lados de um ringue de boxe (uma superfície quadrada) devem ser determinadas a partir da medida de sua área, 36 m². Essa situação pode ser descrita pela equação $36 = \ell^2$, em que o valor de ℓ deve ser um número real positivo, ou seja, $\ell = 6$; portanto, os lados do ringue de boxe medem 6 m.

Proponha a leitura e a exploração dessa situação em duplas, o que favorece o aprendizado. Avalie a possibilidade de conduzir os estudantes a uma resolução aritmética dessa questão, por meio de perguntas como:

"Qual é o número cujo quadrado é igual a 36?" (Resposta: 6, pois $6^2 = 36$).

"A qual número deve ser adicionada a medida da borda (0,6 m) para que o quadrado dessa soma seja igual a 36?" (Resposta: 5,4, pois ($5{,}4 + 0{,}6 = 6$; $6^2 = 36$).

Muitos fenômenos (naturais ou não) são descritos por leis que envolvem a resolução de uma equação do 2º grau. Esse tipo de equação aparece no movimento descrito por uma bola de futebol no chute ao gol, no arremesso da bola em uma partida de basquete, no lançamento de projéteis etc.

Incentive os estudantes a pesquisar mais exemplos de fenômenos descritos por esse tipo de equação.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** e de **4** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

O **exercício 7** oferece uma boa oportunidade para retomar alguns conceitos geométricos estudados em anos anteriores. Organize os estudantes em trios para discutirem as respostas. Outra possibilidade é complementar esse exercício solicitando a eles que escrevam os valores que x pode assumir. Espera-se que eles observem que:

$x > 0$

$x + 2 > 0$

$2x + 1 > 0$

Ou seja, para que todas as condições sejam atendidas, devemos ter x real positivo.

Uma equação do 2º grau é considerada **completa** quando os coeficientes b e c são diferentes de zero, e é **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$, ou, ainda, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que, nos exemplos anteriores, o item **a** apresenta uma equação completa, e os itens **b**, **c** e **d** apresentam equações incompletas do 2º grau.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Alternativas **a**, **d**, **e**, **f**.

1 Verifique quais das equações a seguir são do 2º grau e identifique os coeficientes a, b e c.

a) $8x^2 + 17x + 4 = 0$ **1. a)** $a = 8; b = 17; c = 4$

b) $3x - 5 = 0$

c) $0x^2 + 10x - 8 = 0$

d) $-\frac{y^2}{5} - 25 = 0$ **1. d)** $a = -\frac{1}{5}; b = 0; c = -25$

e) $4y^2 - 5y = 0$ **1. e)** $a = 4; b = -5; c = 0$

f) $-9 + x^2 = 0$ **1. f)** $a = 1; b = 0; c = -9$

2 Escreva as equações do 2º grau a seguir na forma reduzida e classifique-as em **c** (completa) ou em **i** (incompleta).

a) $2x^2 - 5x = -2$

b) $x^2 + 6x = 2x + 3$

c) $y^2 = 8y$

d) $-5x^2 = 30x + 40$

e) $3x \cdot (x - 2) = 2 \cdot (2x - 1)$

f) $(x + 4) \cdot (x - 4) = 5x - 16$

2. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; **c**.
2. b) $x^2 + 4x - 3 = 0$; **c**.
2. c) $y^2 - 8y = 0$; **i**.
2. d) $-5x^2 - 30x - 40 = 0$; **c**.
2. e) $3x^2 - 10x + 2 = 0$; **c**.
2. f) $x^2 - 5x = 0$; **i**.

3 Dados os coeficientes a, b e c, escreva no caderno as equações do 2º grau correspondentes.

a) $a = 5; b = -7; c = 0$ **3. a)** $5x^2 - 7x = 0$

b) $a = -1; b = 3; c = -4$ **3. b)** $-x^2 + 3x - 4 = 0$

c) $a = 2; b = 0; c = 4$ **3. c)** $2x^2 + 4 = 0$

d) $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{5}{7}; c = \sqrt{2}$ **3. d)** $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{7}x + \sqrt{2} = 0$

4 Para que valor de n a equação $(5n + 2)x^2 - 4nx + n = 0$ não é do 2º grau? **4.** $n = -\frac{2}{5}$

5 Determine no caderno os valores de m na equação $(m + 3)x^2 - (2m - 1)x + m + 4 = 0$ de modo que ela:

a) não seja do 2º grau em x; **5. a)** $m = -3$

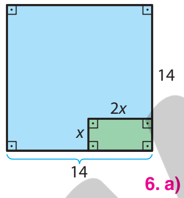
b) seja do 2º grau em x; **5. b)** $m \neq -3$

c) seja do 2º grau em x e seja completa;

d) seja do 2º grau em x e seja incompleta.

5. c) $m \neq -3$, $m \neq \frac{1}{2}$ e $m \neq -4$ **d)** $m = \frac{1}{2}$ ou $m = -4$

6 Considere esta figura.



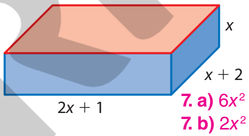
NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

6. a) $A = 196 - 2x^2$

a) Determine a medida da área da parte azul.

b) Calcule no caderno o valor de x quando a área da parte azul medir 124. **6. b)** $x = 6$

7 A figura a seguir representa uma caixa em forma de paralelepípedo.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

7. a) $6x^2 + 6x$
7. b) $2x^2 + 5x + 2$

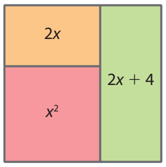
a) Determine a expressão da soma das medidas das áreas das faces laterais.

b) Determine a expressão da medida da área da face destacada em vermelho.

c) Se a soma das medidas das áreas das faces laterais, em unidade de área, for 880, determine a equação correspondente em relação a x. **7. c)** $6x^2 + 6x - 880 = 0$

8 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Na figura, estão indicadas as medidas das áreas, em uma mesma unidade de medida, de três retângulos adjacentes. O retângulo vermelho é um quadrado.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Escrevam no caderno as medidas dos lados desses retângulos. **8. a)** x e x; x e 2; $x + 2$ e 2.

b) Escrevam no caderno uma expressão da medida da área do quadrilátero, que é a reunião dos três retângulos. **8. b)** $x^2 + 4x + 4$

c) Classifiquem o quadrilátero citado no item **b**. **8. c)** Quadrado.

9 Sendo x um número desconhecido, vamos representar com símbolos a sentença:

$$\text{“}\underbrace{\text{o quadrado de um número}}_{x^2}\ \underbrace{\text{adicionado a}}_{+}\ \underbrace{\text{seu triplo}}_{3x}\ \underbrace{\text{é igual a}}_{=}\ \underbrace{\text{dezoito}}_{18}\text{”}$$

Na forma reduzida, escrevemos $x^2 + 3x - 18 = 0$.

Seguindo esse modelo, represente o número desconhecido por x e escreva no caderno a equação do 2º grau na forma reduzida que corresponde a cada sentença a seguir.

a) O quadrado de um número adicionado ao dobro desse número é igual a 99. **9. a)** $x^2 + 2x - 99 = 0$

b) O triplo do quadrado de um número menos o próprio número é igual a 30. **9. b)** $3x^2 - x - 30 = 0$

c) Um número é igual ao quadrado desse próprio número menos 42. **9. c)** $x^2 - x - 42 = 0$

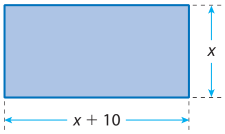
d) Três quintos do quadrado de um número é igual a esse número menos 40. **9. d)** $\frac{3}{5}x^2 - x + 40 = 0$

10 ***Hora de criar*** – Elabore um problema que possa ser resolvido por meio da equação $x^2 + x + 5 = 0$. **10.** Resposta pessoal.

Raízes de uma equação do 2º grau

Voltando ao problema da construção da piscina (p. 147), podemos obter, por tentativa, o valor de x da medida da largura.

Vamos recordar que Vítor desenhou a figura e chegou à equação $x \cdot (x + 10) = 144$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atribuindo a x, por exemplo:

- o número 10, o valor do 1º membro da equação é:

$$10 \cdot (10 + 10) = 200\text{, maior do que o 2º membro } (200 > 144)$$

- o número 7, o valor do 1º membro da equação é:

$$7 \cdot (7 + 10) = 119\text{, menor do que o 2º membro } (119 < 144)$$

- o número 8, o valor do 1º membro da equação é:

$$8 \cdot (8 + 10) = 144\text{, igual ao 2º membro } (144 = 144)$$

Ao substituir x por 8 na equação $x \cdot (x + 10) = 144$, ou na sua equivalente $x^2 + 10x - 144 = 0$, obtemos uma sentença verdadeira. Observe.

$$8 \cdot (8 + 10) = 144 \qquad \text{ou} \qquad 8^2 + 10 \cdot 8 - 144 = 0$$

Portanto, uma solução para a situação é a largura da piscina medir 8 metros, e o comprimento, 18 metros.

Quando substituímos a incógnita de uma equação por um número e encontramos uma sentença verdadeira, dizemos que esse número é **raiz** da equação. Se a equação for do 2º grau, ela pode ter até duas raízes reais diferentes.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 9** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

O **exercício 10** pode ser ampliado pedindo aos estudantes que troquem os problemas elaborados com os de outros colegas para analisarem se a equação $x^2 + x + 5$ traduz o problema elaborado. Vale lembrar que, nesse momento, não será necessário que eles encontrem as raízes dessa equação.

Raízes de uma equação do 2º grau

Se julgar necessário, retome o conceito de raiz de uma equação do 1º grau, estudado em anos anteriores, bem como a verificação se um número é ou não raiz de equações desse tipo, para fazer um paralelo com o estudo atual. Sugira aos estudantes que acompanhem os exemplos apresentados no livro e discuta coletivamente as dúvidas que surgirem.

Para explorarem intuitivamente a ideia de função e ampliar a compreensão de raízes de uma equação, sugerimos desenvolver atividades investigativas utilizando os recursos de planilhas eletrônicas.

Os estudantes podem organizar os dados em uma planilha com duas colunas, A e B. Na coluna A, digitam valores para x e, na coluna B, com os recursos do *software*, automaticamente determinam o valor que uma expressão algébrica do 2º grau assume para cada valor de x.

Por exemplo, para $x^2 + 10x - 144$ na coluna B, quando $x = 0$, tem-se -144, quando $x = 1$, tem-se -133 etc.

Coluna A	Coluna B
x	$x^2 + 10x - 144$
0	–144
1	–133
2	–120
3	–105
4	–88
5	–69
6	–48
7	–25
8	0
9	27
10	56

Incentive os estudantes a digitar diferentes sequências de valores para x, na coluna A, e observar o que acontece com a sequência de valores obtidos na coluna B. Eles podem perceber, por exemplo, que, se $x_1 > x_2$ e o valor na coluna B associado a x_1 tem sinal oposto ao valor associado a x_2, então, entre x_1 e x_2 há alguma raiz da equação. Os gráficos gerados automaticamente por meio dos recursos das planilhas eletrônicas podem auxiliar na compreensão desse fato e fazer com que percebam outras regularidades.

Atividades investigativas como essa possibilitam aos estudantes desenvolver a **competência geral 2**, pois eles podem exercitar a curiosidade intelectual e utilizar a investigação para perceber ou concluir fatos matemáticos. Além disso, a **competência geral 7** também é mobilizada, na medida em que eles precisam argumentar e justificar os fatos observados. O uso de tecnologias digitais, como planilhas eletrônicas, associado a atividades investigativas favorece, ainda, o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois os estudantes podem utilizar esses recursos para produzir conhecimentos e resolver problemas.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 12** a **16** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Após a resolução dos exercícios deste bloco, é interessante propor um desafio: cada estudante deverá criar uma equação do 2º grau cujas raízes ele conheça e, então, elaborar um exercício similar a algum desta página.

Revise os exercícios criados e, depois, transcreva-os em fichas individuais, com a identificação do estudante que o elaborou. A turma poderá ser organizada em grupos (de 3 ou 4 estudantes), de modo que cada grupo fique com a mesma quantidade de fichas. Solicite a cada grupo que resolva os exercícios de suas fichas e, depois, que troquem suas resoluções com as de outro grupo. Então, cada grupo deverá analisar as resoluções de seus colegas. Após a análise, deverão conversar sobre as resoluções e as possíveis dificuldades.

Esse trabalho é importante para proporcionar diferentes movimentos dos estudantes em relação à resolução de uma equação de 2º grau, reconhecendo as suas raízes e, também, percebendo a possibilidade de conferir respostas quando resolvem uma equação.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos verificar se os números –3, –2, 2 e 6 são raízes da equação $x^2 + x - 6 = 0$.

- Para $x = -3$, obtemos:
  $(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$
  $9 - 3 - 6 = 0$
  $9 - 9 = 0$ (verdadeira)
  Logo, –3 é raiz da equação.

- Para $x = 2$, obtemos:
  $2^2 + 2 - 6 = 0$
  $4 + 2 - 6 = 0$
  $6 - 6 = 0$ (verdadeira)
  Logo, 2 é raiz da equação.

- Para $x = -2$, obtemos:
  $(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$
  $4 - 2 - 6 = 0$
  $4 - 8 = 0$ (falsa)
  Logo, –2 não é raiz da equação.

- Para $x = 6$, obtemos:
  $6^2 + 6 - 6 = 0$
  $36 + 6 - 6 = 0$
  $36 = 0$ (falsa)
  Logo, 6 não é raiz da equação.

b) Vamos determinar o valor de *m* na equação $(3m - 1) \cdot x^2 - (m + 8) \cdot x + 10 = 0$ de modo que uma de suas raízes seja 2. Como 2 deve ser raiz da equação, consideramos verdadeira a sentença:

$$(3m - 1) \cdot 2^2 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$$

Assim, obtemos:

$(3m - 1) \cdot 4 - (m + 8) \cdot 2 + 10 = 0$

$12m - 4 - 2m - 16 + 10 = 0$

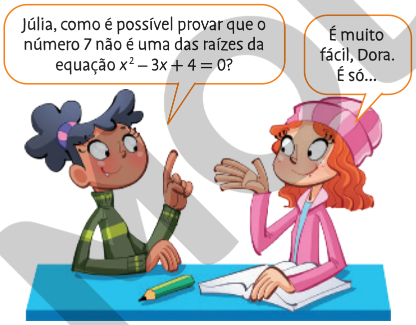
$10m - 10 = 0 \Rightarrow \frac{10m}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow m = 1$

11. ... substituir *x* por 7; se a sentença obtida for falsa, 7 não será a raiz dessa equação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Observe o diálogo entre Júlia e Dora.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Complete a resposta de Júlia para Dora.

12 Verifique, entre os números 2, –5, 9 e 10, quais são raízes da equação $x^2 - 11x + 18 = 0$. **12.** 2 e 9.

13 Verifique se o número 5 é raiz de cada equação a seguir.

a) $x^2 + 6x = 0$ **13. a)** Não.
b) $2x^2 - 10x = 0$ **13. b)** Sim.
c) $3x^2 - 75 = 0$ **13. c)** Sim.
d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ **13. d)** Sim.

14 Dois dos números -10, $-\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ e 10 são raízes da equação $x^2 - 10 = 0$. Quais são eles? **14.** $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$

15 Calcule o valor de *q* de modo que –1 seja raiz da equação $(3q - 2) \cdot x^2 + (2q - 1) \cdot x + 5 = 0$. **15.** $q = -4$

16 Calcule no caderno o valor de:

a) *p* na equação $3x^2 - 14x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja 4; **16. a)** $p = 4$
b) *k* na equação $(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 6 = 0$ para que uma das raízes seja 0. **16. b)** Zero não é raiz da equação; logo, não existe valor para *k* de modo que 0 seja raiz da equação.

2 Resolvendo equações do 2º grau

Vamos estudar a resolução de equações do 2º grau, considerando que as raízes, quando existirem, pertencerão ao conjunto dos números reais.

Equações do 2º grau incompletas

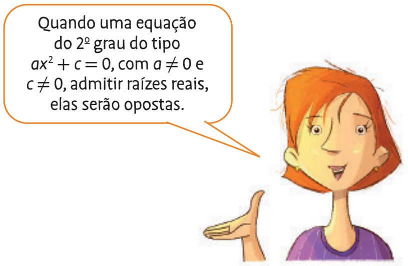
Quando $ax^2 + c = 0$

Vamos aprender a resolver equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b = 0$.

Considere, por exemplo, a equação $x^2 - 64 = 0$. Ela é uma equação do 2º grau incompleta, com $b = 0$. Adicionando 64 a ambos os membros da equação, obtemos:

$$x^2 - 64 + 64 = 0 + 64$$

$$x^2 = 64$$



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, encontramos os números que, elevados ao quadrado, resultem em 64.

$$x = -\sqrt{64} \text{ ou } x = \sqrt{64}, \text{ ou seja, } x = -8 \text{ ou } x = 8$$

Logo, as raízes da equação são: $x_1 = -8$ e $x_2 = 8$.

Acompanhe outros exemplos.

a) Resolver a equação $x^2 - 1 = 8{,}61$.

$x^2 - 1 = 8{,}61$

$x^2 = 8{,}61 + 1$

$x^2 = 9{,}61$

$x = \pm\sqrt{9{,}61}$

$x = \pm 3{,}1$

Logo, as raízes são $x_1 = -3{,}1$ e $x_2 = 3{,}1$.

b) Resolver a equação $x^2 + 9 = 0$.

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

Como não existe número real que elevado ao quadrado resulte em –9, essa equação não tem raiz real.

Observações

- Usamos o símbolo ± (lemos: "mais ou menos") para representar que algo pode assumir dois valores opostos. Por exemplo, escrevemos $x = \pm 7$ para indicar que $x = -7$ ou $x = 7$.
- As equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$ apresentam sempre duas raízes reais opostas ou não têm raízes reais.
- As equações do 2º grau do tipo $ax^2 = 0$ têm sempre duas raízes reais iguais a zero.

2. Resolvendo equações do 2º grau

Habilidade da BNCC: **EF09MA09**.

Aprofundando o estudo de equações do 2º grau, neste tópico serão estudadas maneiras de determinar o valor da incógnita em determinados casos dessas equações ampliando o desenvolvimento da habilidade (EF09MA09). Assim, nesta página, iniciamos o estudo das estratégias de resolução das equações do 2º grau incompletas, com algumas das quais os estudantes já se depararam em estudos anteriores.

Comente com eles que podemos denominar x_1 ou x_2 qualquer uma das raízes da equação.

Nesta página, tratamos das equações do 2º grau incompletas com coeficiente $b = 0$. Observe se os estudantes percebem que, nesse caso de equação incompleta com $b = 0$, só há raiz real quando os coeficientes a e c têm sinais opostos.

Resolvendo equações do 2º grau

Apresentamos as equações do 2º grau incompletas com coeficiente $c = 0$. Utilizamos o caso de fatoração "colocar em evidência o termo comum", que sempre envolverá a incógnita (x). Se julgar necessário, faça uma breve retomada desse caso de fatoração.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 17** a **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Verifique se ainda há estudantes com alguma dificuldade na obtenção da forma reduzida de uma equação do 2º grau.

O **exercício 19** pode ser realizado coletivamente, com o sorteio de alguns estudantes ou com voluntários que queiram expor o que pensaram.

Quando $ax^2 + bx = 0$

Vamos aprender a resolver equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c = 0$.

Considere a equação $5x^2 + 6x = 0$. Ela é uma equação do 2º grau incompleta, com $c = 0$. Colocando x em evidência, obtemos: $x \cdot (5x + 6) = 0$.

Como o produto dos fatores x e $5x + 6$ é zero, pelo menos um deles é zero. Assim:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x + 6 = 0$$

Resolvendo a equação $5x + 6 = 0$, encontramos $x = -\frac{6}{5}$.

Logo, as raízes da equação são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{6}{5}$.

Toda equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem sempre duas raízes diferentes, sendo uma delas igual a zero.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outros exemplos.

a) Vamos resolver a equação $4y^2 + 2y = 0$.

Colocando $2y$ em evidência, obtemos: $2y \cdot (2y + 1) = 0$

Como o produto dos fatores $2y$ e $2y + 1$ é zero, pelo menos um deles é zero. Assim:

$$2y = 0 \quad \text{ou} \quad 2y + 1 = 0$$

Resolvendo essas equações, encontramos, respectivamente, $y = 0$ e $y = -\frac{1}{2}$.

Logo, as raízes da equação são $y_1 = 0$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$.

b) Vamos determinar as raízes da equação $-5z^2 - 0{,}2z = 0$.

Colocando z em evidência, obtemos: $z \cdot (-5z - 0{,}2) = 0$

Como o produto dos fatores z e $-5z - 0{,}2$ é zero, pelo menos um deles é zero. Assim:

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad -5z - 0{,}2 = 0$$

Resolvendo a equação $-5z - 0{,}2 = 0$, encontramos $z = -0{,}04$.

Logo, as raízes da equação são $z_1 = 0$ e $z_2 = -0{,}04$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17. **a)** $y^2 - 2 = 0$; $y_1 = -\sqrt{2}$ e $y_2 = \sqrt{2}$

17 Escreva no caderno as equações a seguir na forma reduzida. Depois, resolva-as.

a) $(3y - 4) \cdot (3y + 1) = 14 - 9y$

b) $(m + 5) \cdot (m - 4) = m + 16$

17. **b)** $m^2 - 36 = 0$; $m_1 = -6$ e $m_2 = 6$

18 Que valores de x são raízes destas equações?

a) $x^2 - 100 = 0$ **18. a)** $x = -10$ e $x = 10$

b) $4x^2 = 81$ **18. b)** $x = -\frac{9}{2}$ e $x = \frac{9}{2}$

c) $(2x - 1) \cdot (x + 2) = 3x - 7x^2$ **18. c)** $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- O que podemos afirmar sobre as raízes dessas equações? **18.** São opostas.

19 Determine mentalmente as raízes reais das equações a seguir.

a) $-\frac{7x^2}{3} = 0$ **19. a)** $x_1 = x_2 = 0$

b) $x^2 = \frac{9}{4}$ **19. b)** $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$

c) $-4x^2 + 2 = 2$ **19. c)** $x_1 = x_2 = 0$

d) $2x^2 = 1$ **19. d)** $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

20 Pensei em um número, elevei-o ao quadrado, subtraí 60 e obtive 840. Se pensei em um número negativo, qual é esse número? **20.** –30

22. São equações do 2º grau com duas raízes, sendo uma delas igual a zero.

21 Resolva as equações a seguir no caderno.

a) $3x^2 + 15x = 0$ **21. a)** $x_1 = 0$ e $x_2 = -5$

b) $2y^2 - \frac{y}{3} = 0$ **21. b)** $y_1 = 0$ e $y_2 = \frac{1}{6}$

c) $9 \cdot (2n - 5) \cdot (n + 2) = 0$ **21. c)** $n_1 = \frac{5}{2}$ e $n_2 = -2$

d) $\frac{2x - 3}{x - 6} = \frac{3x - 1}{x - 2}$ $(x \neq 6$ e $x \neq 2)$ **21. d)** $x_1 = 0$ e $x_2 = 12$

22 Encontre as soluções das equações e, em seguida, responda à questão.

a) $5x^2 + 12x = 0$ **22. a)** 0 e $-\frac{12}{5}$

b) $-3y^2 = 6y$ **22. b)** 0 e –2

c) $\sqrt{3}x^2 + x = 0$ **22. c)** 0 e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $(m + 3) \cdot (m - 6) = -18$ **22. d)** 0 e 3

- O que essas equações têm em comum?

23 ***Hora de criar*** – Elabore um problema que seja resolvido por uma equação do 2º grau em que uma de suas soluções seja igual a zero. Em seguida, troque com um colega para que um resolva o problema do outro. Depois, confiram as resoluções. **23.** Resposta pessoal.

24 Calcule no caderno o valor de p na equação $x^2 - 6x + p + 5 = 0$ de modo que uma das raízes seja nula. **24.** $p = -5$

25 O dobro do quadrado de um número negativo adicionado ao triplo dele é igual a zero. Determine no caderno esse número. **25.** $-\frac{3}{2}$

26 Se do quadrado da idade de Luísa subtrairmos o dobro da idade dela, obteremos 10 vezes a idade de Lúcia, a irmã gêmea de Luísa. Qual é a idade de Luísa? **26.** 12 anos.

27 ***Hora de criar*** – Elabore no caderno um problema que possa ser resolvido por uma equação do 2º grau que tenha duas raízes reais e iguais. **27.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Descubra o valor de x no quadrado mágico e determine o valor da soma das colunas, das linhas e das diagonais.

Lembre-se de que a soma das colunas, das linhas e das diagonais em um quadrado mágico é sempre a mesma.

Pense mais um pouco...:
$x = 4$; soma = 30

$2x^2 - 20$	3	$x^2 - 1$
$3x + 1$	$2x + 2$	7
5	$\frac{x^2}{2} + 9$	$2x$

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Equações do 2º grau completas

Vamos aplicar o que foi estudado sobre fatoração e produtos notáveis para resolver algumas equações do 2º grau completas.

Quando o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito

Considere, por exemplo, a equação $x^2 - 12x + 36 = 0$, que é uma equação do 2º grau completa.

Observe que o 1º membro dessa equação é um **trinômio quadrado perfeito**.

$$\underset{(x)^2}{\underset{\uparrow}{x^2}} - \underset{-2\cdot x\cdot 6}{\underset{\uparrow}{12x}} + \underset{(6)^2}{\underset{\nwarrow}{36}} = (x - 6)^2$$

Assim, podemos escrever $(x - 6)^2 = 0$.

Como uma potência é nula somente se a base for zero, então, devemos ter:

$$x - 6 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad x = 6$$

Portanto, a equação tem duas raízes reais iguais a 6.

Toda equação do 2º grau que pode ser reduzida à forma $(mx + n)^2 = 0$, com m e n reais, $m \neq 0$, tem duas raízes reais e iguais.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 21** a **26** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Com a intenção de retomar o estudo da linguagem algébrica, apresente aos estudantes interpretações incorretas dos **exercícios 25** e **26** para que observem a importância de uma análise das informações contidas nos enunciados.

Por exemplo, no **exercício 25**, a tradução algébrica correta é:

$2x^2 + 3x = 0$

Mas alguns estudantes poderão indicar, erroneamente:

$(2x)^2 + 3x = 0$

Os estudantes podem utilizar os recursos de planilhas eletrônicas, de modo similar ao indicado na página 149 deste *Manual*, para comparar o comportamento da expressão algébrica correta com o das incorretas que forem indicadas para cada exercício.

Pense mais um pouco...

A seguir, apresentamos a resolução para a atividade proposta. Considerando que a soma da primeira coluna é igual à da diagonal principal, temos:

$2x^2 + 3x - 14 = 2x^2 + 4x - 18$

$3x - 4x = -18 + 14$

$x = 4$

Substituindo $x = 4$ na expressão da soma da primeira coluna, temos:

$2x^2 + 3x - 14 =$

$= 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 14 = 30$

Se julgar conveniente, retomar essa atividade após o estudo da resolução da equação do 2º grau completa para que percebam outras possibilidades de resolução.

Equações do 2º grau completas

Explore os exemplos apresentados nesta página para a resolução de equações do 2º grau completas que recaem em um trinômio quadrado perfeito. Se julgar necessário, retome esse caso de fatoração.

Discuta com os estudantes o fato de que, se o quadrado de um número (ou de uma expressão) é igual a zero, isso só ocorrerá se o número (ou a expressão) também for igual a zero. Desse modo, recaímos em uma equação do 1º grau e podemos concluir que a equação do 2º grau dada tem duas raízes reais e iguais.

Solicite aos estudantes que, em duplas, resolvam o problema formulado pela personagem desta página.

Espera-se que eles efetuem os cálculos a seguir.

$A_{\text{máxima}} = (7{,}0 + 0{,}6)^2 =$
$= 7{,}6^2 = 57{,}76$

$A_{\text{mínima}} = (4{,}9 + 0{,}6)^2 =$
$= 5{,}5^2 = 30{,}25$

Voltemos ao problema da abertura deste capítulo, em que a academia de esportes dispõe de 36 m² para a construção do ringue de boxe, e o construtor precisa determinar a medida dos lados do tablado quadrado, que varia de 4,9 m a 7,0 m mais a borda de 0,6 m.

Representando a medida do lado do ringue por x, a medida da área será representada por $(x + 0{,}6)^2$.

Então, podemos escrever a equação $(x + 0{,}6)^2 = 36$.

Resolvendo-a, obtemos: $x + 0{,}6 = \pm\sqrt{36}$

$x = -0{,}6 \pm 6$

$x_1 = 5{,}4$ e $x_2 = -6{,}6$

Como a medida é positiva, o ringue dessa academia deve ter 5,4 metros de lado.

Pelas medidas oficiais, qual é a medida da área máxima do tablado de um ringue de boxe? E a mínima?

Resposta: 57,76 m²; 30,25 m².

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outros exemplos de resolução de equações.

a) $y^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot y + 2 = 0$

$y^2 - 2 \cdot y \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 0$

$(y - \sqrt{2})^2 = 0$

$y - \sqrt{2} = 0$

$y = \sqrt{2}$

Duas raízes reais iguais a $\sqrt{2}$.

b) $4x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0$

$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 0$

$(2x - 3)^2 = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Duas raízes reais iguais a $\frac{3}{2}$.

c) $\frac{z^2}{4} - z + 1 = 0$

$\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{2}\right) \cdot 1 + 1^2 = 0$

$\left(\frac{z}{2} - 1\right)^2 = 0$

$\frac{z}{2} - 1 = 0$

$z = 2$

Duas raízes reais iguais a 2.

Quando o 1º membro não é um trinômio quadrado perfeito

As raízes positivas de equações do 2º grau já eram determinadas pelos babilônios por volta do ano 1800 a.C. Eles utilizavam seus conhecimentos de Geometria para representar a equação algébrica e, assim, resolvê-la.

Essa representação consistia em duas etapas: primeiro, traçavam uma figura cuja medida da área representasse o 1º membro da equação; depois, completavam a figura de modo a formar uma região quadrada. Com isso, eles conseguiam encontrar uma equação equivalente à equação inicial cujo 1º membro fosse um trinômio quadrado perfeito.

Esse método, conhecido como **método de completar quadrados**, também era usado pelos matemáticos árabes e hindus.

Acompanhe, por exemplo, como resolver a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ aplicando esse método.

Observe que o 1º membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito, mas é possível transformá-lo em um.

THE TRUSTEES OF THE BRITISH MUSEUM, LONDRES

Tábua babilônica BM 13901 (1800 a.C.). Nessa tábua há 24 problemas que envolvem equações do 2º grau.

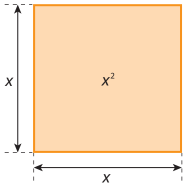
Primeiro, isolamos os termos algébricos no 1º membro da equação:

$$x^2 + 4x - 21 + 21 = 0 + 21$$

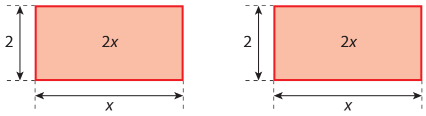
$$x^2 + 4x = 21$$

Em seguida, representamos os termos algébricos como figuras geométricas. Podemos, por exemplo, considerar três figuras:

- um quadrado com lado de medida x, que tem medida da área igual a x^2.



- dois retângulos com um lado de medida x e o outro de medida 2. Cada retângulo tem medida da área igual a $2x$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dispomos os retângulos de modo que um dos lados de medida x de cada retângulo coincida com um dos lados do quadrado (figura 1). Depois, completamos a figura com um quadrado cuja medida do lado é 2. Assim, obtemos um quadrado maior (figura 2), formado pelas quatro figuras geométricas.

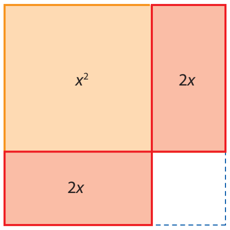


Figura 1

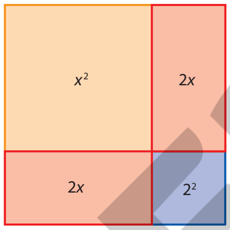


Figura 2

Dessa forma, para representar algebricamente a medida da área do quadrado da figura 2, devemos adicionar 2^2 a ambos os membros da equação:

$$x^2 + 4x + 2^2 = 21 + 2^2$$

Observe que a expressão do 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito.

Fatorando esse trinômio, obtemos:

$$x^2 + 4x + 2^2 = (x + 2)^2$$

Assim, obtemos a seguinte equação do 2º grau:

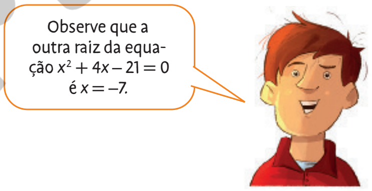
$$(x + 2)^2 = 25$$

Consideramos $x + 2$ positivo porque é a medida do lado de um quadrado. Assim:

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Logo, uma raiz da equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ é 3.



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Equações do 2º grau completas

O método de completar quadrados pode ser utilizado se percebermos que, embora o trinômio obtido na forma reduzida da equação do 2º grau apresentada não seja um quadrado perfeito, parte dele pode ser transformada em um quadrado perfeito, desde que acrescentemos termos convenientes em ambos os membros da equação.

Explore o exemplo apresentado, reproduzindo na lousa a equação e as figuras para que os estudantes acompanhem cada etapa.

Ressalte que obtivemos apenas uma raiz, pois, no contexto, x representava uma medida e, portanto, um número positivo. Se interpretarmos a equação $(x + 2)^2 = 25$ com x sendo um número real qualquer, devemos procurar os números que elevados ao quadrado resultem 25, ou seja, $x + 2 = \pm5$. Daí, temos:

$x + 2 = 5$ ou $x + 2 = -5$
$x = 5 - 2$ $\quad$ $x = -5 - 2$
$x = 3$ $\quad$ $x = -7$

Solicite aos estudantes que validem a resolução fazendo a verificação das raízes obtidas substituindo-as na equação e efetuando as operações da expressão numérica.

Equações do 2º grau completas

Peça aos estudantes que, em duplas, leiam e acompanhem o desenvolvimento do **exemplo 1**. Proponha a eles que reproduzam as figuras no caderno, registrando uma explicação para cada uma delas.

Verifique se percebem a diferença da obtenção apenas da raiz positiva e, no caso do cálculo, para obter as duas raízes.

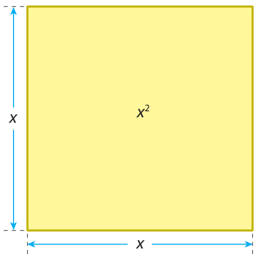
Solicite aos estudantes que validem a resolução fazendo a verificação das raízes obtidas substituindo-as na equação e efetuando as operações da expressão numérica.

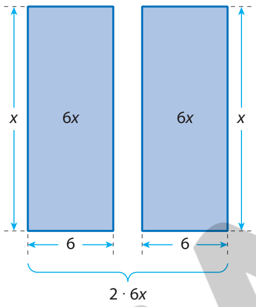
Amplie este estudo apresentando novos exemplos e pedindo às duplas que, primeiro, construam as figuras representando os elementos da equação e, depois, exponham a resolução algébrica considerando x um real qualquer.

Vamos acompanhar alguns exemplos.

Exemplo 1

Para resolver a equação $x^2 - 12x - 13 = 0$, primeiro fazemos $x^2 - 12x = 13$. Em seguida, fazemos as representações geométricas:





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Do quadrado de lado x, devemos tirar os dois retângulos de lados 6 e x.

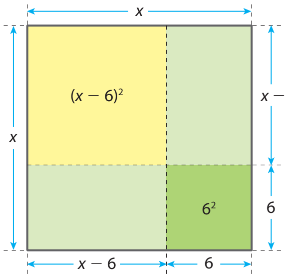


Figura 1

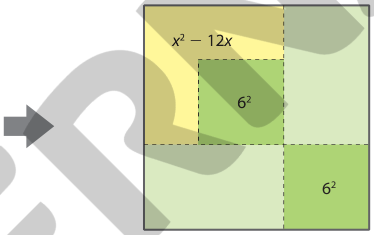


Figura 2

Observe que, na figura 1, há um quadrado de lado 6 que deve ser tirado duas vezes, o que nos leva à figura 2.

O que sobra é só a parte amarela. Note, na figura 2, que, para completar o quadrado de lado $x - 6$, devemos acrescentar um quadrado de lado 6. Isso equivale a dizer que, para obter um trinômio quadrado perfeito, devemos adicionar 6^2 no primeiro membro. E, para manter a igualdade, adicionar 6^2 no segundo membro.

$$x^2 - 12x + 6^2 = 13 + 6^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = 13 + 36$$

$$(x - 6)^2 = 49$$

$(x - 6)$ é positivo, pois é medida do lado de um quadrado. Assim: $x - 6 = 7$, ou seja, $x = 13$.

Caso estivéssemos resolvendo a equação sem o uso de figuras, prosseguiríamos assim:

$$x - 6 = \pm\sqrt{49}$$

$$x - 6 = \pm 7$$

- Para $x - 6 = 7$, obtemos $x_1 = 13$.
- Para $x - 6 = -7$, obtemos $x_2 = -1$.

Exemplo 2

Vamos determinar as raízes da equação $4y^2 + 8y + 3 = 0$.

$4y^2 + 8y + 3 = 0$

$4y^2 + 8y = -3$

$4y^2 + 8y + 2^2 = -3 + 2^2$ ← Como $4y^2 = (2y)^2$ e $8y = 2 \cdot (2y) \cdot 2$, adicionamos 2^2 a ambos os membros da equação para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro.

$(2y + 2)^2 = 1$

$2y + 2 = \pm 1$

- Para $2y + 2 = -1$, obtemos $y = -\frac{3}{2}$.
- Para $2y + 2 = 1$, obtemos $y = -\frac{1}{2}$.

Logo, as raízes da equação são $y_1 = -\frac{3}{2}$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

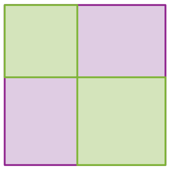
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Resolva no caderno cada uma das equações a seguir.

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$
b) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
c) $4y^2 = 4y - 1$
d) $p^2 + 6p = 16p - 25$

28. a) $x_1 = x_2 = 7$
28. b) $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$
28. c) $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$
28. d) $p_1 = p_2 = 5$

29 Nesta figura, das partes quadradas coloridas com verde, a maior tem área medindo x^2. A soma das medidas das áreas dos retângulos lilases é $8x$. Determine a medida da área do quadrado menor.


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

29. Medida da área do quadrado menor: 16

30 Resolva no caderno as equações a seguir usando o método de completar quadrados.

a) $x^2 + 10x + 24 = 0$ **30. a)** $x_1 = -4$ ou $x_2 = -6$
b) $y^2 - 4y + 3 = 0$ **30. b)** $y_1 = 1$ ou $y_2 = 3$
c) $n^2 + 4n - 12 = 0$ **30. c)** $n_1 = -6$ ou $n_2 = 2$
d) $r^2 - 2r - 3 = 0$ **30. d)** $r_1 = -1$ ou $r_2 = 3$

31 Determine os valores reais de x que verificam as equações a seguir.

a) $4x^2 - 12x + 5 = 0$ **31. a)** $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{5}{2}$
b) $9y^2 - 3y - 2 = 0$ **31. b)** $y_1 = -\frac{1}{3}$ e $y_2 = \frac{2}{3}$
c) $2n^2 + 7n + 6 = 0$ **31. c)** $n_1 = -2$ e $n_2 = -\frac{3}{2}$
d) $3x^2 + 8x - 3 = 0$ **31. d)** $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{3}$

32 Considere três números naturais e consecutivos. O produto dos dois maiores é igual a 10 vezes o menor mais 10 unidades. Calcule no caderno a média aritmética desses três números. **32.** Média aritmética: 8

33 Daqui a 6 anos, a idade de Daniela será igual ao quadrado da idade dela há 6 anos. Indique a idade atual de Daniela por x para resolver as questões que se seguem. **33. a)** Construção de quadro.

a) Construa no caderno um quadro com as idades de Daniela: hoje, 6 anos atrás e daqui a 6 anos. **33. b)** $x + 6 = (x - 6)^2$
b) Que equação traduz a situação do problema?
c) Qual é a idade atual de Daniela?

33. c) 10 anos.

34 *Hora de criar* – Troque com um colega um problema, criado por vocês, que possa ser resolvido por uma equação do 2º grau que tenha duas raízes reais e iguais. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

34. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Leia e resolva o problema.

Um prédio é abastecido por duas caixas-d'água em forma de cubo. A maior tem arestas internas medindo 1 m a mais que a menor. Conversando com uma moradora do prédio sobre a capacidade das caixas-d'água, o síndico disse:

— A diferença entre as capacidades das duas caixas é 91 000 litros.

Qual é a medida, em metro, das arestas de cada uma dessas caixas-d'água?

Pense um pouco mais...: 6 m e 5 m.


CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 28** a **32** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Para o **item a** do **exercício 33**, podemos organizar o seguinte quadro:

Idade de Daniela			
Época	6 anos atrás	Hoje	Daqui a 6 anos
Expressão da idade	$x - 6$	x	$x + 6 = (x - 6)^2$

Ao final, sugira aos estudantes que acrescentem uma linha ao quadro com os respectivos valores das idades em cada época.

Idade de Daniela			
Época	6 anos atrás	Hoje	Daqui a 6 anos
Expressão da idade	$x - 6$	x	$x + 6 = (x - 6)^2$
Idade (em anos)	4	10	16

É importante caminhar pela sala de aula e observar como os estudantes construíram e completaram o quadro, intervindo para que eles façam os ajustes quando necessário.

Em seguida, exponha quadros diferentes para que os estudantes observem e comparem as informações presentes, favorecendo a percepção de como um quadro pode representar os dados de um problema a ser resolvido. Sugerimos, ainda, propor aos estudantes a elaboração de novos problemas similares a este.

Pense mais um pouco...

A resolução da atividade proposta nesta seção está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

3. A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

Habilidade da BNCC:
EF09MA09.

Dando continuidade ao estudo sobre equações do 2º grau e ampliando o desenvolvimento da habilidade (EF09MA09), neste tópico trabalhamos a fórmula resolutiva para uma equação do 2º grau qualquer.

Comente com os estudantes que, em algumas regiões do Brasil, essa fórmula é conhecida como "fórmula de Bhaskara"; entretanto, não foi Bhaskara quem a descobriu. Sabe-se que somente com o matemático francês François Viète (1540-1603) passaram a ser usadas fórmulas para obter as raízes de uma equação do 2º grau.

Em geral, para aplicar a fórmula resolutiva para uma equação do 2º grau, calculamos inicialmente o valor do discriminante Δ, pois o seu valor indica se há raízes reais ou não, e, em seguida, determinamos o valor da incógnita (*x*). No entanto, os estudantes podem aplicar a expressão para a incógnita diretamente, fazendo as substituições desta maneira:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3 A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

Assim como os árabes, os matemáticos indianos – entre eles Bhaskara – também se interessavam pelas equações do 2º grau. Embora não aplicassem exatamente as fórmulas que conhecemos hoje, o processo de resolução dessas equações com base em regras, usado por eles, era bastante próximo dos procedimentos atuais.

Vamos agora generalizar o método de completar quadrados obtendo uma fórmula para resolver equações do 2º grau.

Considere a equação completa do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais *a*, *b* e *c*, e $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \longleftarrow \text{Adicionamos } -c \text{ a ambos os membros da equação.}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \longleftarrow \text{Multiplicamos ambos os membros por } 4a\ (a \neq 0).$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \longleftarrow \text{Adicionamos } b^2 \text{ aos dois membros.}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \longleftarrow \text{Fatoramos o 1º membro.}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad (\text{para } b^2 - 4ac \geqslant 0)$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Isolando *x*, obtemos a fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante da equação**, que geralmente é representado pela letra grega Δ (lemos: "delta"). Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Desse modo, se $\Delta \geqslant 0$, podemos escrever a fórmula resolutiva da seguinte maneira:

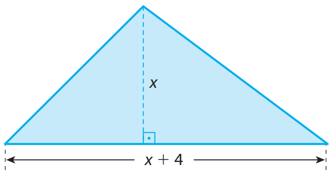
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observação

- Quando $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.

Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular a medida da altura do triângulo a seguir, cuja área *A* mede 10,5 cm².



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

$$A = \frac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2}$$

$$10{,}5 = \frac{(x + 4)x}{2} = \frac{x(x + 4)}{2}$$

$$2 \cdot \frac{x(x+4)}{2} = 2 \cdot 10,5$$

$x(x + 4) = 2 \cdot 10,5$

$x^2 + 4x = 21$

$x^2 + 4x - 21 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = 4$ e $c = -21$.

Resolvendo a equação, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{tikzcd} & x_1 = \frac{-4 + 10}{2} = 3 \\ x = \frac{-4 \pm 10}{2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \text{e} \\ & x_2 = \frac{-4 - 10}{2} = -7 \end{tikzcd}$$

As raízes da equação são $x_1 = 3$ e $x_2 = -7$.

Como x representa a medida de comprimento, a raiz -7 não é solução. Logo, $x = 3$.

Observação

▶ Substituindo cada um dos valores encontrados na equação $x^2 + 4x - 21 = 0$, obtemos igualdades numéricas verdadeiras. Por exemplo, para $x = -7$, obtemos:

$(-7)^2 + 4 \cdot (-7) - 21 = 0$

$49 - 28 - 21 = 0$

$49 - 49 = 0$ (verdadeira)

Acompanhe outros exemplos de resolução de equações.

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$

Indicamos: $a = 1$, $b = 8$ e $c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16)$

$\Delta = 64 - 64 = 0$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais dadas por $x = \frac{-b}{2a}$. Então:

$$x_1 = x_2 = \frac{-(+8)}{2} = -4$$

b) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Indicamos: $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (1)$

$\Delta = 4 - 12$

$\Delta = -8 < 0$

Como os números negativos não têm raiz quadrada real, dizemos que a equação não admite raízes reais.

c) $4x^2 - 12x + 7 = 0$

Indicamos: $a = 4$, $b = -12$ e $c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (7) = 144 - 112 = 32$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\text{; logo, } x = \frac{-(-12) \pm 4\sqrt{2}}{2 \cdot (4)} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}(3 \pm \sqrt{2})}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$.

A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau

Peça aos estudantes que acompanhem individualmente os exemplos apresentados. Solicite que façam, no caderno, todas as verificações de que os valores encontrados, quando existirem, satisfazem realmente à respectiva equação. Ressalte a ligação que existe entre a quantidade de raízes e o valor do discriminante:

- se $\Delta > 0$, a equação do 2º grau tem duas raízes reais distintas;
- se $\Delta = 0$, a equação do 2º grau tem duas raízes reais e iguais;
- se $\Delta < 0$, a equação do 2º grau não tem raízes reais.

Para saber mais

A seção explora a construção de um retângulo áureo e possibilita desenvolver as habilidades (EF09MA01) e (EF09MA04), pois os estudantes poderão perceber que, fixada uma unidade de medida de comprimento, há segmentos que não podem ser expressos por um número racional. Além disso, utilizam números irracionais na resolução da situação-problema proposta.

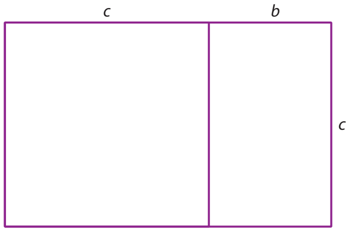
Se julgar conveniente, proponha aos estudantes uma pesquisa sobre o número de ouro e sua relação com os números da sequência de Fibonacci, verificando os conhecimentos que já construíram anteriormente sobre esse assunto.

PARA SABER MAIS

Número de ouro

No texto *Uma razão de ouro*, na seção **Para saber mais** do **capítulo 4** (p. 95), percebemos que, se retirarmos o maior quadrado possível de um retângulo áureo, o retângulo restante também será um retângulo áureo, isto é, a proporção entre os lados se manterá.

Observe a figura a seguir.



$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{c+b}{c} = \frac{c}{b}$$

Fazendo $c = 1$, obtemos:

$$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b}$$

$$b^2 + b - 1 = 0$$

Agora, podemos resolver a equação do 2º grau obtida. Os coeficientes são 1, 1 e –1.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

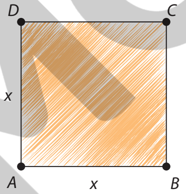
$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como a medida do lado é positiva, então $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

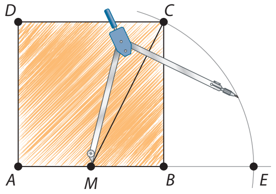
Logo, o número de ouro, que fascinou os matemáticos gregos, instrumentou arquitetos do Partenon (templo da deusa Atena) e inspirou mestres da pintura, como Leonardo da Vinci, é dado por:

$$\frac{\text{medida da largura}}{\text{medida da altura}} = \frac{1+b}{1} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 1{,}618$$

A partir de um quadrado, podemos construir um retângulo áureo com régua e compasso. Observe.

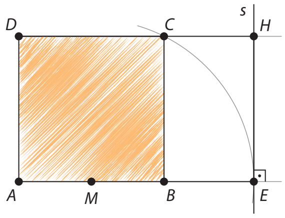


Construir um quadrado de lado *x*.

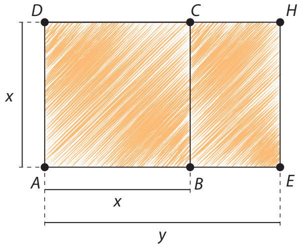


Obter o ponto *M*, médio de $\overline{AB}$. Com centro *M* e raio *MC*, traçar arco obtendo o ponto *E* em $\overleftrightarrow{AB}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Por E, traçar a reta s, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Na intersecção de $\overleftrightarrow{DC}$ com s, indicar o ponto H.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO /ARQUIVO DA EDITORA

O retângulo $AEHD$ é um retângulo áureo.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BE} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

Agora é com você! **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Seguindo o procedimento anterior, construa um retângulo áureo a partir de um quadrado de lado medindo 6 cm. Depois, com a régua, obtenha as medidas AE e BE.

Com essas medidas, verifique que $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BE} \simeq 1{,}618$. *Para saber mais*: Construção de figura.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Encontre as raízes reais das equações.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ **35. a)** $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{4}{3}$

b) $2m^2 - m - 6 = 0$ **35. b)** $m_1 = -\frac{3}{2}$ e $m_2 = 2$

c) $-x^2 + 3x + 10 = 0$ **35. c)** $x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

d) $y^2 + 8y - 4 = 0$ **35. d)** $y_1 = -4 + 2\sqrt{5}$ e $y_2 = -4 - 2\sqrt{5}$

e) $9y^2 - 12y + 4 = 0$ **35. e)** $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$

f) $5x^2 + 3x + 5 = 0$ **35. f)** Não possui raízes reais.

36 Escreva no caderno as equações a seguir na forma reduzida e resolva-as.

a) $x(x + 3) = 5x + 15$ **36. a)** $x_1 = -3$ e $x_2 = 5$

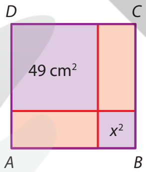
b) $\frac{3y + 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$ **36. b)** $y_1 = -\frac{1}{2}$ e $y_2 = 5$

c) $(x + 4)^2 = 9x + 22$ **36. c)** $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$

d) $(x - 1)^2 + 3x = x + 26$ **36. d)** $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$

e) $(x + 4) \cdot (x - 1) = 5x + 20$ **36. e)** $x_1 = -4$ e $x_2 = 6$

37 Na figura, $ABCD$ é um quadrado. As partes lilases também são quadrados.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

37. a) $x^2 + 14x + 49$

a) Escreva no caderno a expressão que representa a medida da área da figura.

b) Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ mede 100 cm², determine a medida do lado do menor quadrado dessa figura. **37. b)** 3 cm

38 Escreva no caderno a equação do 2º grau que expressa as descrições a seguir.

a) A metade da soma de um número com o seu quadrado é igual a 210. **38. a)** $\frac{x + x^2}{2} = 210$

b) O quadrado de um número aumentado de seus $\frac{3}{5}$ é igual a 28. **38. b)** $x^2 + \frac{3}{5}x = 28$

- Encontre as raízes reais das equações dos itens **a** e **b**.

38. a) $x_1 = -21$ ou $x_2 = 20$ **38. b)** $x_1 = 5$ ou $x_2 = -\frac{28}{5}$

39 A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é o triplo desse número? **39.** 45 ou –36

40 Uma folha quadrada de cartolina mede x cm de lado. Recorta-se dessa folha um retângulo que mede x cm de comprimento e 15 cm de largura. A parte que restou da folha é um retângulo de área medindo 1 750 cm². Encontre a medida da área da folha de cartolina. **40.** 2 500 cm²

Agora é com você!

Incentive os estudantes a determinar a medida AE antes de realizarem a construção.

Obtendo o retângulo $AEHD$ a partir de um quadrado $ABCD$ da maneira descrita no texto, sabemos que:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BE} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

Como $AB = EH$ e $BE = AE - AB = 6$ cm, devemos ter:

$$\frac{AE}{6} = \frac{6}{AE - 6}$$

$$AE \cdot (AE - 6) = 36$$

Indicando AE por x, com $x > 0$ (medida de segmento), temos a equação:

$$x \cdot (x - 6) = 36$$

$$x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$\Delta = 180 = 36 \cdot 5$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm 6\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 6 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \text{ pois } x > 0$$

$$x \simeq 6 \cdot 1{,}618$$

$$x = AE \simeq 9{,}7 \text{ cm}$$

Note que, nesse caso, temos:

$BE = 3{,}7$ cm $(9{,}7 - 6 = 3{,}7)$

Logo:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{9{,}7}{6} \simeq 1{,}62$$

$$\frac{EH}{BE} = \frac{6}{3{,}7} \simeq 1{,}62$$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 35** a **40** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

No **exercício 40**, uma estratégia para a discussão e a resolução é escolher dois estudantes e pedir a um deles que leia pausadamente o enunciado enquanto o outro faz, na lousa, a representação geométrica desse enunciado.

À medida que o problema é lido e registrado, os demais estudantes podem dar dicas e sugestões. Ao concluir o desenho, proponha à turma uma reflexão sobre que condição x deve satisfazer para que o problema seja exequível ($x > 15$).

Depois, uma nova dupla de estudantes pode explicar como chegou à solução do problema.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 41** a **48** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Complemente o **exercício 43** sugerindo aos estudantes que reproduzam a figura no caderno e escrevam em cada um dos retângulos a medida de sua área. Por fim, peça a eles que calculem a medida da área total, verificando se está de acordo com o esperado (dados do problema).

O ato de resolver e, em seguida, avaliar a resposta encontrada é de extrema importância, pois, assim, os estudantes podem perceber que é possível confirmar se a resolução está correta. Esse tipo de avaliação pode e deve ser feito pelos próprios estudantes.

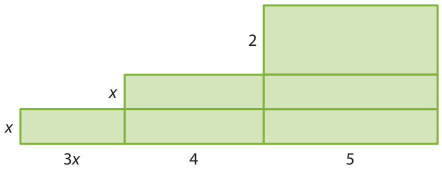
No **exercício 49**, incentive-os a pesquisar antecipadamente as relações de Girard. Apesar de essas relações serem demonstradas, convém alertá-los de que aqui, como observaram alguns casos particulares, as suas conclusões devem ser consideradas apenas conjecturas.

44. a) $(2x + 3)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$ ou $2x^2 + 12x + 9$

41 A base de um retângulo mede 5 m a mais que sua altura. A área do retângulo mede 300 m². Calcule no caderno a medida do perímetro desse retângulo. **41.** 70 m

42 Sabemos que o número de diagonais de um polígono convexo é determinado pela fórmula $d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$, na qual d é o número de diagonais e n, o número de lados do polígono. Assim, escreva no caderno o nome do polígono que tem 35 diagonais. **42.** Decágono.

43 Considere a figura composta de retângulos.



43. a) $3x^2 + 18x + 10$

a) Qual é a expressão que representa a medida da área dessa figura?

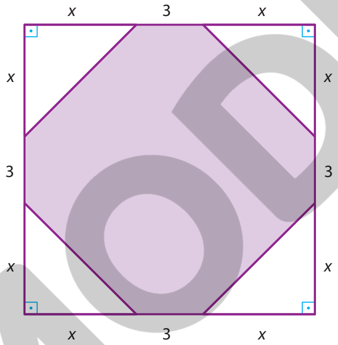
b) Se a medida da área for 31, qual será a equação correspondente?

c) Quais são as raízes da equação encontrada?

d) Qual dessas raízes será solução, se a área medir 31? **43. b)** $3x^2 + 18x - 21 = 0$

43. d) 1 **43. c)** $x_1 = -7$ e $x_2 = 1$

44 Considere a figura.



a) Determine a expressão que representa a medida da área lilás da figura.

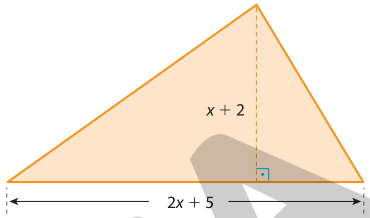
b) Indique o valor de x para que essa área meça 119. **44. b)** $x = 5$

45. 3,5 cm

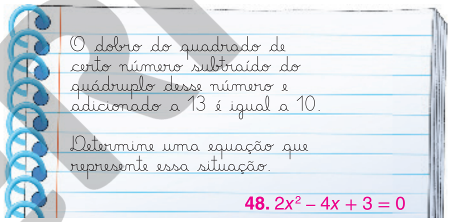
45 Contornando-se um quadrado com uma faixa de 2 cm de largura, obtém-se um novo quadrado medindo 56,25 cm² de área. Qual é a medida do lado do primeiro quadrado?

46 (Vunesp) Corta-se um pedaço de arame de 12 dm em duas partes e constrói-se, com cada uma delas, um quadrado. Se a soma das medidas das áreas é 5 dm², determine a que distância de uma das extremidades do arame foi feito o corte. **44.** 4 dm ou 8 dm.

47 Para que valor de x o triângulo a seguir tem 95 cm² de medida de área? **47.** 7,5 cm



48 Sueli gosta de inventar problemas de Matemática para suas amigas. Certo dia, ela escreveu um problema em uma folha de papel e entregou-o para Marlene resolver.



O dobro do quadrado de certo número subtraído do quádruplo desse número e adicionado a 13 é igual a 10.

Determine uma equação que represente essa situação.

48. $2x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolva o problema que Sueli inventou.

48. $\Delta < 0$, não existe número real que satisfaça a equação.

49 Considere as equações do exercício **35**. Para cada item de **a** a **e**, calcule no caderno as seis razões possíveis entre os coeficientes das equações. Depois, calcule:

a) a soma das raízes e compare-a com as razões obtidas; **49. a)** $\frac{7}{3}$; $\frac{1}{2}$; 3; –8; $\frac{4}{3}$

b) o produto das raízes e compare-o com as razões obtidas. **49. b)** $\frac{4}{3}$; –3; –10; –4; $\frac{4}{9}$

- Há alguma relação entre o oposto da soma das raízes e alguma das razões obtidas?
- Há alguma relação entre o produto das raízes e alguma das razões obtidas?

50. Resposta pessoal.

50 *Hora de criar* – Troque com um colega um problema, criado individualmente por vocês, que se possa resolver por uma equação do 2º grau. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

49. • Espera-se que os estudantes observem a igualdade, nesses casos, entre o oposto da soma das raízes e a razão $\frac{b}{a}$.

• Espera-se que os estudantes observem a igualdade, nesses casos, entre o produto das raízes e a razão $\frac{c}{a}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 Estudando as raízes de uma equação do 2º grau

Analisando a fórmula resolutiva das equações do 2º grau, podemos verificar se uma equação tem ou não raízes reais e obter uma relação entre os coeficientes dessa equação e suas raízes.

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e diferentes se, e somente se, $\Delta > 0$.
  Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau admite duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$.
  Nesse caso, as raízes são dadas por:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Uma equação do 2º grau não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$.

Acompanhe a resolução dos exemplos a seguir.

a) Observe como Gláucia determinou o valor de k para que a equação $x^2 - 8x + k = 0$ tenha duas raízes reais e diferentes.

IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- Podemos substituir valores possíveis de k na equação para verificar se o valor de Δ é positivo. Observe.

• Para $k = 0$, obtemos:	• Para $k = 16$, obtemos:	• Para $k = 20$, obtemos:
$x^2 - 8x = 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$	$x^2 - 8x + 20 = 0$
$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 0$	$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 16$	$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 20$
$\Delta = 64 > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta = -16 < 0$

Esse procedimento não resolve a questão proposta e serve apenas para verificar valores particulares.

4. Estudando as raízes de uma equação do 2º grau

Habilidade da BNCC:
EF09MA09.

Aprofundando o estudo das equações do 2º grau, neste tópico, sugerimos retomar algumas estratégias de resolução já estudadas, revisando o uso de fatorações para a resolução dessas equações, associando e comparando com a fórmula resolutiva para, desse modo, ampliar o desenvolvimento da habilidade (EF09MA09).

Ressalte aos estudantes que, para toda equação do 2º grau (completa ou incompleta), podemos usar a fórmula resolutiva e calcular o valor do discriminante, embora no caso das equações incompletas os procedimentos estudados anteriormente sejam mais indicados, por serem mais diretos. Desse modo, podemos usar o valor do discriminante para estudar as raízes de qualquer equação do 2º grau.

Apresente outros exemplos para que os estudantes, sem resolver, verifiquem quais são os tipos de raízes de cada equação.

a) $x^2 - 1 = 0$
Como $\Delta = 4 > 0$, temos que essa equação tem duas raízes reais e diferentes.

b) $x^2 - x = 0$
Como $\Delta = 1 > 0$, temos que essa equação tem duas raízes reais e distintas.

c) $x^2 + 9 = 0$
Como $\Delta = -36 < 0$, temos que essa equação não tem raízes reais.

Sugerimos retomar o uso de planilhas eletrônicas a fim de desenvolver a **competência geral 5**. Para isso, pode-se propor aos estudantes que utilizem os recursos do *software* para, automaticamente, determinar se uma equação do 2º grau tem uma raiz, duas raízes ou nenhuma raiz real, dados os valores de a, b e c. Eles devem utilizar as ferramentas da planilha eletrônica e a expressão do determinante para calcular seu valor e analisar se ele é menor, maior ou igual a 0 (zero).

Para ampliar, pode-se propor que construam na planilha eletrônica uma maneira de determinar automaticamente as raízes de uma equação do 2º grau. Essa construção pode ser utilizada na resolução de problemas ou para conferir as respostas dos exercícios, por exemplo.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 51** a **55** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Nos **exercícios 51** e **55**, é importante que os estudantes reflitam a respeito das condições para que uma equação de 2º grau tenha ou não raízes reais.

Pense mais um pouco...

A seção apresenta uma ampliação do **exercício 55**, que propicia aos estudantes interpretarem os resultados obtidos no exercício. Proponha outras discussões como essa.

b) Vamos determinar o valor de n para que a equação $x^2 - 5x + n = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

Como queremos que a equação do 2º grau admita duas raízes reais e iguais, devemos impor a condição $\Delta = 0$.

Assim: $a = 1$, $b = -5$ e $c = n$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$(-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (n) = 0$

$25 - 4n = 0$

$4n = 25$

$n = \dfrac{25}{4}$

c) Vamos determinar o valor de m na equação $3x^2 - 7x + 2m = 0$ para que não existam raízes reais.

Como queremos que a equação do 2º grau não admita raízes reais, devemos impor a condição $\Delta < 0$.

Assim: $a = 3$, $b = -7$ e $c = 2m$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$(-7)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (2m) < 0$

$49 - 24m < 0$

$24m > 49$

$m > \dfrac{49}{24}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

51 Dada a equação $2x^2 + 3x + p = 0$, determine no caderno: **51. a)** $p = \dfrac{9}{8}$

a) o valor de p para que as raízes sejam reais e iguais;

b) as raízes para o valor de p encontrado no item anterior; **51. b)** $x_1 = x_2 = -\dfrac{3}{4}$

c) o valor de p para que uma das raízes seja igual a zero; **51. c)** $p = 0$ **51. d)** $p = -14$

d) o valor de p para que uma das raízes seja 2;

e) o valor de p para que a equação não admita raízes reais. **51. e)** $p > \dfrac{9}{8}$

52 Para que valores de k a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tem raízes reais e diferentes? **52.** $k < \dfrac{2}{5}$

53 Determine no caderno o valor de k na equação $x^2 - kx + 9 = 0$ para que as raízes sejam reais e iguais. **53.** $k = 6$ ou $k = -6$

54 Determine no caderno o valor de p na equação $x^2 - (p + 5)x + 36 = 0$ para que as raízes sejam reais e iguais. **54.** $p = 7$ ou $p = -17$

55 Considere a equação $9x^2 + 12x + 2m = 0$. Para que valores de m essa equação:

a) não admite raízes reais? **55. a)** $m > 2$

b) tem duas raízes reais e iguais? **55. b)** $m = 2$

c) tem duas raízes reais e diferentes?

d) tem o número 0,2 como raiz?

55. c) $m < 2$ **55. d)** $-1{,}38$

Pense mais um pouco...

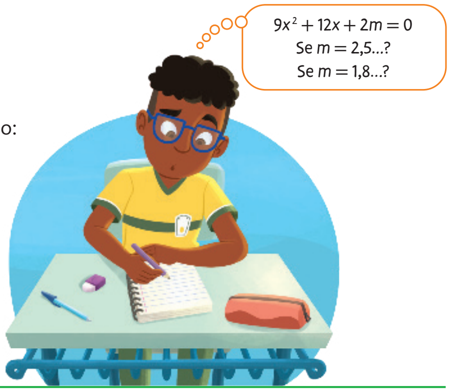
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Considere o exercício 55.

O que podemos concluir sobre as raízes da equação:

- quando $m = 2{,}5$?
- quando $m = 1{,}8$?

Pense mais um pouco...: Como $m = 2{,}5 > 2$, nesse caso a equação não admite raízes reais. Como $m = 1{,}8 < 2$, a equação tem duas raízes reais e diferentes.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Relações de Girard

No início do século XVII, houve grande interesse pelos estudos matemáticos em toda a Europa Ocidental. Muitas pesquisas foram feitas para encontrar soluções às diversas equações e estabelecer relações entre seus coeficientes e suas raízes. Porém, esses estudos eram limitados porque os matemáticos da época não consideravam as raízes negativas.

Em 1629, foi publicado o livro *Invention nouvelle en l'algèbre* (Novas invenções em álgebra), do francês Albert Girard (1595-1632). Nesse livro, Girard demonstra as relações que há entre as raízes e os coeficientes de uma equação, admitindo a existência das raízes negativas.

Vamos acompanhar, agora, como aplicar essas relações em uma equação do 2º grau.

Consideremos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, sendo x_1 e x_2 suas raízes.

Vamos estabelecer as relações de Girard entre essas raízes e os coeficientes a, b e c dessa equação.

Sabemos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{com } \Delta \geqslant 0)$$

1ª relação: soma das raízes

Considerando S a soma das raízes de uma equação do 2º grau, podemos verificar que $S = \frac{-b}{a}$.

De fato:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Então:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ ou } S = \frac{-b}{a}$$

2ª relação: produto das raízes

Indicando por P o produto das raízes de uma equação do 2º grau, podemos verificar que $P = \frac{c}{a}$.

De fato:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ ou } P = \frac{c}{a}$$

Relações de Girard

Neste tópico, apresentamos as relações de Girard válidas para uma equação do 2º grau. Se julgar oportuno, comente com os estudantes que no Ensino Médio eles estudarão equações polinomiais de grau maior que 2 e uma ampliação dessas relações para as novas equações.

Explique também que, conhecendo o produto e a soma algébrica das raízes, é possível compor equações que tenham as raízes dadas, assunto que será estudado a seguir.

Relações de Girard

Explore os exemplos com os estudantes, reproduzindo parte deles na lousa. Peça que façam uma leitura individual dos demais exemplos; depois, promova uma discussão com toda a turma.

O uso de estratégias variadas possibilita verificar também o quanto os estudantes já consolidaram conhecimentos algébricos estudados e detectar dificuldades que ainda apresentam.

- **Exemplos**

a) Vamos determinar a soma e o produto das raízes da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Os coeficientes da equação são: $a = 3$, $b = -7$ e $c = 2$.

Usando a relação $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

para encontrar a soma das raízes, consideramos:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$$

Usando a relação $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

para encontrar o produto das raízes, consideramos:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a soma das raízes é $\frac{7}{3}$ e o produto é $\frac{2}{3}$.

Para verificar a validade das respostas encontradas, podemos calcular as raízes da equação e comprovar se a soma e o produto são iguais aos valores indicados.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

b) Vamos determinar o valor de k, com $k \neq 0$, na equação $kx^2 - 22x + 20 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{11}{3}$.

Assim: $a = k$, $b = -22$ e $c = 20$

$$\underbrace{x_1 + x_2} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-(-22)}{k} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{22}{k} = \frac{11}{3}$$

$$11k = 66$$

$$\frac{11k}{11} = \frac{66}{11}$$

Portanto, $k = 6$.

c) Vamos determinar o valor de p, com $p \neq 0$, na equação $px^2 - 5x + (p - 5) = 0$ para que o produto das raízes seja $\frac{1}{6}$.

Assim: $a = p$, $b = -5$ e $c = p - 5$

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{p - 5}{p} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot (p - 5) = p$$

$$6p - 30 = p$$

$$5p = 30$$

Portanto, $p = 6$.

d) Vamos calcular o valor de k na equação $x^2 - 12x + k = 0$ para que uma das raízes seja o dobro da outra.

Indicando as raízes dessa equação por m e n, obtemos:

$$\begin{cases} m + n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12 \\ m \cdot n = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m + n = 12 \\ m \cdot n = k \end{cases}$$

De acordo com a condição do problema, $m = 2n$.

Primeiro, vamos resolver o sistema: $\begin{cases} m + n = 12 \\ m = 2n \end{cases}$

Substituindo m por $2n$ na equação $m + n = 12$, obtemos:

$$2n + n = 12$$
$$n = 4$$

Como $m = 2n$ e $n = 4$, então: $m = 8$.

Mas $k = m \cdot n$, então: $k = 8 \cdot 4 = 32$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

56 Considere x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$. Sem resolver a equação, determine no caderno o que se pede em cada item.

a) $x_1 + x_2$ **56. a)** 6

b) $x_1 \cdot x_2$ **56. b)** 5

57 Em cada caso, determine no caderno a soma S e o produto P das raízes das equações e calcule as raízes.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $5x^2 + 21x + 4 = 0$

d) $x^2 + 7x + 12 = 0$

e) $3x^2 - 6x = 0$

f) $x^2 - 144 = 0$

57. **a)** $S = 8$; $P = 15$; $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.
b) $S = -2$; $P = -3$; $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$.
c) $S = -\frac{21}{5}$; $P = \frac{4}{5}$; $x_1 = -4$ e $x_2 = -\frac{1}{5}$.
d) $S = -7$; $P = 12$; $x_1 = -3$ e $x_2 = -4$.
e) $S = 2$; $P = 0$; $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
f) $S = 0$; $P = -144$; $x_1 = -12$ e $x_2 = 12$.

58 Se m e n são raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$, determine no caderno o valor da expressão $mn(m + n)$. **58.** 180

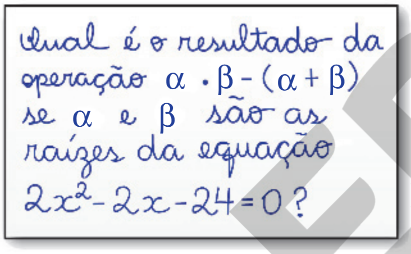
59 Determine no caderno o valor de m na equação $4x^2 - (m - 2) \cdot x + 3 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{3}{4}$. **59.** $m = 5$

60 Calcule no caderno o valor de m na equação $(m + 10) \cdot x^2 + 21x + 5 = 0$ para que a soma das raízes seja $-\frac{7}{6}$. **60.** $m = 8$

61 Determine no caderno o valor de p na equação $6x^2 - 11x + (p - 1) = 0$ para que o produto das raízes seja $\frac{2}{3}$. **61.** $p = 5$

62 Calcule no caderno o valor de p na equação $x^2 - 8x + 2p = 0$ para que uma das raízes seja o triplo da outra. **62.** $p = 6$

63 A professora Neusa fez vários cartões com exercícios para sortear na aula de Matemática. Felipe pegou este cartão:



Qual é o resultado da operação $\alpha \cdot \beta - (\alpha + \beta)$ se α e β são as raízes da equação $2x^2 - 2x - 24 = 0$?

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Felipe acertou a questão. Que resposta ele deu? **63.** –13

Composição de uma equação do 2º grau

Conhecidas as relações de Girard, é possível determinar uma equação do 2º grau quando são dadas suas raízes. É o que vamos estudar a seguir.

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Dividindo todos os termos por a, sendo $a \neq 0$, obtemos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

De acordo com as relações de Girard, obtemos:

$$\frac{-b}{a} = S \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} = -S \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = P$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por $-S$ e $\frac{c}{a}$ por P, em $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, obtemos:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 56** a **62** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Após a resolução do **exercício 63**, sugira aos estudantes um levantamento das estratégias utilizadas para chegarem à resposta. Verifique quantos utilizaram as relações de Girard e quantos não as utilizaram.

A seguir, apresentamos a resolução desse exercício utilizando as relações de Girard.

Como α e β são raízes da equação $2x^2 - 2x - 24 = 0$, temos que $\alpha \cdot \beta$ indica o produto das raízes e $\alpha + \beta$, a soma das raízes. Então, das relações de Girard, temos:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-24}{2} = -12$$
$$\alpha + \beta = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

Assim:

$$\alpha \cdot \beta - (\alpha + \beta) =$$
$$= -12 - 1 = -13$$

Composição de uma equação do 2º grau

Proponha aos estudantes a leitura deste tópico e, depois, que elaborem algumas equações do 2º grau para trocar com os colegas a fim de que cada estudante determine as raízes das equações elaboradas por outro estudante.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 64** a **66** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Após a resolução e a correção dos exercícios, proponha aos estudantes outras questões que ampliem a reflexão deles, como no exemplo a seguir.

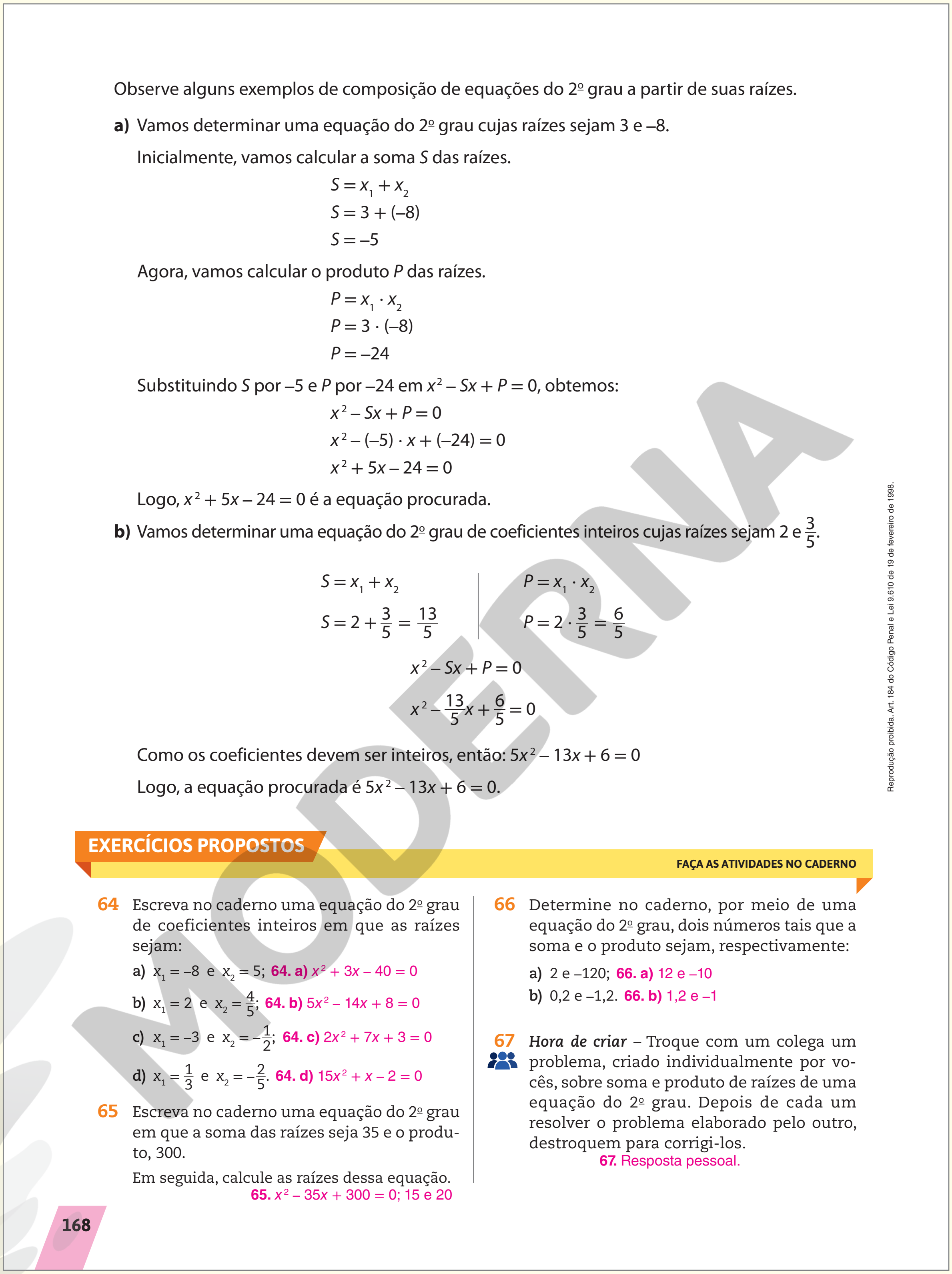
- Determine, sem usar a fórmula resolutiva, as raízes reais das equações:
  a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
  b) $x^2 - 2x - 120 = 0$

Oriente os estudantes a usar as relações entre os coeficientes e as raízes para realizar essa atividade.

No **item a**, por exemplo, identificando com a equação $x^2 - Sx + P = 0$, obtemos soma das raízes 5 e produto 6. Assim, eles devem testar alguns valores e obter os números (raízes) que satisfaçam essas condições. Ao fazer isso, espera-se que concluam que as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3.

É importante também que verifiquem se os valores encontrados estão corretos, substituindo cada raiz no lugar de x na equação.

No **item b**, devem identificar $S = 2$ e $P = -120$ e, assim, encontrar as raízes 12 e –10.



Observe alguns exemplos de composição de equações do 2º grau a partir de suas raízes.

a) Vamos determinar uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 3 e –8.

Inicialmente, vamos calcular a soma S das raízes.

$$S = x_1 + x_2$$
$$S = 3 + (-8)$$
$$S = -5$$

Agora, vamos calcular o produto P das raízes.

$$P = x_1 \cdot x_2$$
$$P = 3 \cdot (-8)$$
$$P = -24$$

Substituindo S por –5 e P por –24 em $x^2 - Sx + P = 0$, obtemos:

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - (-5) \cdot x + (-24) = 0$$
$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

Logo, $x^2 + 5x - 24 = 0$ é a equação procurada.

b) Vamos determinar uma equação do 2º grau de coeficientes inteiros cujas raízes sejam 2 e $\frac{3}{5}$.

$$S = x_1 + x_2 \qquad P = x_1 \cdot x_2$$
$$S = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} \qquad P = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

Como os coeficientes devem ser inteiros, então: $5x^2 - 13x + 6 = 0$

Logo, a equação procurada é $5x^2 - 13x + 6 = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

64 Escreva no caderno uma equação do 2º grau de coeficientes inteiros em que as raízes sejam:

a) $x_1 = -8$ e $x_2 = 5$; **64. a)** $x^2 + 3x - 40 = 0$

b) $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{4}{5}$; **64. b)** $5x^2 - 14x + 8 = 0$

c) $x_1 = -3$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$; **64. c)** $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = -\frac{2}{5}$. **64. d)** $15x^2 + x - 2 = 0$

65 Escreva no caderno uma equação do 2º grau em que a soma das raízes seja 35 e o produto, 300.

Em seguida, calcule as raízes dessa equação.
65. $x^2 - 35x + 300 = 0$; 15 e 20

66 Determine no caderno, por meio de uma equação do 2º grau, dois números tais que a soma e o produto sejam, respectivamente:

a) 2 e –120; **66. a)** 12 e –10

b) 0,2 e –1,2. **66. b)** 1,2 e –1

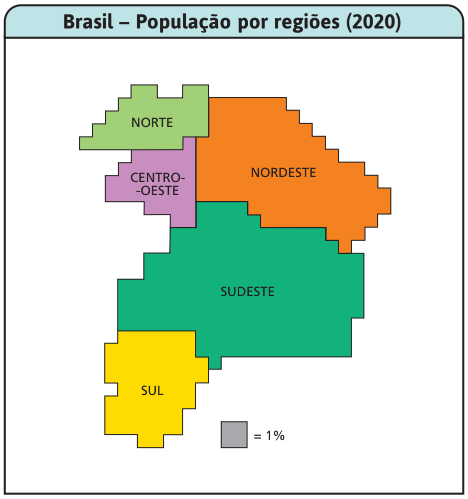
67 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado individualmente por vocês, sobre soma e produto de raízes de uma equação do 2º grau. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.
67. Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

A leitura de um mapa, anamorfose geográfica

Quando representamos as superfícies de um país em áreas proporcionais a determinada quantidade, dizemos que construímos uma anamorfose geográfica.

Brasil – População por regiões (2020)



Elaborado a partir de: FERREIRA, G. M. L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

Note, no mapa, uma anamorfose geográfica da população do Brasil, por regiões, que é um tipo de cartograma. Observe que o quadradinho cinza indicado na legenda equivale a 1% da população brasileira. A superfície referente ao total da população vale 100%, mas não há preocupação com a precisão, pois o objetivo é comunicar visualmente informações gerais sobre a proporção entre as partes entre si e em relação ao todo.

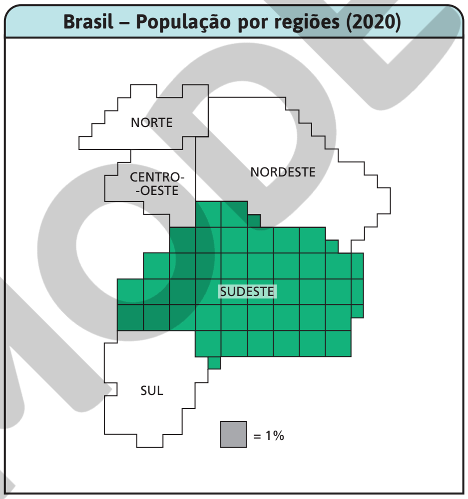
Podemos quadricular essa representação e estimar quantos quadradinhos de 1% tem cada região.

Sabendo que, em 2020, o Brasil tinha aproximadamente 212 000 000 de habitantes, aplicamos a porcentagem de cada região e calculamos a respectiva população. Nesse mapa, a região Sudeste tem aproximadamente 42 quadradinhos, ou seja, sua população em 2020 correspondia a, aproximadamente, 42% de 212 000 000 de habitantes.

População $\simeq$ 0,42 · 212 000 000

População $\simeq$ 89 040 000

Brasil – População por regiões (2020)



Elaborado a partir de: FERREIRA, G. M. L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC: **EF09MA08** e **EF09MA22**.

Ao propor o cálculo da população de cada região considerando os dados da população total do Brasil e as porcentagens relativas a cada região, esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades (EF09MA08) e (EF09MA22).

Atividades como a desta seção estimulam nos estudantes um olhar e uma ação que transcendem o campo da Matemática. Sua execução possibilita aos estudantes desenvolver a capacidade leitora em Geografia, por exemplo, e habilidades em outras linguagens, além da linguagem matemática. Sugerimos, assim, um trabalho interdisciplinar com esse componente curricular. Podem-se explorar atividades com o objetivo de proporcionar aos estudantes relacionar o processo de urbanização às transformações da produção agropecuária, à expansão do desemprego estrutural e ao papel crescente do capital financeiro no Brasil.

Exercícios complementares

Este bloco traz exercícios que retomam os principais conceitos tratados no capítulo, propiciando aos estudantes mobilizar os conhecimentos construídos e identificar possíveis dúvidas que ainda tenham.

As resoluções dos **exercícios 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

O **exercício 5** pode ser ampliado pedindo aos estudantes que representem em papel quadriculado, proporcionalmente, os terrenos e o campo de futebol a fim de comparar visualmente as áreas das figuras.

Trabalhando a informação:
1. Sul: 14%, aproximadamente 29 680 000 hab.; Nordeste: 27%, aproximadamente 57 240 000 hab.; Norte: 9%, aproximadamente 19 080 000 hab.; Centro-Oeste: 8%, aproximadamente 16 960 000 hab.

Agora quem trabalha é você!

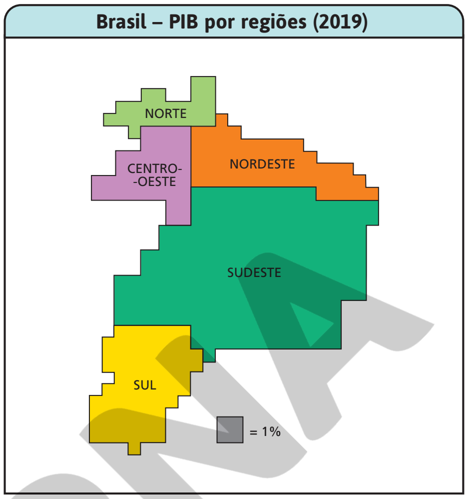
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sabemos qual era a população aproximada do Sudeste. Agora, copie o mapa da população e termine de quadriculá-lo. Em seguida, estime quantos quadradinhos de 1% tem cada região e calcule a população aproximada de cada uma delas nessa data.

2 Copie no caderno o mapa do PIB por regiões do Brasil, de 2019, e quadricule-o. Em seguida, estime quantos quadradinhos de 1% tem cada região e calcule quanto falta para a soma das porcentagens das regiões atingir 100%.

2. Sudeste: 53% do PIB; Sul: 17% do PIB; Nordeste: 14% do PIB; Norte: 6% do PIB; Centro-Oeste: 10% do PIB. A soma das porcentagens é igual a 100%.

Brasil – PIB por regiões (2019)



Elaborado a partir de: FERREIRA, G. M. L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2013. p. 14.

SONIA VAZ/ARQUIVO DA EDITORA

2. a) $2x^2 + 3x = 0$; $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{3}{2}$ **2. b)** $4y^2 - 20y + 25 = 0$; $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$ **2. c)** $7x^2 - 2 = 0$; $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{2}{7}}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

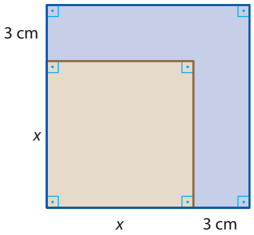
Exercícios complementares:

1 Determine no caderno o valor de k na equação $(k + 5)x^2 + (k - 1)x + k = 0$ de modo que ela seja do 2º grau. **1.** $k \neq -5$

2 Escreva no caderno as equações a seguir na forma reduzida e encontre as respectivas raízes.

a) $(1 - x) \cdot (5 + 2x) = 5$
b) $(3y - 5) \cdot (y - 5) + y^2 = 0$
c) $(-2x - 1) \cdot (x - 2) = 3x + 5x^2$
d) $5x^2 + 7 = 2x^2 - 5$ **2. d)** $3x^2 + 12 = 0$; não há raiz real.

3 Na figura, qual deve ser o valor de x para que a área pintada de azul meça 57 cm²?
3. 8 cm

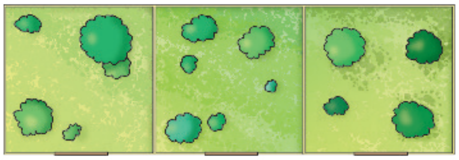


NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

4 Dada a equação $x^2 - (m - 5) \cdot x + (1 - m) = 0$, determine m no caderno, de modo que:

a) uma das raízes seja nula; **4. a)** $m = 1$
b) as raízes sejam opostas. **4. b)** $m = 5$

5 A soma das medidas das áreas de três terrenos quadrados de mesmo tamanho é igual à medida da área de um campo de futebol que mede 80 m por 60 m.



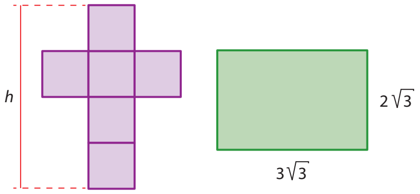
JOSÉ LUÍS JUHAS/ ARQUIVO DA EDITORA

5. a) $3x^2 = 4\,800$

a) Escreva no caderno a equação que corresponde a essa situação.
b) Quais são as raízes dessa equação? **5. b)** –40 e 40
c) Qual dessas raízes representa a medida do lado de cada terreno quadrado? **5. c)** 40

6 Determine no caderno os números reais que são soluções da equação $x^2 + 10x = 11x$. **6.** $x = 1$ ou $x = 0$.

7 Observe as figuras.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área da figura lilás, composta de retângulos, é igual à medida da área do retângulo verde. Qual é a medida da altura da figura lilás? **7.** $4\sqrt{3}$

8 Determine no caderno o valor de k na equação $kx^2 - 16x + 5 = 0$ para que:

a) uma das raízes seja 3; **8. a)** $k = \frac{43}{9}$

b) uma das raízes seja $\frac{1}{2}$; **8. b)** $k = 12$

c) as raízes sejam reais e distintas; **8. c)** $k < \frac{64}{5}$

d) a soma das raízes seja $\frac{4}{3}$. **8. d)** $k = 12$

9 (UCS-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de p é:

a) 5.
b) $\frac{13}{3}$.
c) 7.
d) –5.
e) –7.

9. Alternativa **c**.

10 (Unifor-CE) Uma das soluções da equação $\frac{2x^2 + x}{11} = 2x + 1$ é um número inteiro múltiplo de: **10.** Alternativa **e**.

a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.
e) 11.

11 (Fuvest-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 9 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot (x_1 + x_2)$ é:

a) –33.
b) –10.
c) –7.
d) 10.
e) 33.

11. Alternativa **b**.

12 (Ulbra-RS) O(s) valor(es) de B na equação $x^2 - Bx + 4 = 0$ para que o discriminante seja igual a 65 é (são): **12.** Alternativa **d**.

a) 0.
b) 9.
c) –9.
d) –9 ou 9.
e) 16.

13 (Ufes) O valor de k para que a soma das raízes da equação $(k - 3)x^2 - 4kx + 1 = 0$ seja igual ao seu produto é: **13.** Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{4}$.
d) $\frac{2}{3}$.
e) $\frac{3}{4}$.

14 (PUC-MG) O quociente da divisão de 72 por um número negativo é o dobro desse número. A metade desse número é: **14.** Alternativa **a**.

a) –3.
b) –4.
c) –5.
d) –6.
e) –7.

15 (Vunesp) Se aumentarmos em 3 cm o lado de um quadrado, sua área aumentará 27 cm². A partir desses dados, podemos dizer que o lado do quadrado mede, em cm:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

15. Alternativa **a**.

16 Ao compor uma equação do 2º grau, Fernanda, por engano, escreveu:

$$x^2 - Px + S = 0$$

Resolveu a equação corretamente e encontrou as raízes 1 e 5. Se Fernanda tivesse usado corretamente as relações de Girard para compor sua equação, quais seriam as raízes? **16.** 2 e 3

17 (FGV-SP) Se a soma das raízes da equação $kx^2 + 3x - 4 = 0$ é 10, podemos afirmar que o produto das raízes é: **17.** Alternativa **a**.

a) $\frac{40}{3}$.
b) $-\frac{40}{3}$.
c) $\frac{80}{3}$.
d) $-\frac{80}{3}$.
e) $-\frac{3}{10}$.

18 (Unifor-CE) Um estudante resolve uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ e, enganando-se no valor de c, obtém as raízes 8 e 2. Um colega seu, resolvendo a mesma equação, engana-se no valor de b e obtém as raízes –9 e –1. Resolvendo-se a equação correta, quanto se obtém somando o triplo da menor raiz com a outra? **18.** 12

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 6** a **10**, dos **exercícios 12** a **14** e dos **exercícios 16** a **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

No **exercício 11**, uma possível resolução é apresentada a seguir.

Para $10x^2 + 33x - 9 = 0$, temos:

$a = 10$, $b = 33$ e $c = -9$

Assim:

$$5 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot (x_1 + x_2) =$$
$$= 5 \cdot \frac{c}{a} + 2 \cdot \left(\frac{-b}{a}\right) =$$
$$= 5 \cdot \left(\frac{-9}{10}\right) + 2 \cdot \left(\frac{-33}{10}\right) =$$
$$= -\frac{45}{10} - \frac{66}{10} =$$
$$= -\frac{111}{10} = -11{,}1$$

Como –11,1 está entre os números inteiros –12 e –10, concluímos que dentre as alternativas apresentadas o número inteiro mais próximo é –10 (embora –12 esteja mais próximo, mas não conste nas alternativas).

No **exercício 15**, indicando por x a medida do lado do quadrado e por A a medida da área antes do aumento, temos $A = x^2$. Quando a medida do lado do quadrado aumenta em 3 cm, a medida da área aumenta em 27 cm².

Assim, temos:

$(x + 3)^2 = A + 27$

$x^2 + 6x + 9 = A + 27$

Como $A = x^2$:

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 27$

$6x = 27 - 9$

$6x = 18$

$x = 3$

Verificando

Nesta seção são propostos testes que abordam os conteúdos apresentados ao longo deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos testes propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

Sugerimos, ainda, que os estudantes se organizem em duplas para resolver os testes e, depois de corrigidos, cada estudante resolve novamente aqueles que estiverem incorretos.

As resoluções e comentários dos **testes 1** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Organizando

As questões apresentadas nesta seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação dos estudantes.

É interessante que cada estudante responda individualmente e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou complementando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Qual das equações a seguir não é de 2º grau? **1.** Alternativa **c.**

- **a)** $(x - 2)(x -3) = 0$
- **b)** $x^2 - 2x + 4 = 0$
- **c)** $x + 2x - 3 = 0$
- **d)** $(x + 2)^2 = 0$

2 Quais são os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* na equação $2x^2 + 3 = 0$, respectivamente? **2.** Alternativa **b.**

- **a)** 2, 1 e 3.
- **b)** 2, 0 e 3.
- **c)** 2, 2 e 2.
- **d)** 1, 2 e 3.

3. Alternativa **d.**

3 Complete a frase: “Uma equação de 2º grau é ▬ quando ▬ coeficientes ▬ de zero”.

- **a)** incompleta; todos os; são diferentes.
- **b)** completa; um dos; é diferente.
- **c)** completa; dois dos; são diferentes.
- **d)** completa; todos os; são diferentes.

4 Um retângulo tem lados medindo *x* e 3x. Qual é a forma reduzida da equação de segundo grau da medida da área (A) do retângulo? **4.** Alternativa **a.**

- **a)** $3x^2 - A = 0$
- **b)** $3x + x = A$
- **c)** $3x^2 = A$
- **d)** $3x + x - A = 0$

5 Quais são as raízes da equação de 2º grau $x^2 - 2x = 0$? **5.** Alternativa **b.**

- **a)** 2 e –2.
- **b)** 2 e 0.
- **c)** 2 e 4.
- **d)** 4 e –4.

6 Qual dessas equações tem como raiz o número 7? **6.** Alternativa **d.**

- **a)** $x^2 + 4x - 2 = 0$
- **b)** $4x^2 - 2 = 0$
- **c)** $-2x^2 + 4x = 0$
- **d)** $x^2 -3x - 28 = 0$

7 Quais são as raízes reais da equação de 2º grau $x^2 + 4 = 0$? **7.** Alternativa **a.**

- **a)** A equação não possui raízes reais.
- **b)** 2 e –2.
- **c)** 2 e 0.
- **d)** 1 e –2.

8 Qual é o valor de Δ para a equação de 2º grau $2x^2 - 4x + 2 = 0$? **8.** Alternativa **c.**

- **a)** 8
- **b)** 2
- **c)** 0
- **d)** 4

9 Um quadrado de área medindo 49 cm^2 tem lado que mede x. Qual é o valor de x? **9.** Alternativa **b.**

- **a)** 6 cm.
- **b)** 7 cm.
- **c)** 8 cm.
- **d)** 9 cm.

10 Um retângulo de área medindo 200 m^2 tem seus lados de modo que a medida do comprimento do maior é duas vezes a do comprimento do menor. Quanto mede o comprimento do maior lado do retângulo? **10.** Alternativa **d.**

- **a)** 25 m.
- **b)** 15 m.
- **c)** 10 m.
- **d)** 20 m.

Organizando

Organizando:

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

- **a)** Qual é a forma geral de uma equação de 2º grau? **a)** $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$).
- **b)** Qual é a fórmula resolutiva da equação do 2º grau dada por seus coeficientes da forma reduzida? **b)** $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- **c)** O que se pode dizer dos coeficientes de uma equação de 2º grau que apresenta somente uma raiz diferente de zero? **c)** A equação tem o coeficiente *c* igual a zero.
- **d)** Em que caso as raízes de uma equação de 2º grau são números reais opostos? **d)** As raízes de uma equação de segundo grau são sempre opostas quando o coeficiente *b* é igual a zero e o produto $a \cdot c < 0$.
- **e)** Quais são as razões entre os coeficientes *a*, *b* e *c* da equação reduzida do 2º grau que fornecem, respectivamente, a soma e o produto das raízes dessa equação? **e)** $S = \frac{-b}{a}$; $P = \frac{c}{a}$
- **f)** É possível determinar a expressão de uma equação do 2º grau conhecidas suas raízes? Explique. **f)** Sim. Espera-se que os estudantes relatem que, por meio das relações de Girard, conhecidas as raízes, é possível obter a equação do 2º grau.

Capítulo

8

Triângulo retângulo


ERDAL AKAN/SHUTTERSTOCK

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) O monumento lembra que tipo de triângulo?

b) A parte sobre a qual a escultura de Pitágoras está apoiada lembra um cateto ou uma hipotenusa de um triângulo retângulo?

c) Pesquise outros monumentos e edificações com formatos que lembrem triângulos. Depois, compartilhe os resultados obtidos com os colegas da turma.

Monumento a Pitágoras, ilha de Samos, Grécia. (Fotografia de 2019.)

a) Resposta esperada: triângulo retângulo.
b) Resposta esperada: um cateto.
c) Resposta pessoal.

Na ilha de Samos, na Grécia, há um monumento de bronze construído em homenagem a Pitágoras, filósofo a quem se atribuem inúmeras contribuições à Matemática. No monumento edificado de modo a lembrar um triângulo retângulo, a escultura de Pitágoras compõe um dos catetos.

Capítulo 8 – Triângulo retângulo

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, retomamos e ampliamos o estudo dos triângulos retângulos, tratando das relações métricas em um triângulo retângulo, com destaque para o teorema de Pitágoras e suas aplicações. Além disso, exploramos a medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano e a representação gráfica de um relevo, que pode ser associada com as vistas ortogonais de um sólido geométrico.

Nesta abertura, apresentamos um monumento construído em homenagem a Pitágoras, que faz menção à figura de um triângulo retângulo. Explore um pouco mais essa fotografia pedindo que os estudantes identifiquem nela outras estruturas que lembram triângulos retângulos. Espera-se que eles reconheçam as formas triangulares formadas pelo mastro, pela retranca e pelo cabo da vela das embarcações.

Promova uma discussão e levante os conhecimentos prévios que os estudantes têm sobre esse matemático e sobre o triângulo retângulo. Espera-se que eles identifiquem o triângulo retângulo como aquele que tem um ângulo interno reto.

1. Um pouco de História

Neste texto, como introdução, apresentamos a escola pitagórica, seu lema e sua contribuição na construção da Matemática, palavra cuja origem é atribuída a Pitágoras. Sugerimos o trabalho de leitura e exploração do texto com os estudantes dispostos em duplas ou trios. Se possível, para que desenvolvam a **competência geral 1**, pode-se propor aos estudantes que façam uma pesquisa sobre Pitágoras e os pitagóricos, listando algumas de suas contribuições na história da Matemática. Desse modo, os estudantes podem perceber que o conhecimento científico se desenvolve com base na observação do mundo físico e para explicar a realidade.

2. Teorema de Pitágoras

Habilidades da BNCC:
EF09MA13 e **EF09MA14**.

Neste tópico, o estudante é levado a reconhecer as condições para dois triângulos serem semelhantes; a seguir os passos das demonstrações das relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras; a resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras. Assim, são desenvolvidas as habilidades (EF09MA13) e (EF09MA14).

Destaque os elementos de um triângulo retângulo, incluindo a determinação dos lados opostos a ângulos internos.

Se considerar necessário, recorde com os estudantes os casos de semelhança de triângulos: AA, LAL e LLL.

1 Um pouco de História

Pitágoras é um matemático cuja história está bastante envolvida de algum misticismo e, por isso, pouco se sabe com certeza sobre ele. Pitágoras teria nascido na ilha de Samos por volta do ano 570 a.C., cerca de cinquenta anos depois do nascimento de Tales de Mileto.

Filho de um rico comerciante, teria viajado pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha chegado até a Índia. Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, controlado pelo tirano Polícrates, mudou-se para a colônia grega Crotona, situada na Itália. Lá, fundou a escola pitagórica.

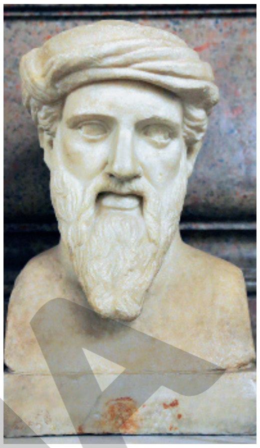
Nessa escola, havia aulas de Religião, Filosofia, Política, Música, Astronomia e Matemática. Os estudantes eram organizados em duas categorias: os dos três primeiros anos eram chamados de ouvintes, e os dos anos seguintes, de matemáticos, pois somente a estes eram revelados os segredos da Matemática.

O lema da escola era "Tudo é número". Nela, procuravam explicar com números tudo o que existe na natureza.

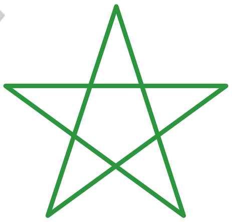
Os pitagóricos tinham o conhecimento como única aspiração e formaram uma sociedade secreta cujo emblema era um pentágono estrelado — ou pentagrama.

Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente para a Geometria. Entre essas contribuições, a de maior sucesso foi, sem dúvida, o conhecido teorema de Pitágoras.

Mesmo depois da morte de seu fundador, por volta de 490 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por pelo menos mais dois séculos.


LANMAS/ALAMY/FOTOARENA - MUSEUS CAPITOLINOS, ROMA

Busto de Pitágoras, nos Museus Capitolinos em Roma, Itália. Escultura em mármore. (Fotografia de 2015.)


Pentágono estrelado ou pentagrama.

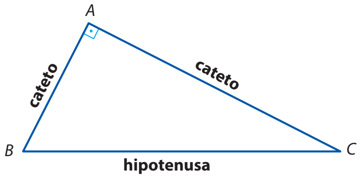
2 Teorema de Pitágoras

Neste capítulo, vamos estudar várias relações entre as medidas de comprimento dos elementos de um triângulo retângulo. Por isso, convém recordar a nomenclatura a ser usada.

Elementos de um triângulo retângulo

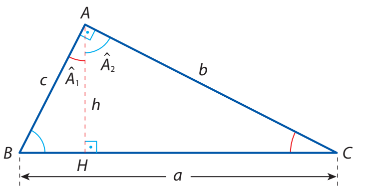
Já sabemos que um triângulo *ABC* é denominado triângulo retângulo em *A* quando o ângulo reto tem vértice *A*.

Chamamos **catetos** os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto em um triângulo retângulo. E o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Espera-se que os estudantes usem a semelhança de triângulos para obter triângulos retângulos com medidas de lados 3*x*, 4*x* e 5*x*, com *x* sendo um número real tal que $x > 0$. Por exemplo, para $x = 1{,}5$, obtém-se o triângulo cujos lados medem 4,5 cm, 6 cm e 7,5 cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse triângulo, destacamos as medidas:

- *a*, da hipotenusa $\overline{BC}$;
- *c*, do cateto $\overline{AB}$, oposto ao ângulo $\hat{C}$;
- *b*, do cateto $\overline{AC}$, oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- *h*, da altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa.

- Um triângulo cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm tem um ângulo interno reto. Com base nele, podemos obter que outros triângulos retângulos?

Em relação aos ângulos, sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma das medidas dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.

$$\left.\begin{aligned} m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}) &= 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) &= 90° \end{aligned}\right\} m(\hat{A}_1) + \cancel{m(\hat{B})} = \cancel{m(\hat{B})} + m(\hat{C}), \text{ então } m(\hat{A}_1) = m(\hat{C}) \text{ ou } \hat{A}_1 \cong \hat{C}$$

$$\left.\begin{aligned} m(\hat{A}_2) + m(\hat{C}) &= 90° \\ m(\hat{B}) + m(\hat{C}) &= 90° \end{aligned}\right\} m(\hat{A}_2) + \cancel{m(\hat{C})} = m(\hat{B}) + \cancel{m(\hat{C})}, \text{ então } m(\hat{A}_2) = m(\hat{B}) \text{ ou } \hat{A}_2 \cong \hat{B}$$

Observação

▶ Se dois triângulos têm dois pares de ângulos respectivamente congruentes, então eles são triângulos semelhantes. Chamamos esse fato de caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Construção de figura.

1 Desenhe no caderno um triângulo retângulo cujos catetos meçam 8,4 cm e 11,2 cm.

1. a) 14 cm

a) Obtenha, com o auxílio de uma régua, a medida aproximada da hipotenusa desse triângulo.

b) Verifique se o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. **1. b)** Sim.

2. Construção de figuras.

2 Usando régua e compasso, construa no caderno triângulos cujos lados meçam:

- 2 cm, 4 cm e 5 cm;
- 3 cm, 3,5 cm e 4 cm;
- 4,2 cm, 5,6 cm e 7 cm.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

2. a)
- obtusângulo
- acutângulo
- retângulo

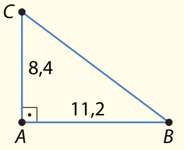
2. b)
- $25 > 20$
- $16 < 21{,}25$
- $49 = 49$

a) Classifique os triângulos construídos de acordo com as medidas dos ângulos internos.

b) Para cada triângulo, estabeleça uma relação entre o quadrado da medida do maior lado e a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, utilizando os símbolos >, < ou =.

Exercícios propostos

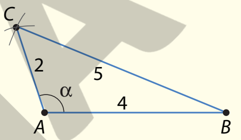
No **exercício 1**, os estudantes devem usar as medidas reais no desenho. Observe um desenho em escala menor, com medidas proporcionais.



Na escala real, os estudantes devem obter 14 cm.

No **exercício 2**, temos:

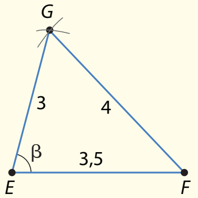
- 2 cm, 4 cm e 5 cm:



Verificamos que $\alpha > 90°$; assim, o triângulo *ABC* é obtusângulo.

Podemos também comparar o quadrado da medida do maior lado (25) com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados (4 e 16). Assim, $4 + 16 < 25$ indica que o ângulo oposto ao maior lado é obtuso.

- 3 cm, 3,5 cm e 4 cm:



Analogamente ao anterior, verificamos que $\beta < 90°$, assim como os demais ângulos internos. O triângulo *EFG* é acutângulo.

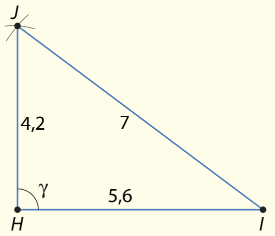
Também verificamos

$3^2 + (3{,}5)^2 > 4^2$

$9 + 12{,}25 > 16$

Isso ocorre sempre que o ângulo oposto ao maior lado é agudo.

- 4,2 cm, 5,6 cm e 7 cm:



Nesse caso, $\gamma = 90°$ e os demais ângulos internos são agudos, logo *HIJ* é um triângulo retângulo.

Aqui vale a relação de Pitágoras $(4{,}2)^2 + (5{,}6)^2 = 7^2$, ou seja, $17{,}64 + 31{,}36 = 49$. Isso indica que temos um triângulo retângulo.

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Demonstrando o teorema de Pitágoras

Neste tópico, e em outros deste capítulo, a manipulação das figuras apresentadas é uma abordagem que pode enriquecer o aprendizado; ela pode ser aplicada paralelamente à leitura do texto ou à aula expositiva. Para isso, se possível, confeccione previamente em cartolina peças para compor as figuras 1, 2 e 3, replicando-as de modo que, em grupos, os estudantes montem as figuras como um quebra-cabeça.

Outra possibilidade é pedir aos estudantes que construam figuras semelhantes (ampliadas ou não) e recortem as figuras construídas. Em seguida, proponha a eles que manipulem essas partes recortadas de modo a compô-las de acordo com as figuras 1, 2 e 3, além de investigarem livremente outras composições.

Enunciando o teorema de Pitágoras

Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho que compõe os quadrados da figura, notamos que a medida da área do quadrado maior é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados menores, ou seja:

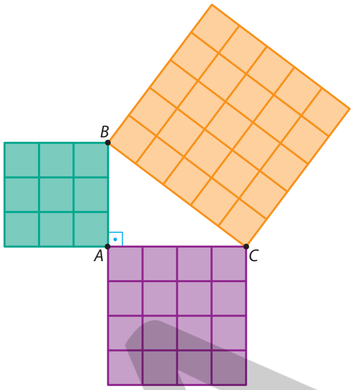
$$25 = 9 + 16$$

Como $25 = 5^2$, $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo *ABC*.

A relação entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

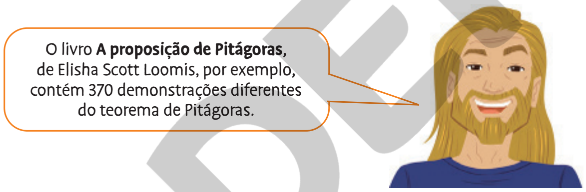


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstrando o teorema de Pitágoras

Existem mais de trezentas demonstrações do teorema de Pitágoras. Vamos apresentar uma que faz uso da equivalência de medidas de áreas.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando um triângulo retângulo, construímos quadrados sobre a hipotenusa de medida *a* e sobre os catetos de medidas *b* e *c*, como mostra a figura 1. Nas figuras 2 e 3, construímos quadrados de lados que medem $(b + c)$.

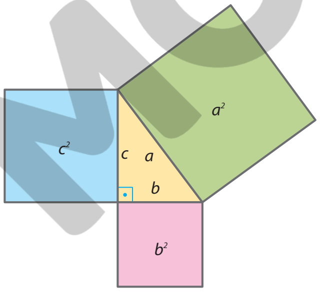


Figura 1

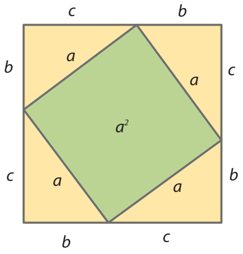


Figura 2

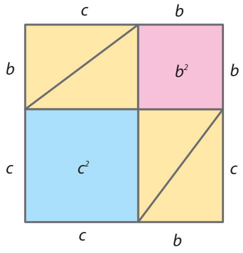


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

O quadrado da figura 2 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, e pelo quadrado verde. Assim, a medida da área do quadrado de lado medindo $(b + c)$ é a soma das medidas das áreas dos quatro triângulos com a da área do quadrado verde.

O quadrado da figura 3 é formado por quatro triângulos retângulos, congruentes ao triângulo da figura 1, pelo quadrado azul e pelo quadrado rosa. Então, a medida da área do quadrado de lado de medida $(b + c)$ é a soma das medidas das áreas dos quatro triângulos com as das áreas dos quadrados azul e rosa.

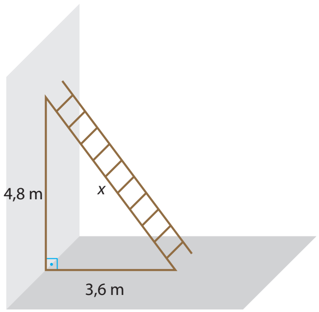
Logo, a medida da área do quadrado verde é a soma da medida da área do quadrado azul com a da área do quadrado rosa, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observe um exemplo de aplicação do teorema de Pitágoras.

Precisamos calcular a medida do comprimento x de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura a seguir. Para isso, vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



$$x^2 = (4{,}8)^2 + (3{,}6)^2$$
$$x^2 = 23{,}04 + 12{,}96$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

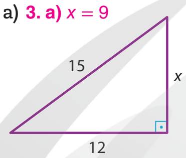
Como x é a medida do comprimento da escada, ele deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada mede 6 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

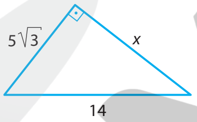
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

3 Calcule o valor de x aplicando o teorema de Pitágoras:

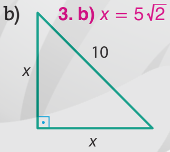
a) **3. a)** $x = 9$



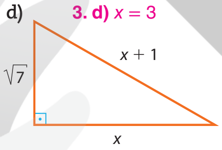
c) **3. c)** $x = 11$



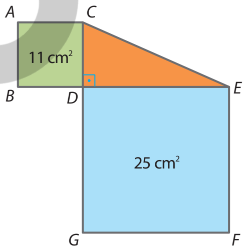
b) **3. b)** $x = 5\sqrt{2}$



d) **3. d)** $x = 3$



4 Considere os quadrados *ABDC* e *DEFG* representados na figura e, em seguida, faça o que se pede.



4. a) $2{,}5\sqrt{11}$ cm²

a) Determine a medida da área do triângulo *CDE*.
b) Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo. **4. b)** 6 cm

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

No **exercício 3**, devemos aplicar o teorema de Pitágoras para determinar x. Assim:

a) $15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \sqrt{81} = 9$

b) $10^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

c) $14^2 = x^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 14^2 - (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 196 - 75 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \sqrt{121} = 11$

d) $(x + 1)^2 = x^2 + (\sqrt{7})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 7 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

A seguir, uma possível resolução do **exercício 4**.

a) O lado do quadrado azul mede $\sqrt{11}$ cm e o lado do quadrado verde mede $\sqrt{25}$ cm, ou seja, 5 cm.

A medida A da área do triângulo laranja é dada por:

$$A = \frac{5 \cdot \sqrt{11}}{2} = 2{,}5\sqrt{11}$$

A área mede $2{,}5\sqrt{11}$ cm².

b) Seja x a medida da hipotenusa.
$x^2 = 11 + 25 = 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$
A hipotenusa mede 6 cm.

Exercícios propostos

A seguir, a resolução do **exercício 5**. O contorno de um esquadro tem o formato de um triângulo retângulo.

É pedida a medida da hipotenusa, que representamos por x.

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$x^2 = 12^2 + (12\sqrt{3})^2$

$x^2 = 12^2 + 3 \cdot 12^2$

$x^2 = 4 \cdot 12^2$

$x^2 = 576$

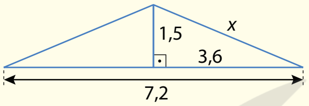
$x = 24$

O lado oposto ao ângulo reto mede 24 cm.

As resoluções dos **exercícios 6** a **12** e do **exercício 14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

No **exercício 6**, se julgar conveniente, comente com os estudantes que no **item a** o valor de x pode ser obtido por meio da análise das medidas dos dois triângulos apresentados na figura. No **item d**, note que faltam dados para calcular o valor de x. Já no **exercício 7**, há dado a mais.

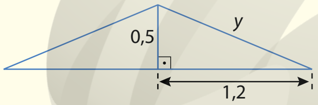
No **exercício 13**, observe uma representação sem escala da estrutura maior, cuja medidas são dadas em metro.



Observando essa figura:

$x^2 = 1{,}5^2 + 3{,}6^2 \Rightarrow x = 3{,}9$

Observe uma representação sem escala da estrutura menor, com medidas em metro.



ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

$y^2 = 0{,}5^2 + 1{,}2^2 \Rightarrow y = 1{,}3$

Assim, com a base dela e a haste vertical já consideradas, ainda faltam 10,4 m de madeira, pois:

$2 \cdot 3{,}9 + 2 \cdot 1{,}3 = 7{,}8 + 2{,}6 = 10{,4}$

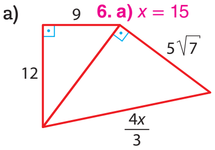
Portanto, são necessários 10,4 m de madeira.

A resposta ao **exercício 15** é pessoal, mas sugerimos incentivar os estudantes a elaborar problemas com base em situações contextualizadas.

5 Em um esquadro, os lados perpendiculares medem 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm. Quanto mede o lado oposto ao ângulo reto desse esquadro?
5. 24 cm

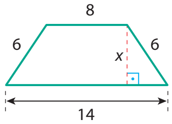
6 Aplicando o teorema de Pitágoras, determine, se possível, a medida x de cada uma das figuras.

a)



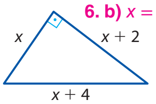
6. a) $x = 15$

c)



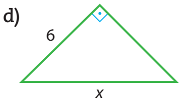
6. c) $x = 3\sqrt{3}$

b)



6. b) $x = 6$

d)



6. d) Faltam dados para calcular o valor de x.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

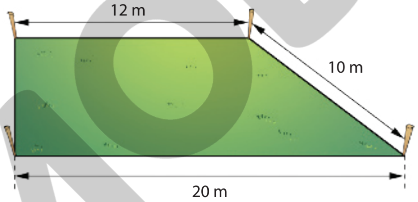
7 As diagonais de um losango medem 12 cm e 16 cm. O ângulo menor desse losango mede aproximadamente 74°.
7. a) 10 cm
7. b) 96 cm²

a) Determine a medida do lado desse losango.
b) Calcule a medida da área desse losango.
c) Para responder aos itens anteriores foi necessário usar todas as informações do enunciado? Justifique sua resposta.

7. c) Não, pois não foi necessário usar a medida do ângulo.

8 Em um triângulo isósceles, um lado mede 12 cm e cada um dos lados congruentes mede 9 cm. Faça um esboço desse triângulo em seu caderno e calcule a medida da altura relativa ao lado de 12 cm dele. **8.** $3\sqrt{5}$ cm

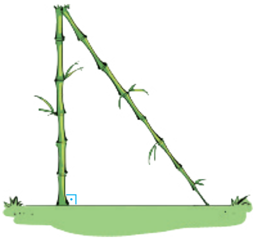
9 Quantos metros de arame são necessários para cercar, com 6 voltas, um terreno em formato de trapézio retângulo cujas bases medem 12 m e 20 m e cujo lado oblíquo mede 10 m? **9.** 288 m



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

10 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $3\sqrt{5}$ m e as medidas dos catetos são expressas por x e $x + 3$. Calcule a medida dos catetos. **10.** 3 m e 6 m.

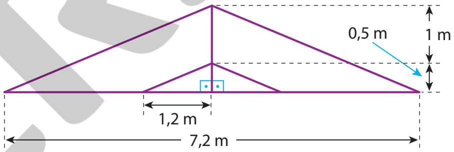
11 Um bambu foi quebrado pelo vento a uma altura de medida igual a 4,8 m. Ele tombou de modo que sua ponta tocou o chão a 3,6 m de sua base. Considerando que o bambu formou um ângulo reto com o solo, determine a medida da altura desse bambu. **11.** 10,8 m



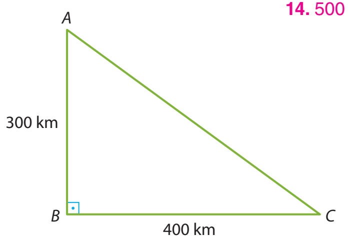
CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

12 Para reforçar a sustentação de uma placa de propaganda com formato retangular, que mede 2 m de comprimento por 5 m de largura, foram colocadas duas ripas de madeira no sentido das diagonais da placa. Qual é a medida aproximada do comprimento de cada ripa?
12. 5,38 m

13 A figura a seguir representa parte da estrutura de madeira do telhado de uma residência. A base mede 7,2 m e na metade dela é fixada, perpendicularmente, uma haste que mede 1,5 m. Quantos metros de madeira são necessários para construir as outras partes dessa estrutura? **13.** 10,4 m



14 Um avião sai da cidade A e vai até a cidade B, que está à medida de distância de 300 km. Depois, decola em direção à cidade C, a 400 km. Se o avião fosse em linha reta da cidade A para a C, que distância percorreria?
14. 500 km



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

15 ***Hora de criar*** – Em dupla com um colega, elaborem um problema cada um sobre medida de comprimento de lados de um triângulo retângulo. Troquem os problemas elaborados por vocês e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.
15. Resposta pessoal.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com o teorema de Pitágoras, sugerimos:

SANTOS, M. C. **Teorema de Pitágoras:** suas diversas demonstrações, 2011. Monografia (Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/678/1/PDF%20-%20Marconi%20Coelho%20dos%20Santos.pdf. Acesso em: 17 ago. 2022.

O autor apresenta diferentes demonstrações, geométricas e algébricas, do teorema.

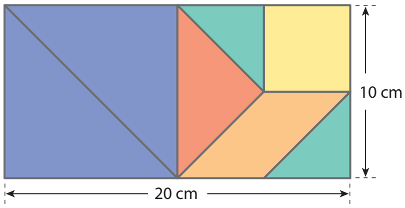
Para saber mais: A medida do perímetro de cada triângulo maior é 34,1 cm; de cada triângulo menor é 17,05 cm; do triângulo médio é 24,1 cm; do quadrado é 20 cm; do outro paralelogramo é 24,1 cm.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

O tangram é formado por sete peças: cinco triângulos retângulos isósceles (sendo dois grandes e congruentes, dois pequenos e congruentes e um médio) e dois paralelogramos (sendo um deles um quadrado).

Com essas sete peças, é possível compor muitas figuras. Observe, por exemplo, este retângulo, feito com as peças do tangram.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

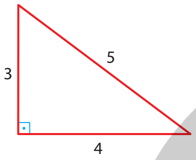
Sabendo que a área do quadrado formado pelos dois triângulos maiores equivale à metade da área de todas as peças do tangram, determine a medida do perímetro aproximada de cada peça desse tangram. Use para $\sqrt{2}$ o valor aproximado 1,41.

PARA SABER MAIS

Triângulos pitagóricos

Triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros são chamados **triângulos pitagóricos**.

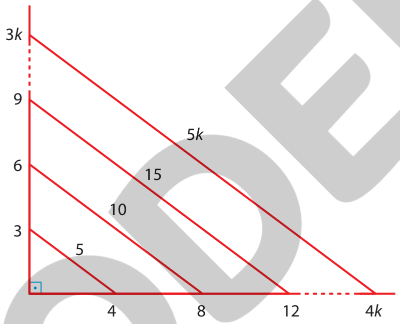
Entre eles, o mais conhecido é o triângulo cujas medidas dos lados são números inteiros e consecutivos: 3, 4 e 5.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo caso LLL de semelhança, qualquer triângulo retângulo cujos lados sejam proporcionais aos números 3, 4 e 5 é um triângulo pitagórico.

Em outras palavras, os triângulos cujas medidas dos lados são dadas pelos ternos pitagóricos (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), ..., ($3k$, $4k$, $5k$), sendo k um número inteiro positivo, são triângulos pitagóricos.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Esse assunto inspirou diversos estudos que chegaram a resultados bastante curiosos.

Um desses estudos mostra como podemos obter determinado tipo de **terno** pitagórico e, por consequência, um triângulo pitagórico. Observe a figura.

Consideremos dois números ímpares consecutivos (ou dois números pares consecutivos) x e $(x + 2)$.

- A medida de um cateto é a soma dos números: $x + (x + 2)$.
- A medida do outro cateto é o produto dos números: $x \cdot (x + 2)$.
- A medida da hipotenusa é o produto dos números, mais 2.

Terno: conjunto de três elementos; trio.

Por exemplo, se $x = 1$, temos $x + 2 = 3$; então:

- um cateto mede $1 + 3 = 4$;
- o outro cateto mede $1 \cdot 3 = 3$;
- a hipotenusa mede $1 \cdot 3 + 2 = 5$.

Então, esse triângulo é pitagórico, e tem lados de medidas 3, 4 e 5.

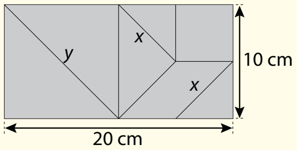
Observe outro exemplo, em que $x = 8$ e $x + 2 = 10$.

Os catetos medem 18 $(8 + 10)$ e 80 $(8 \cdot 10)$, e a hipotenusa mede 82 $(8 \cdot 10 + 2)$, ou seja, respectivamente 18^2, 80^2 e 82^2.

Note que $82^2 = 18^2 + 80^2$.

Pense mais um pouco...

Peça aos estudantes que construam o tangram.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

- Do triângulo maior, obtemos:

$y^2 = 10^2 + 10^2$

$y = \sqrt{2 \cdot 10^2}$

$y = 10\sqrt{2} = 14{,}1$

- Do triângulo menor, obtemos:

$x^2 = 5^2 + 5^2$

$x = \sqrt{2 \cdot 5^2}$

$x = 5\sqrt{2} = 7{,}05$

A medida do perímetro de cada triângulo maior é 34,1 cm $(10 + 10 + 14{,}1)$, e a de cada triângulo menor é 17,05 cm $(5 + 5 + 7{,}05)$.

No triângulo médio, os catetos medem 7,05 cm, e a hipotenusa, 10 cm. Assim, a medida do perímetro do triângulo médio é 24,1 cm $(7{,}05 + 7{,}05 + 10)$.

Os lados do quadrado menor medem 5 cm. Assim, o perímetro desse quadrado mede 20 cm $(5 + 5 + 5 + 5)$.

No paralelogramo, dois dos lados medem 5 cm, e cada um dos outros dois lados mede 7,05 cm. O perímetro desse paralelogramo mede 24,1 cm $(5 + 5 + 7{,}05 + 7{,}05)$.

Para saber mais

Esta seção oferece uma boa oportunidade de aplicar alguns conceitos, como semelhança de triângulos e proporcionalidade. Explore com os estudantes as diferentes estratégias de resolução dos exercícios propostos.

As resoluções das **atividades 1** a **4** do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Para ampliar a **atividade 4**, proponha aos estudantes que construam os triângulos cujas medidas obtiveram no quadro elaborado. Em seguida, peça a eles que verifiquem com um transferidor se esses triângulos construídos são triângulos retângulos.

3. Aplicações do teorema de Pitágoras

Habilidades da BNCC:
EF09MA13 e **EF09MA14**.

Neste tópico, os estudantes poderão compreender e demonstrar relações entre as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero aplicando o teorema de Pitágoras. Eles também vão descrever os passos para a construção, com régua e compasso, de um quadrado dada a medida do seu lado. Com isso, os estudantes poderão desenvolver as habilidades (EF09MA13) e (EF09MA14).

Uma das aplicações do teorema de Pitágoras é mostrar outras relações importantes em figuras geométricas, como na relação da diagonal e do lado de um quadrado qualquer: a medida (d) da diagonal pode ser dada em função da medida (ℓ) do lado.

Aproveite o momento e retome a ideia de que a diagonal do quadrado e seu lado estabelecem uma razão irracional.

Proponha aos estudantes que acompanhem a construção do quadrado apresentado no **exemplo c**. Depois, solicite que reproduzam essa construção no caderno. Em seguida, peça a eles que justifiquem por que $AD = u\sqrt{2}$. Espera-se que os estudantes percebam que é porque AD é a medida da diagonal do quadrado de lado medindo u.

Após reproduzirem a construção do quadrado do **exemplo c**, peça aos estudantes que verifiquem com o compasso que $AG = 2u$.

Agora é com você!

1. Respostas possíveis: 20 cm e 25 cm; 8 cm e 17 cm; 36 cm e 39 cm; 112 cm e 113 cm.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. Medida do perímetro: 84 cm; medida da área: 294 cm².
3. 27 cm, 36 cm e 45 cm.

Reúna-se com um colega, usem uma calculadora e façam o que se pede.

1 Um dos catetos de um triângulo pitagórico mede 15 cm. Determinem dois possíveis pares de medidas do outro cateto e da hipotenusa desse triângulo.

2 A hipotenusa de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm mede 35 cm. Determinem as medidas do perímetro e da área desse triângulo.

3 O perímetro de um triângulo pitagórico semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm mede 108 cm. Determinem a medida dos catetos e da hipotenusa desse triângulo.

4 Construam no caderno um quadro como o do modelo a seguir e atribuam a *x* cinco números inteiros, completando-o. Depois, verifiquem que os ternos pitagóricos obtidos, ou seja, os números das três colunas da direita, satisfazem o teorema de Pitágoras.

MODELO

x	$x + 2$	$x + (x + 2)$	$x \cdot (x + 2)$	$x \cdot (x + 2) + 2$

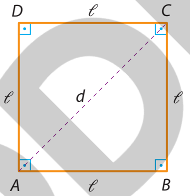
4. Construção de quadro.

3 Aplicações do teorema de Pitágoras

Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado

Considere o quadrado *ABCD*, com lado medindo ℓ e diagonal *d*.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *ABC*, temos:



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, com a expressão $d = \ell\sqrt{2}$ é possível determinar a medida da diagonal de um quadrado quando se conhece a medida de seu lado, e vice-versa.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro mede 12 cm.

Se $P = 12$ cm, então $\ell = 3$ cm.

$d = \ell\sqrt{2}$

$d = 3\sqrt{2}$

Logo, a diagonal desse quadrado mede $3\sqrt{2}$ cm.

b) Vamos calcular a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ cm.

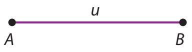
Substituímos *d* por $7\sqrt{2}$ em $d = \ell\sqrt{2}$.

$\ell\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\ell = 7$

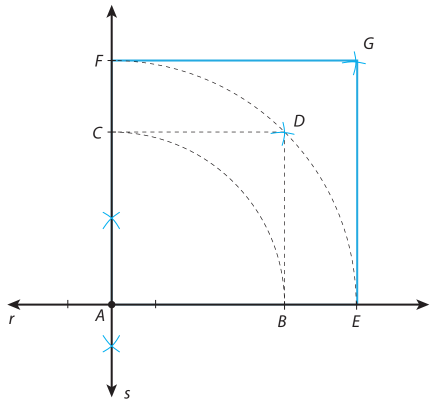
Logo, o lado desse quadrado mede 7 cm.

c) Dado o segmento $\overline{AB}$ com medida u, vamos construir um quadrado cujo lado meça $\sqrt{2}\,u$.



Usando régua e compasso, podemos seguir estes passos:

- transportamos $\overline{AB}$ para uma reta r;
- por A, traçamos a reta s, perpendicular a r;
- com abertura do compasso igual a u, traçamos três arcos: com centro em A, obtemos o ponto C em s; com centro em B e, depois, em C, obtemos o ponto D;
- as medidas dos lados do quadrado $ABCD$ são iguais a u; portanto, suas diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ medem $u\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}\,u$;
- com abertura do compasso igual a AD ($AD = \sqrt{2}\,u$), traçamos três arcos: com centro em A, obtemos o ponto E em r e o ponto F em s; com centro em E e, depois, em F, obtemos o ponto G;
- traçamos $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$ e obtemos o quadrado $AEGF$, com lado de medida $\sqrt{2}\,u$.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

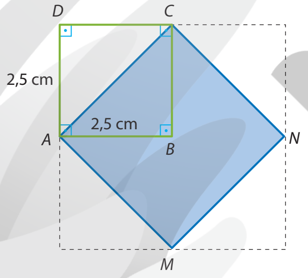
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Considere que o lado de um quadrado $ABCD$ mede 15 cm. **16. a)** $15\sqrt{2}$ cm

a) Determine a medida de sua diagonal.

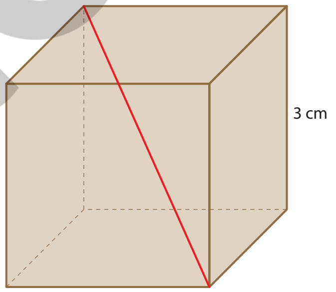
b) Calcule a medida da área do quadrado cujo lado tem a mesma medida da diagonal do quadrado $ABCD$. **16. b)** 450 cm²

17 Calcule a medida da área do quadrado $AMNC$, no qual B é ponto médio de uma de suas diagonais. **17.** 12,50 cm²



18 A diagonal de um quadrado mede $10\sqrt{2}$ cm. Três quadrados que têm diagonais com essa medida são colocados um ao lado do outro, de modo que formem um retângulo. Calcule a medida do perímetro desse retângulo. **18.** 80 cm

19 Qual é a medida da diagonal do cubo a seguir, destacada em vermelho? **19.** $3\sqrt{3}$ cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

No **exercício 16**, no **item a**, a diagonal é determinada pela relação com a medida do lado de um quadrado; como o lado mede 15 cm, a diagonal mede $15\sqrt{2}$ cm. O quadrado do **item b** tem lado medindo $15\sqrt{2}$ cm. Assim, a medida A da área desse quadrado, em cm², é:

$A = (15\sqrt{2})^2$

$A = 2 \cdot 15^2$

$A = 450$

A área do quadrado mede 450 cm².

No **exercício 17**, observe que o segmento $\overline{AC}$, que é a diagonal do quadrado $ABCD$, é também o lado do quadrado $AMNC$. Assim:

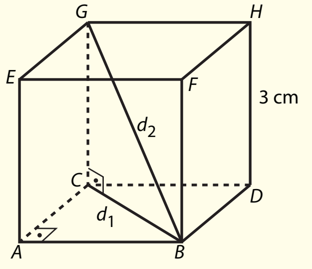
- $AC = d_{ABCD} = 2{,}5\sqrt{2}$
- $A_{AMNC} = (AC)^2 = (2{,}5\sqrt{2})^2$

$A_{AMNC} = 2{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2 = 12{,}5$

Portanto, a área do quadrado $AMNC$ mede 12,5 cm².

No **exercício 18**, solicite aos estudantes que expliquem como calcular a medida do perímetro do retângulo formado, ou seja, de quais medidas necessitam para chegar a esse valor. Eles devem perceber que: basta conhecer a medida do lado de cada quadrado; o contorno desse retângulo tem medida dada pela adição da medida de 8 lados do quadrado. Como a medida do lado do quadrado é 10 cm (da relação da diagonal e da medida do lado de um quadrado), então o perímetro do retângulo mede 80 cm ($8 \cdot 10 = 80$).

No **exercício 19**, vamos considerar a figura:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Calculamos a medida da diagonal da base do cubo (d_1). Como essa é uma região quadrada de lado 3 cm (medida da aresta do cubo), $d_1 = 3\sqrt{2}$ cm.

A medida da diagonal procurada (d_2) é a hipotenusa do triângulo retângulo BCG, reto em C. Assim, em cm, essa diagonal é dada por:

$(d_2)^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2$

$(d_2)^2 = 9 + 18$

$(d_2)^2 = 27$

$d_2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

A diagonal mede $3\sqrt{3}$ cm.

Pense mais um pouco...

Apresentamos uma possível solução para esta atividade.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AHD*, obtemos:

$AD^2 = a^2 + b^2$

Da figura podemos dizer que:

$A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{AHD}$

$A_{EFGH} = AD^2 - 4 \cdot \dfrac{ab}{2}$

$A_{EFGH} = a^2 + b^2 - 2ab$

$A_{EFGH} = (a - b)^2$

Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero

Outra relação que obtemos como aplicação do teorema de Pitágoras é a que expressa a medida *h* da altura de um triângulo equilátero em relação à medida ℓ de seu lado (nesse caso, as três alturas são congruentes).

$h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Note que, desse modo, temos uma relação para a medida *A* da área de um triângulo equilátero de lados de medida ℓ.

$A = \dfrac{\ell \cdot h}{2}$

$A = \dfrac{\ell \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{2}}{2}$

$A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Exercícios propostos

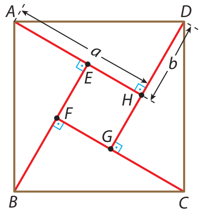
As resoluções dos **exercícios 20** e **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e resolvam o exercício a seguir.

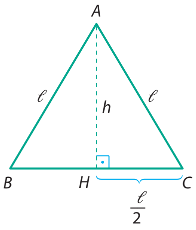
Mostrem que, se *ABCD* é um quadrado, a medida da área do quadrado *EFGH* é igual a $(a - b)^2$. *Pense mais um pouco...*: Demonstração.



Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC*, com lados medindo ℓ e altura *h*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *HCA*, temos:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2$$

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

A igualdade $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ possibilita determinar a medida da altura do triângulo equilátero quando se conhece a medida dos lados desse triângulo, e vice-versa.

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular a medida da altura de um triângulo equilátero cujo perímetro mede 18 cm.

Se $P = 18$ cm, então $\ell = 6$ cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

Logo, a altura desse triângulo mede $3\sqrt{3}$ cm.

b) Vamos calcular a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede $6\sqrt{3}$ cm.

Se $h = 6\sqrt{3}$:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\ell\cancel{\sqrt{3}} = 12\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\ell = 12$$

Logo, o lado desse triângulo mede 12 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20 O lado de um triângulo equilátero mede 3 cm. Calcule a medida da altura desse triângulo. **20.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

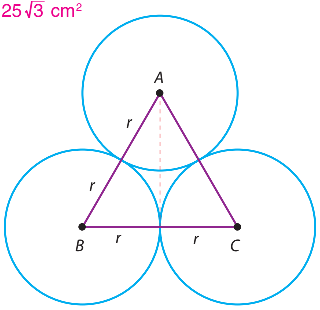
21 Determine a medida da área de um triângulo equilátero cuja altura mede $12\sqrt{3}$ cm. **21.** $144\sqrt{3}$ cm²

22 Com um barbante que mede 48 cm, contorna-se exatamente a figura de um triângulo equilátero. Qual é a medida da altura desse triângulo? **22.** $8\sqrt{3}$ cm

23 O lado de um triângulo equilátero tem a mesma medida da diagonal de um quadrado de lado medindo 25 cm. Calcule a medida da altura desse triângulo. **23.** $\frac{25\sqrt{6}}{2}$ cm

24 Na figura a seguir, o raio de cada circunferência mede 1,5 cm.

Determine a medida da área do triângulo *ABC*.
24. $2{,}25\sqrt{3}$ cm²



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

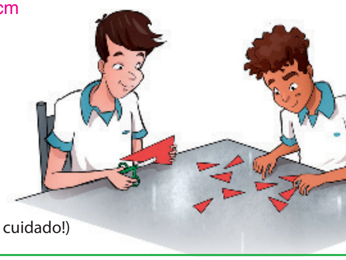
Pense mais um pouco...: $2x\sqrt{5}$ cm

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Em papel quadriculado, recortem 20 triângulos retângulos congruentes de modo que a medida de um cateto (*x* cm) seja o dobro da medida do outro cateto (2*x* cm). Disponham os triângulos lado a lado sobre a carteira formando um quadrado.

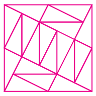
Qual é a medida do lado desse quadrado?

(Usem tesouras com pontas arredondadas e as manuseiem com cuidado!)



DANILLO SOUZA/ ARQUIVO DA EDITORA

Resposta possível:



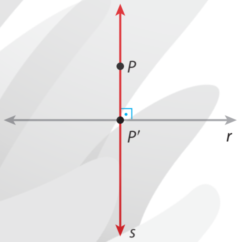
4 Relações métricas em um triângulo retângulo

Além do teorema de Pitágoras, há outras relações métricas no triângulo retângulo. Porém, antes de estudá-las, vamos conhecer alguns conceitos para entender melhor os termos que serão usados.

Projeções ortogonais

Considere uma reta *r* e um ponto *P* externo a ela.

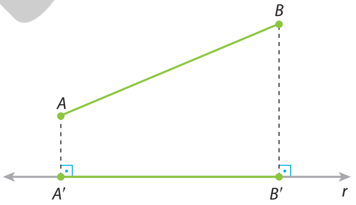
Vamos traçar por *P* a reta *s*, perpendicular à reta *r*. No cruzamento das retas *r* e *s* obtemos o ponto *P*′, que é chamado **projeção ortogonal de *P* sobre *r***.



Considere agora a reta *r* e o segmento $\overline{AB}$ da figura a seguir.

Projetando ortogonalmente as extremidades do segmento $\overline{AB}$ sobre *r*, obtemos os pontos *A*′ e *B*′.

O segmento $\overline{A'B'}$ é chamado **projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre *r***.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções e comentários dos **exercícios 22** a **24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Pense mais um pouco...

Oriente os estudantes a fazer a resolução, inicialmente, por tentativa e erro. Depois, questione como compor, com dois dos triângulos recortados, um ângulo reto, que forme um “canto do quadrado” a ser obtido. Esse questionamento (ou dica) estimulará uma reflexão, motivando o redirecionamento de novas tentativas, e será um incentivo àqueles que ainda não chegaram à resposta.

Se julgar necessário passar outra dica, sugira aos estudantes que tentem construir um triângulo retângulo justapondo 5 dos triângulos recortados.

Observando a figura indicada como resposta, verificamos que o lado do quadrado obtido mede o dobro da medida *h* da hipotenusa dos triângulos considerados. Obtemos, então:

$$h^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = x\sqrt{5}$$

Assim, o lado do quadrado mede $2x\sqrt{5}$ cm.

4. Relações métricas em um triângulo retângulo

Habilidades da BNCC:
EF09MA13 e **EF09MA14**.

Neste tópico, além de aplicar a semelhança de triângulos ao demonstrar relações métricas no triângulo retângulo e resolver problemas que envolvem o teorema de Pitágoras, abordamos as projeções ortogonais, propiciando, assim, o desenvolvimento das habilidades (EF09MA13) e (EF09MA14).

O teorema de Pitágoras é uma relação métrica importante a ser considerada em um triângulo retângulo, mas há outras que envolvem as medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela, além das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Explore com os estudantes a noção de projeção ortogonal de um ponto e de um segmento sobre uma reta (e sobre outro segmento), conceitos necessários para a compreensão de algumas das relações métricas que serão apresentadas.

Ao tratar da projeção ortogonal de um segmento de reta sobre uma reta, proponha à turma esta pergunta: No caso de um segmento $\overline{CD}$ ser perpendicular a uma reta *r*, que figura corresponde à projeção ortogonal desse segmento sobre essa reta? Espera-se que os estudantes respondam que a figura correspondente à projeção ortogonal do segmento $\overline{CD}$ sobre a reta *r*, nesse caso, é apenas um ponto.

Exercícios propostos

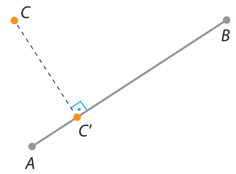
No **exercício 25**, verifique se os estudantes invertem a ordem de referência entre o objeto a ser projetado (representado apenas pelas letras) e a sua projeção (representada pelas letras com apóstrofo). Espera-se que eles considerem falsa apenas a afirmação do **item a**.

No **exercício 26**, aplicando as projeções dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$, respectivamente, obtemos:

a) $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$;
b) $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$.

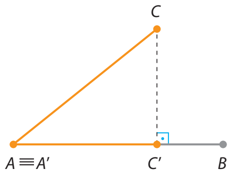
Também podemos projetar ortogonalmente um ponto ou um segmento sobre um segmento. Observe os exemplos.

a)



Dizemos que *C′* é a projeção ortogonal do ponto *C* sobre o segmento $\overline{AB}$.

b)

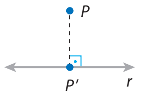


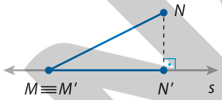
Dizemos que $\overline{A'C'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o segmento $\overline{AB}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

25 Observe as figuras. Depois, classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

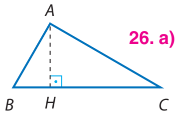




a) *P* é a projeção ortogonal do ponto *P′* sobre a reta *r*. **25. a)** Falsa.
b) $\overline{C'D'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{CD}$ sobre o segmento $\overline{AB}$. **25. b)** Verdadeira.
c) *N′* é a projeção ortogonal do ponto *N* sobre a reta *s*. **25. c)** Verdadeira.
d) $\overline{M'N'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{MN}$ sobre a reta *s*. **25. d)** Verdadeira.

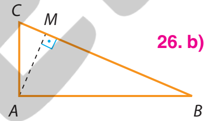
26 Quais são as projeções ortogonais dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{BC}$ em cada triângulo?

a)



26. a) Respectivamente $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$.

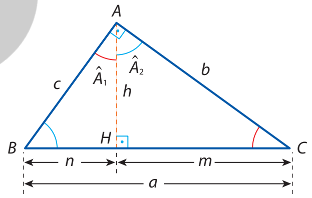
b)



26. b) Respectivamente $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$.

Relações métricas

Observe o triângulo *ABC* com hipotenusa de medida *a* e catetos de medidas *b* e *c*.



Considerando a altura $\overline{AH}$, de medida *h*, relativa à hipotenusa, temos:

- $\overline{BH}$, de medida *n*, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$;
- $\overline{HC}$, de medida *m*, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com projeções ortogonais, sugerimos:

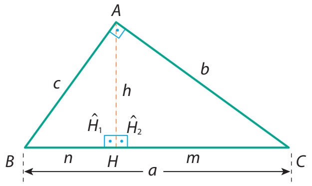
LAMAS, R. C. P.; MAURI, J. O teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado. **IBILCE/UNESP**, São José do Rio Preto, 2006. Publicação na página da Pró-Reitoria de Graduação – Núcleos de Ensino. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/artigos/. Acesso em: 22 jul. 2022.

As autoras apresentam uma situação didática para trabalhar as relações métricas no triângulo retângulo.

Considerando os triângulos retângulos *ABC*, *HBA* e *HAC*, por meio da semelhança de triângulos, podemos estabelecer relações entre as medidas de seus lados.

1ª relação

Considere o triângulo *ABC* da figura. Traçando a altura relativa à hipotenusa, obtemos alguns pares de triângulos semelhantes.



1. Comparando os triângulos *ABC* e *HBA*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_1$ (ângulos retos)
- $\hat{B} \cong \hat{B}$ (ângulo comum)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HBA* são semelhantes; portanto, os lados desses triângulos são proporcionais.

Então, podemos escrever a proporção:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}, \text{ ou seja, } c^2 = an$$

2. Comparando os triângulos *ABC* e *HAC*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum)

Do mesmo modo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes. Portanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}, \text{ ou seja, } b^2 = am$$

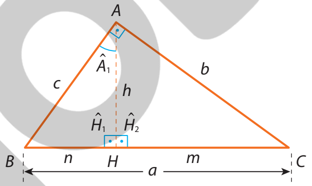
O quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela.

2ª relação

Comparando os triângulos *ABH* e *CAH*, temos:

- $\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{A}_1 \cong \hat{C}$ (ambos têm por complemento o ângulo $\hat{B}$)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABH* e *CAH* são semelhantes. Portanto:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}, \text{ ou seja, } h^2 = mn$$

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

Relações métricas

Se julgar necessário, retome o conceito de semelhança de triângulos e explore os casos de semelhança, pois as demonstrações apresentadas tomam por base esse conceito.

Para cada relação métrica demonstrada, peça aos estudantes que desenhem triângulos retângulos (com auxílio de régua, transferidor ou compasso), meçam com a régua as medidas dos elementos envolvidos e verifiquem (utilizando uma calculadora) a respectiva relação métrica para os triângulos construídos.

Para traçar a altura relativa à hipotenusa, eles devem traçar a perpendicular a esse segmento que passa pelo vértice oposto.

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

Observe aos estudantes que esta é uma demonstração algébrica do teorema de Pitágoras, agora fazendo uso das relações recém-estudadas.

Exercícios propostos

Para o **exercício 27**, verifique se os estudantes obtêm a medida *OD* utilizando conhecimentos construídos anteriormente (no capítulo 1, quando estudaram a localização de números irracionais na reta real) ou se aplicam novamente o teorema de Pitágoras. Ressalte essa ligação com conhecimentos anteriores. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$OD^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$

Então, $OD = \sqrt{3}$. Assim, o perímetro do triângulo mede $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Um quadrado cujo lado mede *OD* terá a medida de área dada por OD^2, ou seja: $OD^2 = 3$

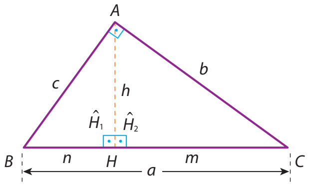
3ª relação

Comparando os triângulos *ABC* e *HAC*, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{H}_2$ (ângulos retos)
- $\hat{C} \cong \hat{C}$ (ângulo comum)

Logo, pelo caso AA, os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes. Portanto:

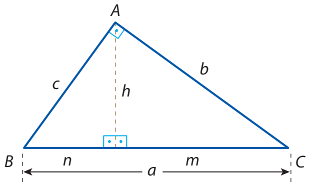
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}, \text{ ou seja, } bc = ah$$



O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Outra demonstração do teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo *ABC*, vamos provar que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Hipótese: $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em *A*.

Tese: $b^2 + c^2 = a^2$

- **Demonstração**

Como o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela, temos:

$$b^2 = am \quad \text{e} \quad c^2 = an$$

Adicionando membro a membro essas duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \longleftarrow \text{Colocamos } a \text{ em evidência.}$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \longleftarrow \text{Substituímos } (m + n) \text{ por } a.$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Desse modo, também provamos o teorema de Pitágoras.

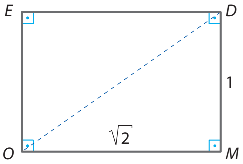
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Considere a figura e responda às questões.

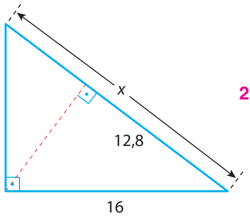
a) Qual é a medida do perímetro do $\triangle ODM$? **27. a)** $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) Considere um quadrado de lado de medida *OD*. Qual é a medida da área desse quadrado? **27. b)** 3



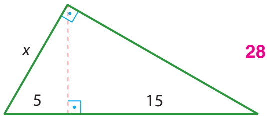
28 Aplicando as relações métricas dos triângulos retângulos, calcule o valor de x.

a)



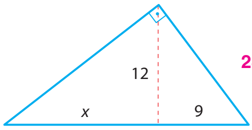
28. a) $x = 20$

b)



28. b) $x = 10$

c)



28. c) $x = 16$

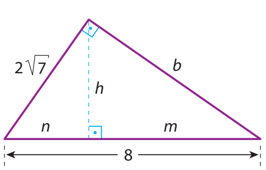
29 Calcule as medidas h, n, m e b do triângulo retângulo a seguir.

29. $h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

$n = 3,5$

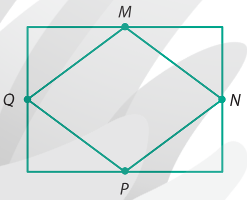
$m = 4,5$

$b = 6$



30 As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 1,8 cm e 3,2 cm. Determine a medida dos catetos desse triângulo. **30.** 3 cm e 4 cm.

31 (Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se um retângulo cujos lados medem 8 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são pontos médios dos lados.



O perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é:

a) 20 cm.

b) 24 cm.

c) 32 cm.

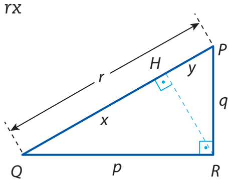
d) 36 cm.

e) 52 cm.

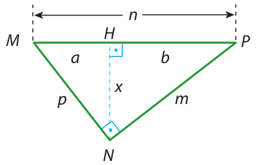
31. Alternativa **a**.

32 Aplique os casos de semelhança entre triângulos para provar que: **32.** Demonstração.

a) $p^2 = rx$



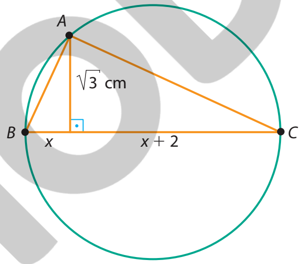
b) $x^2 = ab$



33 (UFPE) Quanto mede, em cm, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm? **33.** 12 cm

34 A medida da área do triângulo retângulo RST é 36 cm². Determine o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura referente à hipotenusa. **34.** 72 cm²

35 Determine a medida do diâmetro $\overline{BC}$ da circunferência da figura. **35.** $BC = 4$ cm



36 ***Hora de criar*** – Em dupla com um colega, elaborem um problema cada um sobre relações métricas no triângulo retângulo. Troquem os problemas elaborados por vocês e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

36. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 28** a **30** e dos **exercícios 33** e **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Apresentamos uma possível resolução do **exercício 31**.

Cada lado do quadrilátero $MNPQ$ é hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo 4 cm e 3 cm.

Representando por x a medida desses lados, obtemos, pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

A medida do perímetro é dada por:

$5 + 5 + 5 + 5 = 20$

Logo, a medida do perímetro é 20 cm.

Para o **exercício 32**, seguem as demonstrações.

a) Comparando os triângulos PQR e RQH, temos:

$P\hat{R}Q \cong R\hat{H}Q$ (ângulos retos)

$R\hat{Q}P \cong R\hat{Q}H$ (ângulo comum).

Logo, pelo caso AA, os triângulos retângulos PQR e RQH são semelhantes. Assim:

$$\frac{RQ}{HQ} = \frac{PQ}{RQ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{x} = \frac{r}{p} \Rightarrow p^2 = rx$$

b) Comparando os triângulos MHN e NHP, temos:

$M\hat{H}N \cong N\hat{H}P$ (ângulos retos)

$H\hat{M}N \cong H\hat{N}P$ (ambos têm por complemento o ângulo $\hat{P}$).

Logo, pelo caso AA, os triângulos retângulos MHN e NHP são semelhantes. Assim:

$$\frac{HN}{HP} = \frac{HM}{HN} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = ab$$

Para o **exercício 35**, apresentamos uma possível resolução a seguir.

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = x \cdot (x + 2)$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} 1 \\ -3 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

$d = x + x + 2$

$d = 1 + 1 + 2 = 4$

Portanto, o diâmetro $\overline{BC}$ mede 4 cm.

No **exercício 36**, embora a resposta seja pessoal, incentive os estudantes a elaborar problemas envolvendo situações contextualizadas.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA17**.

Nesta seção, apresentamos a construção de perfis topográficos utilizados para descrever terrenos e seus acidentes geográficos e analisamos a construção do perfil topográfico do Pão de Açúcar e do morro da Urca. Para a construção do perfil apresentado, aplicamos o conceito de projeção ortogonal a objetos tridimensionais, desenvolvendo, assim a habilidade (EF09MA17).

Amplie a discussão do assunto da seção levando material de consulta para os estudantes ou solicitando-lhes que levem material pesquisado por eles para o desenvolvimento em sala de aula. Se possível, pode-se propor atividade interdisciplinar com Geografia.

Solicite aos estudantes a leitura em duplas com registro próprio de cada etapa do procedimento para a construção de um perfil topográfico, estimulando-os a aplicar conhecimentos de diferentes linguagens (verbal, visual, matemática e científica) para expressar opiniões e partilhar informações, desenvolvendo, assim, a **competência geral 4**.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

A representação de um relevo

O estudo topográfico de uma região consiste na descrição exata e pormenorizada de um terreno com todos os seus acidentes geográficos. Com base em estudos topográficos, são construídos os chamados **perfis topográficos**, como o do conjunto Pão de Açúcar e morro da Urca, no Rio de Janeiro (RJ), na figura V.

Para entender como esses perfis são construídos, imagine os morros sendo cortados por planos horizontais paralelos ao nível do mar em altitudes de medidas 50 m, 100 m, 150 m, ..., 350 m. Agora imagine linhas conectando todos os pontos sobre a superfície dos morros pertencentes aos planos de mesma altitude. Essas linhas imaginárias, como as linhas brancas nas figuras I e II, são chamadas de **curvas de nível**.

Na figura II, note que as curvas de nível aparecem vistas de cima.

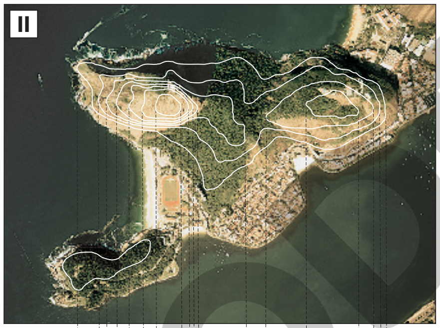
A figura III é um desenho do contorno da fotografia aérea da figura II, identificando as curvas de nível e suas altitudes correspondentes, em metro.

Para construir o perfil topográfico dessa região, traçamos uma semirreta de origem **A**, que passa pelo cume dos morros, e as perpendiculares a ela, pelos pontos de intersecção com as curvas de nível (figura IV). As perpendiculares são prolongadas para obter a figura V, que representa o perfil topográfico do Pão de Açúcar e do morro da Urca.

CURVAS DE NÍVEL – PÃO DE AÇÚCAR E MORRO DA URCA

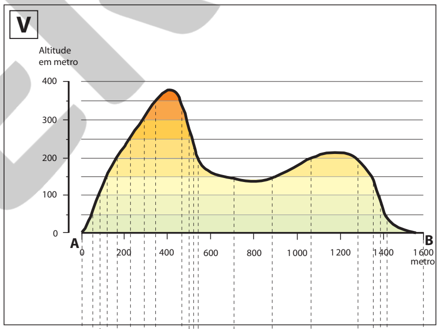
VANESSA F. MERINO

FOTOGRAFIA AÉREA – PÃO DE AÇÚCAR E MORRO DA URCA

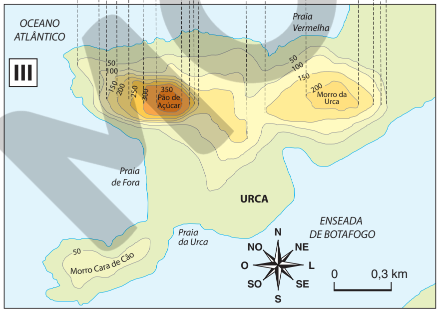


BASE AEROFOTOGRAMETRIA E PROJETOS LTDA.

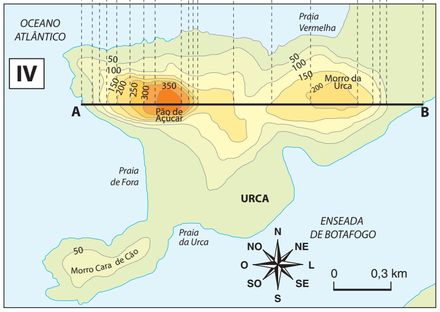
PERFIL TOPOGRÁFICO



MAPA



MAPA



ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

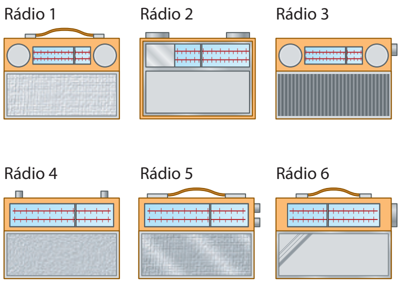
Fonte: FERREIRA, G. M. L. **Atlas geográfico**: espaço mundial. 4. ed. rev. e atual. São Paulo: Moderna, 2013. p. 15.

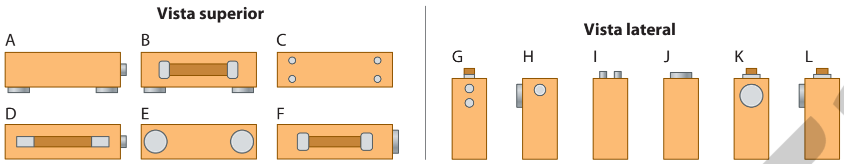
Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Analise o perfil topográfico da figura V e dê a medida da altitude aproximada do Pão de Açúcar e do morro da Urca. **1.** Pão de açúcar: aproximadamente 380 m; morro da Urca: aproximadamente 210 m.

2 (Saresp) A figura indica seis rádios e o desenho de suas vistas superior e lateral.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A tabela correta que relaciona cada rádio com suas vistas é: **2.** Alternativa **c**.

a)

Rádio	Vista superior	Vista lateral
1	B	L
2	E	J
3	A	K
4	C	G
5	F	H
6	D	I

b)

Rádio	Vista superior	Vista lateral
1	D	I
2	C	L
3	F	H
4	E	G
5	A	J
6	B	K

c)

Rádio	Vista superior	Vista lateral
1	B	L
2	E	J
3	A	H
4	C	I
5	D	G
6	F	K

d)

Rádio	Vista superior	Vista lateral
1	F	L
2	E	J
3	A	H
4	C	I
5	D	G
6	B	K

Agora quem trabalha é você!

A **atividade 1** pode ser resolvida considerando que as altitudes estão indicadas no perfil topográfico da figura V. A altitude do Pão de Açúcar está entre 350 m e 400 m, aproximadamente 380 m; já a do morro da Urca é pouco mais do que 200 m e menor do que 250 m, aproximadamente 210 m.

A resolução da **atividade 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

5. O teorema de Pitágoras no plano cartesiano

Habilidades da BNCC:
EF09MA14 e **EF09MA16**.

Neste tópico, serão apresentadas algumas aplicações do teorema de Pitágoras no plano cartesiano, como a determinação da distância entre dois pontos do plano, favorecendo o desenvolvimento das habilidades (EF09MA14) e (EF09MA16).

Se julgar necessário, retome com os estudantes a localização de pontos no plano cartesiano dadas as suas coordenadas e a identificação das coordenadas de pontos demarcados em um plano cartesiano. Verifique se eles reconhecem a indicação (*x*, *y*) como as coordenadas cartesianas associadas a um ponto do plano e se identificam o 1º elemento (*x*) do par ordenado (a abscissa do ponto) como a coordenada relativa ao eixo horizontal, e o 2º elemento (*y*) do par (a ordenada do ponto) como a coordenada relativa ao eixo vertical.

Explore a situação apresentada e sua representação no plano cartesiano, perguntando aos estudantes quais são as coordenadas do ponto *E*, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e do ponto *P*. Espera-se que eles reconheçam que a origem do sistema é dada pelas coordenadas (0, 0) e, assim, temos $E = (0, 0)$. Além disso, para identificar as coordenadas de *P*, eles precisam observar as linhas tracejadas que partem do 11 e do 34, e que o cruzamento dessas linhas é o ponto *P*, ou seja, temos $P = (11, 34)$.

Assim, os estudantes devem perceber que, nesse caso, a medida da distância de *E* a *P* corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo (*ELP*) cujos catetos medem 34 e 11.

5 O teorema de Pitágoras no plano cartesiano

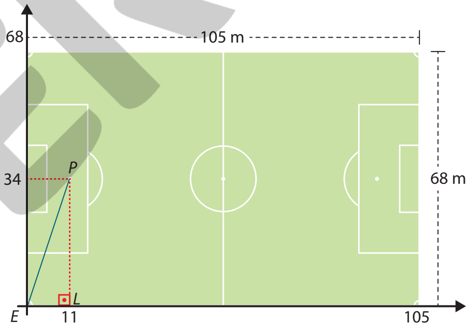
O técnico de um time de futebol é muito exigente nos treinos de cobrança de escanteio. Ele quer saber a medida exata da distância entre o ponto de esquina do campo de onde se cobra o escanteio e o ponto da marca do pênalti, lugar onde se posiciona um atacante para cabecear a bola ao gol. Sabendo que a marca do pênalti fica a 11 m da linha de fundo e a 34 m da linha lateral do campo, vamos ajudar o técnico a calcular a medida da distância pretendida.

ROBERT MORA/ISI PHOTOS/GETTY IMAGES

Cobrança de escanteio durante uma partida de futebol, na Califórnia, Estados Unidos, em 2022.

Vamos imaginar a figura do campo em um plano cartesiano com a origem na esquina de escanteio (ponto *E*), com o eixo vertical sobre a linha de fundo e o eixo horizontal sobre a linha lateral.

Observe, na ilustração, que o técnico quer calcular a medida da distância de *E* a *P*, e também que $EL = 11$ e $LP = 34$.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo retângulo *ELP*, com catetos medindo 11 e 34, aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$(EP)^2 = (EL)^2 + (LP)^2$$

$$(EP)^2 = (11)^2 + (34)^2$$

$$EP = \sqrt{11^2 + 34^2}$$

$$EP = \sqrt{121 + 1\,156} \simeq 35{,}74$$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a distância de *E* a *P* mede, aproximadamente, 35,74 metros.

Note que, no plano cartesiano, temos $E = (0, 0)$ e $P = (11, 34)$, e que a medida *EL* é dada pela diferença das abscissas:

$$EL = 11 - 0 = 11$$

Note também que a medida *LP* é dada pela diferença das ordenadas:

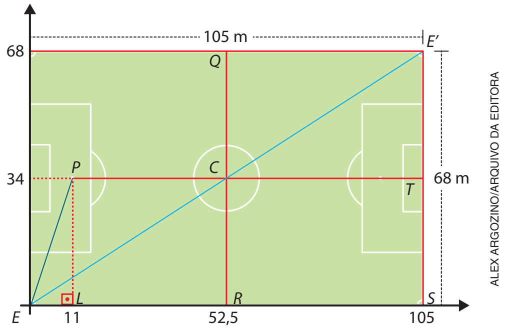
$$LP = 34 - 0 = 34$$

Assim, o cálculo anterior fica:

$$EP = \sqrt{(11 - 0)^2 + (34 - 0)^2}$$
$$EP = \sqrt{121 + 1\,156}$$
$$EP \simeq 35{,}74$$

Agora, vamos explorar outras distâncias no campo de futebol colocado no plano cartesiano.

Observe na figura os pontos $P = (11, 34)$, $Q = (52{,}5; 68)$, $C = (52{,}5; 34)$ e $E' = (105, 68)$.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

1. Para determinar a medida da distância entre os pontos *E* e *E′*, podemos:

- aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle ESE'$, considerando catetos cujas medidas são 105 e 68:

  $$(EE')^2 = (ES)^2 + (SE')^2$$
  $$(EE')^2 = (105)^2 + (68)^2$$
  $$EE' = \sqrt{105^2 + 68^2}$$
  $$EE' = \sqrt{11\,025^2 + 4624} \simeq 125{,}1$$

  A distância da esquina *E* à esquina *E′* mede aproximadamente 125,1 metros.

- aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle ESE'$, considerando as coordenadas dos pontos $E = (0, 0)$ e $E' = (105, 68)$:

  $$(EE')^2 = (ES)^2 + (SE')^2$$
  $$(EE')^2 = (105 - 0)^2 + (68 - 0)^2$$
  $$EE' = \sqrt{(105 - 0)^2 + (68 - 0)^2}$$
  $$EE' = \sqrt{11025 + 4624} \simeq 125{,}1$$

  A distância da esquina *E* à esquina *E′* mede aproximadamente 125,1 metros.

2. Para calcular a distância entre os pontos *C* e *E′*, podemos:

- aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle CTE$, considerando catetos cujas medidas são 52,5 e 34:

  $$(CE')^2 = (CT)^2 + (TE')^2$$
  $$(CE')^2 = (52{,}5)^2 + (34)^2$$
  $$CE' = \sqrt{(52{,}5)^2 + (34)^2}$$
  $$CE' = \sqrt{2756{,}25 + 1\,156} \simeq 62{,}55$$

  A distância do centro *C* à esquina *E′* mede aproximadamente 62,55 metros.

- aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle CTE$, considerando as coordenadas dos pontos $C = (52{,}5; 34)$ e $E' = (105, 68)$.

  $$(CE')^2 = (CT)^2 + (TE')^2$$
  $$(CE')^2 = (105 - 52{,}5)^2 + (68 - 34)^2$$
  $$CE' = \sqrt{(105 - 52{,}5)^2 + (68 - 34)^2}$$
  $$CE' = \sqrt{(52{,}5)^2 + (34)^2}$$
  $$CE' = \sqrt{2756{,}25 + 1\,156} \simeq 62{,}55$$

3. Quando os pontos estão em um segmento horizontal:

$$PT = \sqrt{(105 - 11)^2 + (34 - 34)^2} = \sqrt{(105 - 11)^2} = |105 - 11| = 94$$

4. Quando os pontos estão em um segmento vertical:

$$TE' = \sqrt{(105 - 105)^2 + (68 - 34)^2} = \sqrt{(68 - 34)^2} = |68 - 34| = 34$$

O teorema de Pitágoras no plano cartesiano

Na ilustração do campo de futebol sobre o plano cartesiano, explore cada par de pontos e os segmentos que têm esses pontos como extremidades.

Reproduza na lousa esse plano cartesiano e peça a alguns estudantes que demarquem nele pares de pontos para que outros colegas determinem as medidas das distâncias entre eles, com a colaboração de toda a turma.

O objetivo desta abordagem mais aritmética do que algébrica é trabalhar as ideias em um contexto específico, por meio da resolução de um problema com dados numéricos. Consideramos aqui uma abordagem inicial que fornecerá aos estudantes pré-requisitos necessários para o estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio.

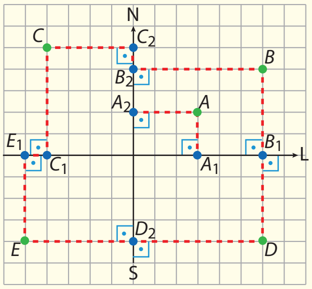
Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 37** a **39** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Amplie o **exercício 38** pedindo aos estudantes que determinem as medidas do perímetro e da área do losango. Espera-se que eles reconheçam que:

- a medida do perímetro P do losango, em unidade de comprimento, é dada por:
  $P = 4 \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10} \simeq 25{,}3$
- a medida da área A do losango, em unidade de área, é dada por:
  $A = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 32$

No **exercício 39**, proponha aos estudantes que reproduzam a figura em papel quadriculado e sugira a eles que determinem a projeção ortogonal de cada um desses pontos sobre cada eixo coordenado.



WLAMIR MIASIRO/
ARQUIVO DA EDITORA

Peça-lhes que, considerando o lado de cada quadradinho como a unidade de medida de comprimento, determinem as coordenadas dos pontos que são essas projeções ortogonais.

- $A_1 = (3, 0)$; $B_1 = (6, 0)$; $C_1 = (-4, 0)$; $D_1 = (6, 0)$; $E_1 = (-5, 0)$.
- $A_2 = (0, 2)$; $B_2 = (0, 4)$; $C_2 = (0, 5)$; $D_2 = (0, -4)$; $E_2 = (0, -4)$.

Observações

- Ainda na ilustração da página 191, temos o ponto C como ponto médio do segmento $\overline{EE'}$.
  Note que: $x_c = \dfrac{105 + 0}{2} = 52{,}5$, ou seja, $x_c = \dfrac{x_E + x_{E'}}{2}$
  $y_c = \dfrac{68 + 0}{2} = 34$, ou seja, $y_c = \dfrac{y_E + y_{E'}}{2}$
- A medida da distância entre pontos com mesma ordenada, isto é, pontos de um segmento horizontal, é dada pela diferença de abscissas em módulo.
  $PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|$
- A medida da distância entre pontos com mesma abscissa, isto é, pontos de um segmento vertical, é dada pela diferença de ordenadas em módulo.
  $PQ = \sqrt{(y_P - y_Q)^2} = |y_P - y_Q|$
- A medida da distância entre dois pontos quaisquer $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ no plano cartesiano é dada por: $PQ = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Considere a ilustração do campo de futebol da página 191 e, usando as coordenadas dos pontos na figura, calcule a medida da distância entre os seguintes pontos:

a) E e T; **37. a)** 110,4 **b)** E e Q; **37. b)** 85,9 **c)** P e C; **37. c)** 41,5 **d)** C e T; **37. d)** 52,5 **e)** C e Q. **37. e)** 34

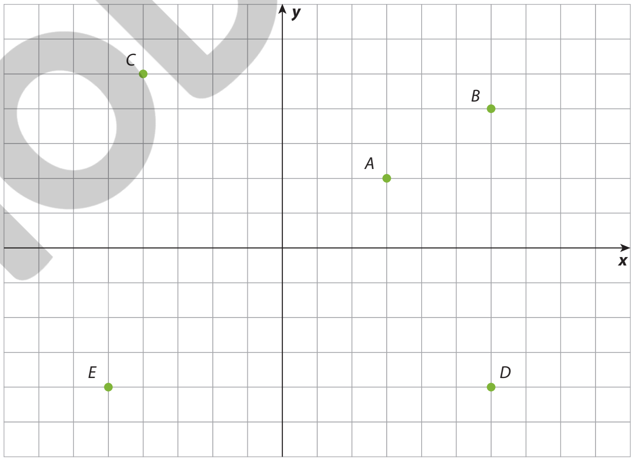
38 Represente em um plano cartesiano o losango de vértices $A(0, 0)$, $B(6, 2)$, $C(8, 8)$ e $D(2, 6)$. Depois, calcule:

a) as medidas das diagonais desse losango; **38. a)** $4\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$

b) a medida dos lados desse losango. **38. b)** $2\sqrt{10}$

39 Dados os pontos destacados no plano cartesiano e sabendo que $A = (3, 2)$, calcule a medida da distância entre cinco pares desses pontos.

39. $AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{58}$, $AD = 3\sqrt{5}$, $AE = 10$, $BC = \sqrt{101}$, $BD = 8$, $BE = \sqrt{185}$, $CD = \sqrt{181}$, $CE = \sqrt{82}$, $DE = 11$

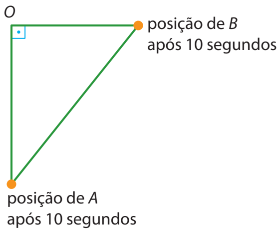


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

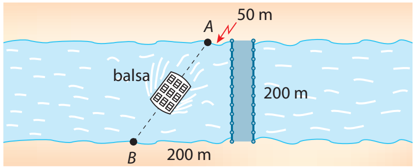
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Dois ciclistas, *A* e *B*, partem de um ponto *O* e movem-se perpendicularmente um em direção ao outro, à medida de velocidades de 16 metros por segundo e 12 metros por segundo, respectivamente. Que medida de distância os separará após 10 segundos? **1.** 200 m



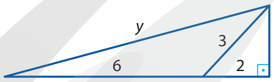
2 Uma balsa está fazendo a travessia de veículos e transeuntes, pois a ponte sobre o rio foi interditada. Ela parte do ponto A, que, por segurança, fica a 50 metros da ponte, e chega ao ponto B.



a) Quantos metros a balsa percorre nessa travessia? **2. a)** 250 m

b) Se a balsa demorar 5 minutos para fazer a travessia, qual será a medida da velocidade média em quilômetro por hora? **2. b)** 3 km/h

3 Determine o valor de y na figura. **3.** $y = \sqrt{69}$



4 Em um trapézio retângulo *ABCD*, a altura $\overline{AD}$ mede 6 cm, a base menor $\overline{DC}$ mede 3,5 cm e a diagonal maior $\overline{BD}$ mede 10 cm. Determine:

a) a medida da base maior; **4. a)** 8 cm

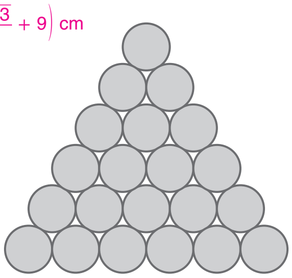
b) a medida do lado oblíquo; **4. b)** 7,5 cm

c) a medida do perímetro desse trapézio; **4. c)** 25 cm

d) a medida da área desse trapézio. **4. d)** 34,5 cm²

5 A figura representa a vista frontal de uma pilha de latas de leite em pó deitadas. Determine a medida da altura da pilha, sabendo que o raio de cada lata mede 4,5 cm.

5. $\left(\frac{45\sqrt{3}}{2} + 9\right)$ cm



6 Em um triângulo isósceles, cada lado congruente mede 15 cm. Determine a medida da área desse triângulo, sabendo que sua base mede 24 cm. **6.** 108 cm²

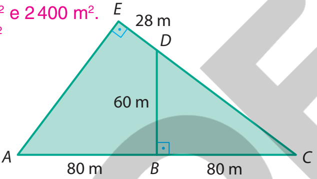
7 É possível colocar um lápis de 18 cm em um estojo retangular de 12 cm por 15 cm? Justifique sua resposta. **7.** Sim, se o lápis for acomodado no sentido da diagonal, que mede 19,2 cm.

8 Observe a figura e faça o que se pede.

8. a) $CD = 100$ m, $EC = 128$ m e $AE = 96$ m.

8. b) 6 144 m² e 2 400 m².

8. c) 3 744 m²



a) Determine as medidas *CD*, *EC* e *AE*.

b) Determine as medidas de área dos △*ACE* e △*BCD*.

c) Calcule a medida da área do quadrilátero *ABDE*.

9 Um losango tem 60 cm de perímetro. Sabendo que a diagonal maior desse losango mede 26 cm, calcule a medida da diagonal menor. **9.** $4\sqrt{14}$ cm

10 As dimensões de um retângulo são expressas por x + 1 e x – 2. Sabendo que a medida da área é 18 cm², determine a medida da diagonal desse retângulo. **10.** $3\sqrt{5}$ cm

11 (Fuvest-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a) 13.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 17.

11. Alternativa **d**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

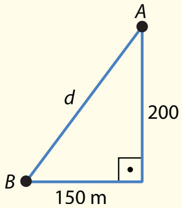
Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos tratados no capítulo e verificar possíveis dificuldades que ainda apresentem. Sugerimos que as atividades sejam desenvolvidas em duplas, o que ampliará e enriquecerá o repertório de estratégias que eles já têm e consolidará os conhecimentos construídos.

Incentive-os a reproduzir um esquema das figuras dadas nos enunciados ou a fazer desenhos que representem uma situação exposta para aplicar as informações importantes e completar com outras que forem relevantes para a resolução dos exercícios.

Estimule a troca das respostas obtidas, de modo que o debate não se restrinja à resposta final, mas também à resolução dos exercícios.

As resoluções do **exercício 1** e dos **exercícios 3** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

No **exercício 2**, analisando a figura, podemos desenhar o seguinte triângulo retângulo:



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida da distância *d* percorrida pela balsa:

$d^2 = 150^2 + 200^2$

$d^2 = 62\,500$

Portanto, $d = 250$ m.

b) $d = 250$ m e $t = 5$ min

$$v_{\text{média}} = \frac{250\text{ m}}{5\text{ min}} = 50\text{ m/min}$$

$$v_{\text{média}} = \frac{50 \cdot 1\text{ m}}{1\text{ min}} =$$

$$= \frac{50 \cdot \frac{1}{1\,000}\text{ km}}{\frac{1}{60}\text{ h}}$$

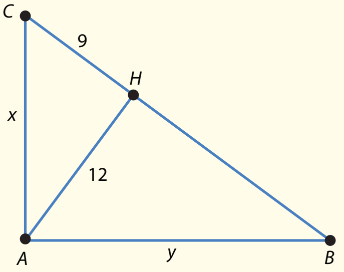
$$v_{\text{média}} = 50 \cdot \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{60}{1}\text{ km/h}$$

$$v_{\text{média}} = 3\text{ km/h}$$

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 12** a **14**, do **exercício 16** e dos **exercícios 18** a **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

No **exercício 15**, para facilitar a resolução, peça aos estudantes que representem essa situação por um desenho e só então apliquem as relações métricas necessárias.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo *AHC*:

$x^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow x = 15$

Pela 2ª relação métrica:

$12^2 = 9 \cdot HB \Rightarrow HB = 16$

Empregando o teorema de Pitágoras no triângulo *AHB*:

$y^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow y = 20$

Logo, os catetos desse triângulo medem 15 cm e 20 cm.

No **exercício 17**, verifique se os estudantes interpretam e relacionam as informações do enunciado. Proponha a resolução com o auxílio de calculadora.

Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida *BC*:

$(BC)^2 = 12{,}8^2 + 9{,}6^2$

$BC = \sqrt{163{,}84 + 92{,}16}$

$BC = 16$

Pela 3ª relação métrica, obtemos a medida *AD*:

$12{,}8 \cdot 9{,}6 = 16 \cdot AD$

$AD = \dfrac{12{,}8 \cdot 9{,}6}{16}$

$AD = 7{,}68$

Pela 1ª relação métrica, determinamos a medida *BD*:

$(12{,}8)^2 = 16 \cdot BD$

$BD = \dfrac{163{,}84}{16}$

$BD = 10{,}24$

Com a informação de que *P* está a 80 metros de *D*:

$DP = 80 \text{ m} = 0{,}08 \text{ km}$

Sendo assim:

- $BP = BD + DP = 10{,}24 \text{ km} + 0{,}08 \text{ km} = 10{,}32 \text{ km}$
- $PC = BC - BP = 16 \text{ km} - 10{,}32 \text{ km} = 5{,}68 \text{ km}$

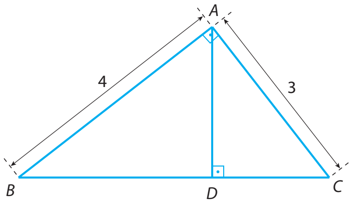
Adicionamos todas as medidas das distâncias percorridas, considerando a sequência do percurso:

$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow P$

$AD + DB + BA + AC + CP = 7{,}68 \text{ km} + 10{,}24 \text{ km} + 12{,}8 \text{ km} + 9{,}6 \text{ km} + 5{,}68 \text{ km} = 46 \text{ km}$

---

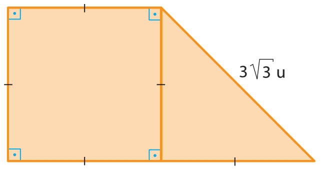
12 (OM-ABC) No triângulo *ABC*, a medida do ângulo $\hat{A}$ é 90° e $\overline{AD}$ é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



Se $m = BD$, $n = DC$ e $L = 25 \cdot m \cdot n$, então *L* é igual a: **12.** Alternativa **d.**

a) 100.
b) 121.
c) 169.
d) 144.
e) 225.

13 Qual é medida da área da figura a seguir? **13.** 20,25 u²



14 (UEL-PR) As medidas, em centímetro, dos três lados de um triângulo retângulo são expressas por $(x - 2)$, x e $(x + 2)$. A medida, em centímetro, da hipotenusa desse triângulo é:

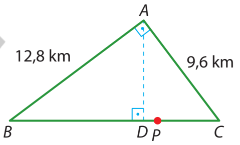
a) 5.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

14. Alternativa **c.**

15 A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm, e um dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa mede 9 cm. Calcule a medida dos catetos desse triângulo. **15.** 15 cm e 20 cm.

16 O cateto de um triângulo retângulo e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa medem 1 cm e $\frac{\sqrt{5}}{5}$ cm, respectivamente. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo. **16.** $\sqrt{5}$ cm

17 A figura mostra o esquema do roteiro de uma prova de ciclismo.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A sequência do percurso é:

A → D → B → A → C → P

O ponto *P* está a 80 metros do ponto *D*. Quantos quilômetros tem esse percurso? **17.** 46 km

18 (FEI-SP) Se em um triângulo os lados medem 9, 12 e 15 cm, então a altura relativa ao maior lado mede: **18.** Alternativa **b.**

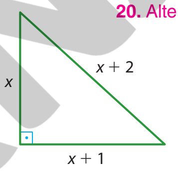
a) 8,0 cm.
b) 7,2 cm.
c) 6,0 cm.
d) 5,6 cm.
e) 4,3 cm.

19 (FEI-SP) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7 cm. A hipotenusa desse triângulo mede: **19.** Alternativa **d.**

a) 10 cm.
b) 15 cm.
c) 20 cm.
d) 25 cm.
e) 30 cm.

20 (Ulbra-RS) A área do triângulo a seguir mede 6 m². O valor do perímetro desse triângulo é: **20.** Alternativa **d.**

a) 6 m.
b) 9 m.
c) 10 m.
d) 12 m.
e) 20 m.



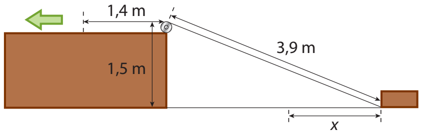
21 (UFPE) Um barco navegou 10 km para o oeste, depois 5 km para o sul, depois 13 km para o leste e finalmente 9 km para o norte. Onde o barco parou relativamente ao ponto de partida?

a) 5 km ao norte
b) 3 km a sudeste
c) 4 km ao sul
d) 3 km a sudoeste
e) 5 km a nordeste

21. Alternativa **e.**

22 (UFPR) Uma corda de 3,9 m de comprimento conecta um ponto na base de um bloco de madeira a uma polia localizada no alto de uma elevação, conforme o esquema a seguir. Observe que o ponto mais alto dessa polia está 1,5 m acima do plano em que esse bloco desliza. Caso a corda seja puxada 1,4 m, na direção indicada, a distância *x* que o bloco deslizará será de: **22.** Alternativa **c.**

a) 1,0 m.
b) 1,3 m.
c) 1,6 m.
d) 1,9 m.
e) 2,1 m.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se uma escada de 5 metros for apoiada em uma parede, com distância da base à parede medindo 3 metros, a que medida de altura a escada deve ser apoiada na parede?

a) 3 metros
b) 4 metros
c) 5 metros
d) 6 metros

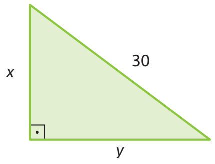
1. Alternativa **b**.

2 O teorema de Pitágoras enuncia que:

a) um triângulo retângulo tem dois catetos e uma hipotenusa.
b) a soma da medida dos catetos ao quadrado é igual à da medida da hipotenusa.
c) a soma da medida dos catetos é sempre menor que a da medida da hipotenusa.
d) a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

2. Alternativa **d**.

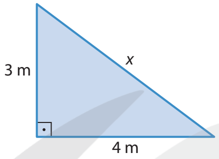
3 Entre as alternativas a seguir, dadas em metro, quais medidas correspondem às medidas dos catetos do triângulo ilustrado? **3.** Alternativa **c**.



a) 15 m e 15 m
b) 10 m e 20 m
c) 18 m e 24 m
d 6 m e 29 m

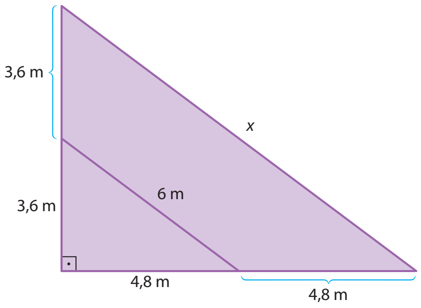
4 Com base nas informações da figura, qual é a medida da hipotenusa do triângulo?

4. Alternativa **a**.



a) 5 m
b) 7 m
c) 12 m
d) 25 m

5 Sem utilizar o teorema de Pitágoras, calcule o valor de x. **5.** Alternativa **c**.



a) 36 m
b) 24 m
c) 12 m
d) 6 m

6 Qual é a medida do comprimento da diagonal de um retângulo de lados medindo 8 m e 6 m?

6. Alternativa **d**.

a) 6 m
b) 8 m
c) $8\sqrt{2}$ m
d) 10 m

7 Qual é a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado medindo 10 cm?

7. Alternativa **a**.

a) $10\sqrt{2}$ cm
b) $10\sqrt{3}$ cm
c) 10 cm
d) 5 cm

8 Qual é a medida da área de um quadrado que tem o lado de mesma medida que a da diagonal de um quadrado de lado de medida 5 m?

8. Alternativa **b**.

a) 25 m^2
b) 50 m^2
c) 125 m^2
d) 12,5 m^2

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando

Organizando:
a) Os dois catetos, que formam o ângulo reto, e a hipotenusa, que é o lado que se opõe ao ângulo reto.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais são os elementos principais de um triângulo retângulo?

b) Como o teorema de Pitágoras relaciona esses elementos? **b)** A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

c) O que são os triângulos pitagóricos? **c)** São triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros positivos.

Verificando

Nesta seção, apresentamos testes que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a alguma das atividades propostas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo, assim também desenvolverão a autonomia no estudo.

As resoluções e comentários dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Organizando

a) O elemento que caracteriza o triângulo retângulo é o ângulo reto. Quanto aos lados, devem ser destacados os catetos e a hipotenusa.

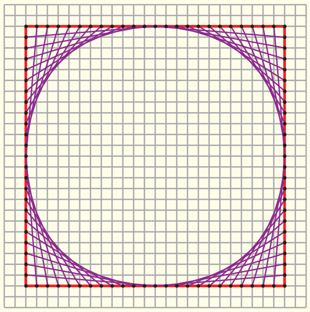
b) Espera-se que os estudantes enunciem o teorema de Pitágoras: a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

c) Espera-se que os estudantes associem o nome triângulo pitagórico com o teorema de Pitágoras. Assim, devemos enunciar: triângulos pitagóricos são triângulos cujas medidas são números naturais não nulos que satisfazem o teorema de Pitágoras; logo, são triângulos retângulos cujas medidas dos lados são números inteiros positivos.

Diversificando

A seção apresenta um procedimento usando triângulos retângulos e papel quadriculado para fazer uma composição que lembra uma circunferência.

Na atividade do **Agora é com você!**, os estudantes devem obter a seguinte figura:



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

DIVERSIFICANDO

Uma "quase" circunferência!

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Aninha ficou admirada quando a professora de Arte disse que, naquela aula, com paciência, os estudantes fariam uma "quase" circunferência usando triângulos retângulos.

A professora pediu a eles que, primeiramente, desenhassem no caderno, com régua e esquadro, um quadrado de 12 cm de medida de lado. Na sequência, eles deveriam:

- em cada lado do quadrado, marcar pontos de 0,5 cm em 0,5 cm, a partir do vértice;
- construir 8 triângulos retângulos com catetos nos lados do quadrado, sendo um cateto medindo 0,5 cm e o outro, 6 cm;
- construir grupos de 8 triângulos retângulos com catetos nos lados do quadrado, sendo que, em cada um, a soma das medidas dos catetos seja sempre igual a 6,5 cm.

Observe como Aninha começou o desenho no caderno dela.

MODELO

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Em um papel quadriculado, para facilitar, desenhe um quadrado cujos lados tenham 24 quadradinhos e siga as indicações da professora de Aninha para obter uma "quase" circunferência. O que poderia ser feito para obter uma figura mais próxima de uma circunferência? Dividir os lados em um número maior de quadradinhos.

Capítulo 9
Razões trigonométricas nos triângulos retângulos


PANTHER MEDIA GMBH/ALAMY/FOTOARENA

NIKADA/E+/GETTY IMAGES

a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

Observe, leia e responda no caderno.

a) Na região em que você mora, há algum teleférico? Mesmo que não haja, você conhece algum teleférico brasileiro? Sabe qual é a inclinação de seus cabos?

b) E você conhece algum parque com tirolesa? Pesquise essa prática esportiva originária da região do Tirol, na Áustria. Escolha uma tirolesa que achar mais interessante e informe qual é a inclinação dessa tirolesa.

c) Observe escadas fixas (na sua escola ou residência). Os degraus têm altura de mesma medida e piso de mesma medida? A inclinação deve ser igual em todos os degraus?

O maior teleférico de montanhas altas do mundo fica na montanha Tianmen, localizada no Parque Florestal Nacional de Zhangjiajie, na China. (Fotografia de 2018.)

Durante os 30 minutos do passeio, os passageiros dentro das cabines suspensas percorrem 7 km entre nuvens e paredões das montanhas e se elevam, com inclinações que medem até 37°, à altitude que mede 1 279 m.

Nesse percurso, é possível observar a chamada Estrada do Céu (Tongtian Highway) serpenteando a montanha com seus 11 km e 99 curvas.

Capítulo 9 – Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas de Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, ampliamos o estudo do triângulo retângulo apresentando as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, que serão a base para o estudo de Trigonometria a ser desenvolvido no Ensino Médio. Usamos como suporte a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras, já abordados em capítulos anteriores deste livro. Como o trabalho é desenvolvido considerando triângulos retângulos, as razões estudadas são determinadas apenas para ângulos agudos.

O capítulo trata ainda da análise de gráficos com distorções, que induzem a conclusões equivocadas.

Ao trabalhar a abertura do capítulo, proponha aos estudantes que pesquisem o uso de teleféricos no Brasil, como o famoso bondinho do Pão de Açúcar. Questione-os sobre a função de teleféricos e tirolesas. Comente com eles que muitos países, como a Colômbia, a Bolívia, o México e a China, utilizam teleféricos no sistema de transporte coletivo e que eles são uma das soluções para os problemas de mobilidade das grandes cidades. Já as tirolesas têm sido utilizadas em países como a China e a Índia há mais de dois mil anos, como meio de transporte de pessoas e de carga em regiões montanhosas e, também, para atravessar rios.

Se julgar conveniente, comente com os estudantes que a medida do ângulo de inclinação dos cabos de aço de um teleférico (o bondinho do Pão de Açúcar) será calculada no desenvolvimento do capítulo.

1. Primeiras razões trigonométricas

Habilidade da BNCC: **EF09MA12**.

Uma maneira de explorar o tema, antes de apresentar o texto introdutório desta página, é pedir aos estudantes que pesquisem a origem e o significado da palavra **trigonometria** e que relatem oralmente as informações que mais chamaram sua atenção. Isso enriquecerá o trabalho com o texto apresentado neste tópico.

No desenvolvimento deste capítulo, a aplicação do conceito de semelhança de triângulos está implícita na obtenção das razões trigonométricas que serão estudadas; por isso, é importante que os estudantes tenham domínio sobre a habilidade (EF09MA12), sendo capazes de reconhecer os critérios de semelhança de triângulos.

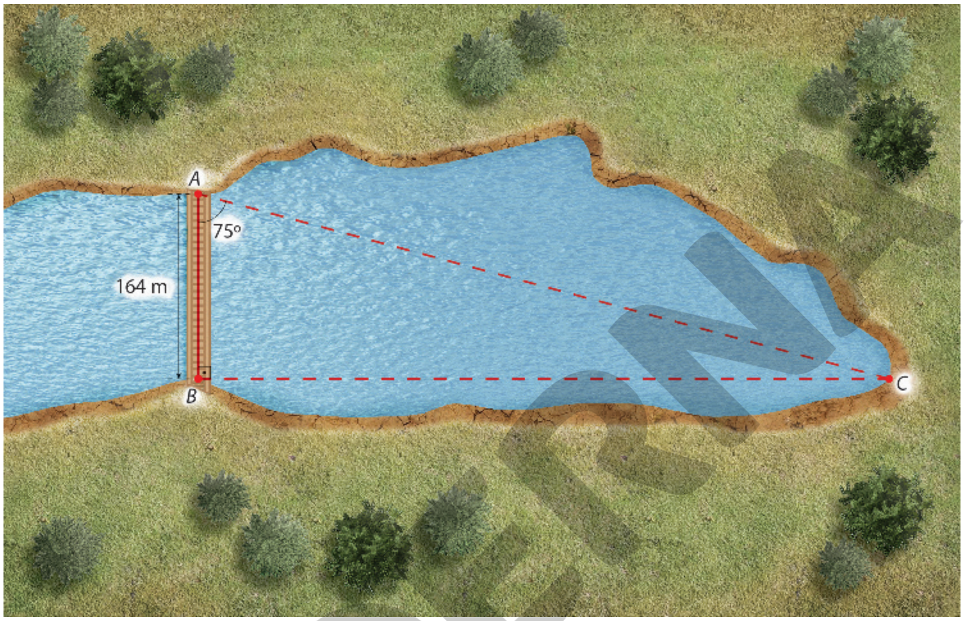
Uma resposta possível é determinar a medida *BC* por meio de um segmento congruente "em solo" (aplicando uma mesma translação aos pontos *B* e *C*); assim, com instrumentos de medida como trena, pode-se obter a medida *BC*. Após obter tal medida, determina-se a de *AC* por meio do teorema de Pitágoras, pois $AC^2 = 164^2 + BC^2$.

1 Primeiras razões trigonométricas

A figura a seguir mostra o esquema de uma represa. A ponte, representada pelo segmento $\overline{AB}$, pode ser medida com uma trena de maneira que m($\overline{AB}$) = 164 m.

- Observando o esquema indicado na figura, como poderíamos determinar a medida *BC* na realidade? E a medida *AC*?

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA



Já o ângulo $B\hat{A}C$ pode ser medido diretamente usando um teodolito (instrumento de precisão usado para medir ângulos horizontais e verticais): m($B\hat{A}C$) = 75°.

Existem, contudo, muitas situações em que não é possível medir diretamente um ângulo ou a distância entre dois pontos. Um exemplo é a medida da distância entre os pontos *A* (localizado em um extremo da ponte) e *C* (localizado na margem oposta da represa) da figura anterior.

Procurando resolver problemas dessa natureza, os matemáticos estabeleceram importantes relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. A área da Matemática que estuda essas relações é chamada de **Trigonometria**.

A palavra **trigonometria**, de origem grega, significa "medida de triângulos". Embora não tenhamos informações precisas sobre a origem dos estudos trigonométricos, há registros de sua aplicação por babilônios e antigos egípcios, especialmente na Agrimensura e na Astronomia.

Sabe-se que a Trigonometria era usada, por exemplo, para determinar medidas de distâncias que não podiam ser realizadas com instrumentos, como aquelas entre os planetas. Para tais cálculos, eram aplicadas relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo.

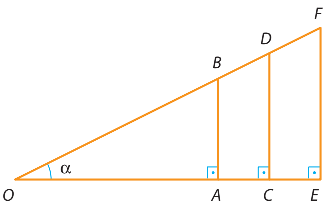
Neste capítulo, estudaremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Seno de um ângulo agudo

Considere a figura ao lado.

Os triângulos retângulos *OAB*, *OCD* e *OEF* são semelhantes pelo caso AA, pois têm em comum o ângulo de medida α (também chamado de ângulo α) e um ângulo reto.

Como os triângulos *OAB* e *OCD* são semelhantes e os lados correspondentes são proporcionais, podemos escrever:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{OA}{OC} = \underbrace{\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}}$$

Os triângulos *OAB* e *OEF* são semelhantes; portanto, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{OA}{OE} = \underbrace{\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}}$$

Observe as duas proporções que foram destacadas: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ e $\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}$

Da propriedade fundamental das proporções, podemos escrever:

$$\frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB} \text{ e } \frac{EF}{OF} = \frac{AB}{OB}$$

Assim, obtemos: $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

Há infinitos outros triângulos retângulos que têm como ângulo interno o ângulo α e que, por isso, também são semelhantes aos triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*.

Para todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa, em uma mesma unidade, é constante. Chamamos essa razão constante de **seno do ângulo α** e a indicamos por **sen α**.

Seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Considerando qualquer um desses triângulos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

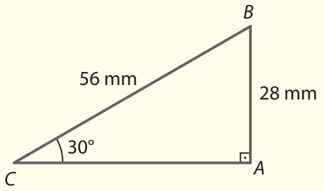
Seno de um ângulo agudo

Peça aos estudantes que descrevam as condições necessárias para dois triângulos serem semelhantes e que expliquem os casos de semelhança de triângulos estudados anteriormente, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA12). Como esse tema foi recordado no capítulo anterior (sobre as relações métricas em um triângulo retângulo), espera-se que esse assunto seja retomado sem dificuldades. Aproveite o momento para verificar se ainda há dúvidas e intervenha quando necessário.

Explore o fato de que os triângulos semelhantes apresentados têm seus lados aumentados (ou diminuídos) proporcionalmente, pois as medidas dos ângulos internos não se alteram, ressaltando que a razão entre a medida do cateto oposto a um dos ângulos internos agudos e a medida da hipotenusa é constante e que esse valor corresponde ao seno do ângulo de medida α.

Exercícios propostos

Na resolução do **exercício 1**, a seguinte construção pode ser feita.

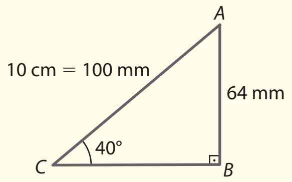


a) Após a construção da figura, o valor da razão solicitada pode ser calculado.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{28}{56} = 0{,}5$$

b) Considerando que o seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa, concluímos que sen 30° = 0,5.

No **exercício 2**, lembre aos estudantes que as medidas encontradas devem ser indicadas na figura construída, como no triângulo a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Pela figura, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{64}{100} = 0{,}64$$

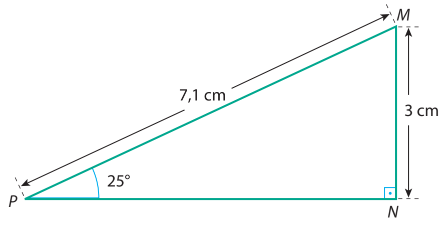
Assim, sen 40° $\simeq$ 0,6.

Como variação desse problema, proponha aos estudantes que construam outras figuras mantendo os ângulos do triângulo e alterando as medidas de seus lados, por exemplo, $AC = 8$ cm. Desse modo, os estudantes poderão constatar que as razões não variam.

Para a resolução do **exercício 3**, espera-se que os estudantes percebam que o valor do seno de um ângulo varia de acordo com a medida do ângulo. Como na variação proposta para o exercício anterior, a razão seno mantém-se constante quando as medidas dos lados dos triângulos variam e as medidas dos ângulos se mantêm as mesmas.

Acompanhe um exemplo.

No triângulo *MNP*, vamos calcular o seno do ângulo interno $\hat{P}$, que mede 25°.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{sen } 25° = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{P}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 25° = \frac{3}{7{,}1}$$

$$\text{sen } 25° \simeq 0{,}42$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Construa um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 30°. Com uma régua, determine as medidas aproximadas, em milímetro, do cateto oposto ao ângulo de 30° e da hipotenusa.

a) Qual é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° e a medida da hipotenusa desse triângulo? **1. a)** 0,5

b) Indique o valor do sen 30°. **1. b)** 0,5

2 Construa um triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{B}$, em que $m(\hat{C}) = 40°$ e $AC = 10$ cm. Com uma régua obtenha, em milímetro, a medida aproximada do cateto $\overline{AB}$.

Qual é o valor, aproximado com uma casa decimal, do sen 40°? **2.** 0,6

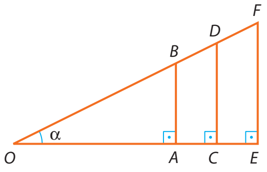
3 O valor do seno de um ângulo varia de acordo com as medidas dos lados do triângulo ou de acordo com a medida do ângulo?
3. Varia de acordo com a medida do ângulo.

Cosseno e tangente de um ângulo agudo

Considere novamente os triângulos retângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*.

Como já observamos, esses triângulos são semelhantes.

De modo análogo ao que fizemos para a razão seno, dessa semelhança, obtemos:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Chamamos essa razão constante de **cosseno do ângulo α** e a indicamos por **cos α**.

Cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Para qualquer um desses triângulos:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Da mesma semelhança, também obtemos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Chamamos essa razão constante de **tangente do ângulo α** e a indicamos por **tg α**.

Tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Considerando qualquer dos triângulos da figura anterior, obtemos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

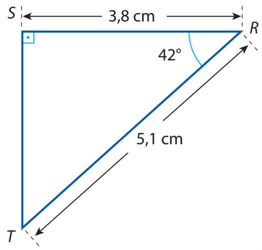
Acompanhe alguns exemplos.

a) No triângulo *RST*, vamos calcular o cosseno do ângulo interno $\hat{R}$, que mede 42°.

$$\cos 42° = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{R}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos 42° = \frac{3{,}8}{5{,}1}$$

$$\cos 42° \simeq 0{,}74$$



b) Vamos calcular a tangente do ângulo interno $\hat{B}$ do triângulo *ABC*.

Inicialmente, aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a medida do segmento *AC*:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

$$(AC)^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2 = 9^2$$

$$(AC)^2 + 45 = 81$$

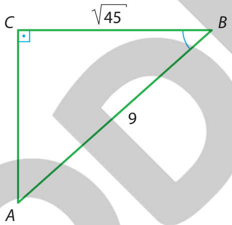
$$(AC)^2 = 36$$

$$AC = 6$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{45}}{45} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{5}}{45} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Portanto: $\text{tg } \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

- O seno e o cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo são números reais positivos menores que 1.
- A tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é um número real positivo.
- Outras razões trigonométricas serão estudadas no Ensino Médio.

Cosseno e tangente de um ângulo agudo

Ressalte que, nos casos das razões trigonométricas cosseno e tangente de um ângulo interno agudo em um triângulo retângulo, também há um valor constante para cada uma dessas razões, em um mesmo ângulo.

Reproduza na lousa as figuras dos exemplos apresentados. No **exemplo a**, peça aos estudantes que obtenham o seno, o cosseno e a tangente dos dois ângulos internos agudos do triângulo. Para isso, eles devem mobilizar conhecimentos construídos anteriormente.

Para determinar a medida do terceiro ângulo interno, os estudantes devem considerar que os ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são ângulos complementares ou, ainda, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (qualquer) é 180°. Desse modo, obterão a medida 48°.

Em seguida, devem aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a medida *ST* do outro cateto ($\simeq$ 3,4 cm) e, assim, obter:

$$\text{sen } 42° \simeq \frac{3{,}4}{5{,}1} \simeq 0{,}67$$

$$\cos 42° = \frac{3{,}8}{5{,}1} \simeq 0{,}75$$

$$\text{tg } 42° \simeq \frac{3{,}4}{3{,}8} \simeq 0{,}89$$

$$\text{sen } 48° = \frac{3{,}8}{5{,}1} \simeq 0{,}75$$

$$\cos 48° \simeq \frac{3{,}4}{5{,}1} \simeq 0{,}67$$

$$\text{tg } 48° \simeq \frac{3{,}8}{3{,}4} \simeq 1{,}12$$

Diante dos cálculos, aproveite para comentar com os estudantes alguns resultados que podem ser observados ou verificados:

- o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu ângulo complementar, e o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu ângulo complementar;
- os valores da tangente para ângulos complementares são números inversos.

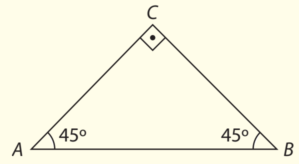
Ressalte que os resultados observados nesse exemplo são válidos para quaisquer pares de ângulos complementares, mas essa conclusão geral deve ser demonstrada.

Exercícios propostos

Este bloco de exercícios explora as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente e suas aplicações. Nesses tipos de exercício, é muito importante verificar os elementos envolvidos para, então, decidir que razão trigonométrica usar.

As resoluções dos **exercícios 5** a **7** e dos **exercícios 9** a **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 4**, os estudantes podem construir um triângulo retângulo como o seguinte.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Medindo os lados do triângulo com uma régua, obtemos: $AB = 5{,}7$ cm; $AC = BC = 4$ cm. Verifique se eles percebem que, nesse caso, o triângulo retângulo é isósceles.

Há infinitas possibilidades de construção de um triângulo retângulo que tenha um ângulo de 45°. Porém é essencial que os estudantes façam os cálculos solicitados e, depois, comparem com os de alguns colegas para observarem que, qualquer que seja o triângulo retângulo em que um dos ângulos internos meça 45°, a resposta de cada item é sempre a mesma.

Esse exercício pode ser ampliado solicitando aos estudantes que determinem o valor aproximado da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 45° e a medida da hipotenusa e, em seguida, o valor aproximado de sen 45°.

a) $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{5{,}7} \simeq 0{,}7$

b) $\cos 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5{,}7} \simeq 0{,}7$

c) $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{4} = 1$

d) $\text{tg } 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{4} = 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

4. Construção de figura. **4. b)** 0,7

4 Construa um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 45°. Com uma régua, determine as medidas aproximadas, em centímetro, dos catetos e da hipotenusa.

4. a) 0,7

a) Qual é o valor aproximado da razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45° e a medida da hipotenusa desse triângulo?

b) Qual é o valor aproximado de cos 45°?

c) Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de 45° e a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45°? **4. c)** 1

d) Qual é o valor de tg 45°? **4. d)** 1

5 Considere o triângulo retângulo a seguir e, usando uma calculadora, obtenha, com aproximação de duas casas decimais:

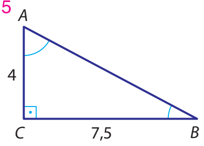
a) medida de $\overline{AB}$; **5. a)** 8,5

b) $\cos \hat{B}$; **5. b)** 0,88

c) $\text{tg } \hat{B}$; **5. c)** 0,53

d) $\cos \hat{A}$; **5. d)** 0,47

e) $\text{tg } \hat{A}$. **5. e)** 1,88



6 Um brinquedo tem uma rampa medindo 64 cm de comprimento, por meio da qual se desloca um carrinho. A parte mais alta da rampa está a 12 cm da horizontal que passa pela parte mais baixa.

a) Faça uma figura representando essa situação. **6. a)** Construção de figura.

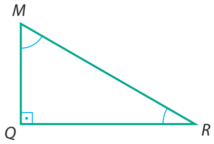
b) Calcule o seno do ângulo que a rampa forma com a horizontal. **6. b)** Aproximadamente 0,19.

7 Considere um papel retangular de medidas 15,6 cm de comprimento por 7,2 cm de largura. Traça-se uma das diagonais desse retângulo. Qual é a tangente do ângulo que a diagonal forma com o lado maior do papel? E a tangente do ângulo que a diagonal forma com o lado menor?

7. Aproximadamente 0,46; aproximadamente 2,17.

8 Justifique a afirmação: “O seno e o cosseno de um ângulo agudo são números reais positivos menores que 1”.

9 No triângulo retângulo *MQR*, determine:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

9. a) $MQ \simeq 1{,}75$ cm, $MR \simeq 3{,}54$ cm e $QR \simeq 3{,}07$ cm.

a) as medidas aproximadas dos lados (use uma régua);

b) as medidas dos ângulos agudos (use um transferidor); **9. b)** $m(\widehat{M}) = 60°$ e $m(\widehat{R}) = 30°$.

c) $\text{sen } \widehat{M}$; **9. c)** Aproximadamente 0,87.

d) $\cos \widehat{M}$; **9. d)** Aproximadamente 0,49.

e) $\text{tg } \widehat{M}$. **9. e)** Aproximadamente 1,75.

10 Desenhe um triângulo retângulo *ABC* de modo que $m(\hat{B}) = 36°$. Determine, com duas casas decimais, o valor aproximado de cada razão.

a) $\text{sen } \hat{B}$ **10. a)** 0,59

b) $\cos \hat{B}$ **10. b)** 0,81

c) $\text{tg } \hat{B}$ **10. c)** 0,73

11 A tampa retangular de uma caixa de madeira mede 32 cm de comprimento por 24 cm de largura. Entre dois cantos diagonalmente opostos da tampa, prende-se um fio esticado. Qual é o cosseno do ângulo $\hat{A}$ que o fio forma com o lado maior da tampa? **11.** $\cos \hat{A} = 0{,}8$

12 Considerando o triângulo *MNP*, determine, com duas casas decimais, o que se pede a seguir.

a) $\text{sen } \widehat{M}$ **12. a)** 0,83

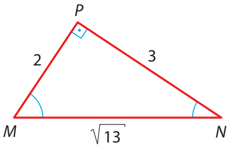
b) $\cos \widehat{N}$ **12. b)** 0,83

c) $\text{tg } \widehat{M}$ **12. c)** 1,50

d) $\cos \widehat{M}$ **12. d)** 0,55

e) $\text{tg } \widehat{N}$ **12. e)** 0,67

f) $\text{sen } \widehat{N}$ **12. f)** 0,55

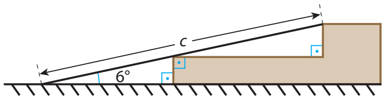


13 (Etec-SP) O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, sendo que cada um mede 16 cm de altura. Para atender a portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa.

Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6°, conforme mostrado na figura.

Dados:

- sen 6° = 0,10
- cos 6° = 0,99



A medida *c* do comprimento da rampa é, em metro, igual a: **13.** Alternativa **e**.

a) 1,8.

b) 2,0.

c) 2,4.

d) 2,9.

e) 3,2.

8. São positivos porque representam razões entre medidas e são menores que 1 porque todo cateto é menor que a hipotenusa.

No **exercício 8**, peça aos estudantes que justifiquem a afirmação oralmente. Como o seno de um ângulo é dado pela razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa, e o cosseno de um ângulo é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa, espera-se que eles concluam que: como seno e cosseno são razões entre duas medidas de comprimento de segmentos de reta, que são necessariamente positivas, as razões serão positivas também; e, como em qualquer triângulo retângulo a medida da hipotenusa é maior que a medida de qualquer um dos catetos, essas razões serão necessariamente menores que 1.

14 Reúna-se com três colegas e façam o que se pede. **14.** Respostas pessoais.

a) Cada um constrói um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, e passa ao colega, que medirá os seus lados e ângulos.

b) Com base nas medidas obtidas no item **a**, calculem o valor de cada uma das expressões:

- $\operatorname{sen}\hat{B} - \cos\hat{C}$ **14. b)** 0
- $\operatorname{sen}\hat{C} - \cos\hat{B}$ **14. b)** 0
- $\operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{C}$ **14. b)** 1
- $\dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} - \operatorname{tg}\hat{B}$ **14. b)** 0
- $\dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}} - \operatorname{tg}\hat{C}$ **14. b)** 0

c) Analisem os valores obtidos em cada expressão do item **b** e respondam às questões:

- O que ocorre com o seno de um ângulo e com o cosseno do seu complementar? **14. c)** Têm o mesmo valor.
- O que ocorre com as tangentes de um ângulo e de seu complementar? **14. c)** Têm valores inversos.
- O que ocorre com a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo e com a tangente desse ângulo? **14. c)** Têm o mesmo valor.

15 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado individualmente por vocês, sobre seno, cosseno ou tangente. O problema pode se referir à necessidade de obter a medida de certa altura ou profundidade cuja situação seja representada por um triângulo retângulo. Forneça dados tais como a medida do ângulo sob o qual a altura/profundidade seja vista, e/ou a medida do afastamento (cateto) e/ou a medida da hipotenusa do triângulo. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **15.** Resposta pessoal.

2 Quadro de razões trigonométricas

As razões trigonométricas são aplicadas na resolução de uma grande variedade de problemas. Para facilitar, reproduzimos mais adiante um quadro dos valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 1° a 89°.

Atribui-se ao astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) o estabelecimento das bases da Trigonometria, e deve-se a ele a construção dos primeiros quadros de razões trigonométricas.

Mais tarde, Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C.), astrônomo, matemático e geógrafo grego, ampliou o trabalho de Hiparco com sua obra *Sintaxe matemática*, na qual apresenta um trabalho sobre Trigonometria.

Os árabes traduziram os treze livros que compunham a obra de Ptolomeu e a intitularam *Almagesto*, que em árabe significa "o maior".

Atualmente, muitas calculadoras fornecem os valores das razões trigonométricas.

Acompanhe como calculamos o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45° usando uma calculadora científica como a da fotografia a seguir:

- sen 45°: sin 4 5 = 0.707106781
- cos 45°: cos 4 5 = 0.707106781
- tg 45°: tan 4 5 = 1

Muitas calculadoras científicas são importadas. Nelas, a tecla sin representa o seno, a tecla cos representa o cosseno, e a tecla tan, a tangente.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA


MAURICE CROOKS/ALAMY/FOTOARENA


Em outras calculadoras, a sequência de teclas a serem pressionadas pode ser diferente.

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

O **exercício 14** é uma proposta a ser realizada em grupo e contribui para que os estudantes descubram algumas relações importantes das razões trigonométricas:

- o seno de um ângulo agudo e o cosseno do seu complementar são iguais;
- a tangente de um ângulo agudo e a tangente do seu complementar são números inversos;
- a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo é igual à tangente desse ângulo.

Essas relações podem ser verificadas para qualquer um dos triângulos retângulos construídos, quaisquer que sejam as medidas dos lados desses triângulos. Assim, é possível concluir que elas são válidas para todos triângulos retângulos.

2. Quadro de razões trigonométricas

Aproveite a introdução ao estudo do quadro de razões trigonométricas para trabalhar o desenvolvimento da **competência geral 1**, mostrando aos estudantes a importância dos conhecimentos historicamente construídos para a compreensão da realidade e para a resolução de problemas práticos. Comente com eles que conceitos de Trigonometria são aplicados na construção civil, nas telecomunicações, na Astronomia, na Medicina e até na Música. É importante destacar também que conhecimentos como esses são desenvolvidos ao longo do tempo, com a contribuição de estudiosos de diferentes lugares e épocas.

Quadro de razões trigonométricas

Com o auxílio de uma calculadora científica, disponível em muitos tipos de celular, peça aos estudantes que verifiquem alguns dos valores dados no quadro de razões trigonométricas. Além disso, é interessante que eles utilizem os dados do quadro para verificar as seguintes afirmações:

- seno e cosseno de ângulos complementares têm valores iguais;

  $\text{sen } 17° = 0{,}2924 = \cos 73°$

  $(17° + 73° = 90°)$

  $\text{sen } 70° = 0{,}9397 = \cos 20°$

  $(70° + 20° = 90°)$

- a tangente de um ângulo agudo e a tangente do seu complementar são números inversos;

  $\text{tg } 83° = 8{,}1443$

  $\text{tg } 7° = \dfrac{1}{8{,}1443} \simeq 0{,}1228$

  $(83° + 7° = 90°)$

- a razão entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo é igual à tangente desse ângulo.

  $\text{sen } 83° = 0{,}9925$

  $\cos 83° = 0{,}1219$

  $\dfrac{\text{sen } 83°}{\cos 83°} = \dfrac{0{,}9925}{0{,}1219} \simeq 8{,}1 \simeq \text{tg } 83°$

QUADRO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Observe alguns exemplos de utilização do quadro de razões trigonométricas. É importante lembrar que os valores desse quadro são aproximações para as razões trigonométricas.

a) Vamos procurar no quadro o seno de 35° e a tangente de 35°.

Na coluna **ângulo**, procuramos 35°.

Na coluna **seno** e na linha 35°, encontramos 0,5736 e, na coluna tangente e na linha 35°, encontramos 0,7002.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	**0,5736**	0,8192	**0,7002**
36°	0,5878	0,8090	0,7265

Portanto, sen 35° = 0,5736 e tg 35° = 0,7002.

b) Vamos procurar no quadro a medida do ângulo que tem cosseno 0,4695.

Na coluna **cosseno**, procuramos o número 0,4695.

Na coluna **ângulo** e na linha cujo cosseno é igual a 0,4695, encontramos 62°. Portanto, cos 62° = 0,4695.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	**0,4695**	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Consulte o quadro de razões trigonométricas para encontrar o valor indicado em cada item.

a) sen 54° **16. a)** 0,8090 d) sen 56° **16. d)** 0,8290
b) cos 36° **16. b)** 0,8090 e) cos 75° **16. e)** 0,2588
c) tg 12° **16. c)** 0,2126 f) tg 89° **16. f)** 57,2900

17 Em cada item, determine x utilizando o quadro de razões trigonométricas.

17. a) 28°
a) sen x = 0,4695 d) sen x = 0,9135
b) cos x = 0,7771 e) cos x = 0,1908
c) tg x = 0,2867 f) tg x = 9,5144

17. b) 39° **17. c)** 16° **17. d)** 66° **17. e)** 79° **17. f)** 84°

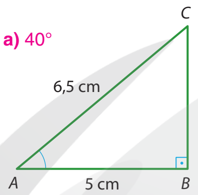
Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

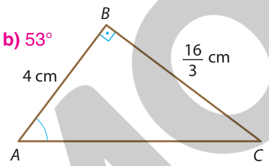
Pense mais um pouco...:

1 Consultando o quadro de razões trigonométricas e sem usar transferidor, determine em cada caso a medida aproximada do ângulo $\hat{A}$.

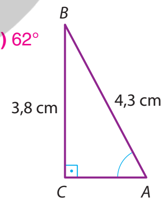
a)
1. a) 40°



b)
1. b) 53°



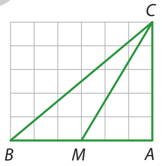
c)
1. c) 62°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2 Determine, consultando o quadro de razões trigonométricas e sem usar transferidor, as medidas aproximadas, em grau, dos ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{M}C$ e $B\hat{C}M$.

2. $m(A\hat{B}C) \simeq 40°$;
$m(B\hat{M}C) \simeq 121°$;
$m(B\hat{C}M) \simeq 19°$



Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 16** e **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Pense mais um pouco...

Segue uma possível resolução para a **atividade 1**.

a) Como são conhecidas as medidas do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$ e da hipotenusa, podemos usar a razão trigonométrica cosseno.

$$\cos \hat{A} = \frac{5}{6,5} \simeq 0,77$$

De acordo com o quadro de razões trigonométricas da página 204, a medida do ângulo $\hat{A}$ é 40° (note que cos 39° ≃ 0,78).

b) Agora são conhecidas as medidas dos catetos, por isso usaremos a razão trigonométrica tangente.

$$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{4}{3} = 1,333333... \simeq 1,33$$

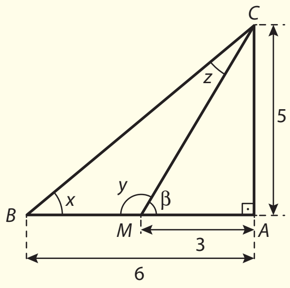
De acordo com o quadro de razões trigonométricas, a medida do ângulo $\hat{A}$ é 53°.

c) Nesse caso, temos as medidas do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ e da hipotenusa; então, vamos usar a razão trigonométrica seno.

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{3,8}{4,3} \simeq 0,88$$

De acordo com o quadro de razões trigonométricas, a medida do ângulo $\hat{A}$ é 62°.

Para a resolução da **atividade 2**, tomando como unidade de medida o comprimento do lado de cada quadradinho do quadriculado, vamos construir a seguinte figura.



REINALDO VIGNATI/ ARQUIVO DA EDITORA

Fazendo $m(A\hat{B}C) = x$, $m(B\hat{M}C) = y$ e $m(B\hat{C}M) = z$, temos:

$$\text{tg}\,x = \frac{5}{6} \simeq 0,83$$

Logo, $x \simeq 40°$.

Para encontrar o valor de y, devemos obter o valor de β, pois $y + \beta = 180°$.

$$\text{tg}\,\beta = \frac{5}{3} \simeq 1,67$$

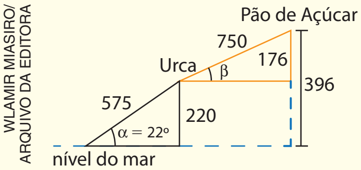
Logo, $\beta \simeq 59°$. Portanto: $y = 180° - 59° = 121°$

Assim, temos:

$$x + y + z = 180° \Rightarrow 40° + 121° + z = 180° \Rightarrow z = 19°$$

Para saber mais

Se os estudantes tiverem dificuldades na resolução da atividade do **Agora é com você!**, pode ser interessante mostrar a eles a construção da seguinte figura na lousa.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Do morro da Urca até o morro Pão de Açúcar, na segunda etapa do percurso, para o triângulo formado são dadas as medidas do cateto oposto a β e da hipotenusa. Assim, vamos usar a razão trigonométrica seno.

$$\text{sen}\ \beta = \frac{176}{750} \simeq 0{,}23$$

Logo, $\beta \simeq 13°$.

3. Resolução de problemas que envolvem triângulos retângulos

Aqui são apresentadas algumas situações de aplicação das razões trigonométricas estudadas.

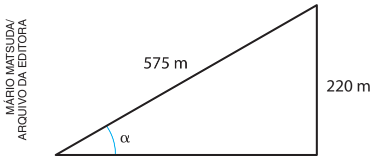
Solicite aos estudantes que leiam com atenção para identificar o que é dado e o que é pedido e assim determinar qual razão trigonométrica utilizar. Destaque que, em problemas como o descrito na **situação 1**, não se deve esquecer de adicionar a medida da altura dos olhos do observador em relação ao solo.

PARA SABER MAIS

Ângulos da cidade maravilhosa

Na abertura do capítulo, pudemos observar o maior teleférico do mundo, que fica na montanha Tianmen, na China.

No Brasil, o trajeto do bondinho do Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, tem duas etapas. Na primeira etapa, da subida da praia Vermelha para o morro da Urca, a extensão do cabo mede 575 metros e eleva-se da altitude próxima de 0 até 220 metros. Com esses dados, podemos obter a medida aproximada α do ângulo que o cabo forma com a horizontal. Observe o esquema.



MÁRIO MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

KAROL KOZLOWSKI/ IMAGEBROKER/FOTOARENA

Bondinho do teleférico no Rio de Janeiro (RJ). (Fotografia de 2017.)

Calculando o sen α, obtemos: $\text{sen}\ \alpha = \frac{220}{575} \simeq 0{,}38$

Consultando o quadro de razões trigonométricas, encontramos $\alpha \simeq 22°$.

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Na segunda etapa do trajeto, do morro da Urca ao morro Pão de Açúcar, com extensão que mede 750 m, o bondinho eleva-se a uma altitude que mede 396 m. Calcule a medida aproximada β do ângulo de inclinação do cabo do teleférico dessa etapa. Lembre-se de descontar a altitude do morro da Urca.

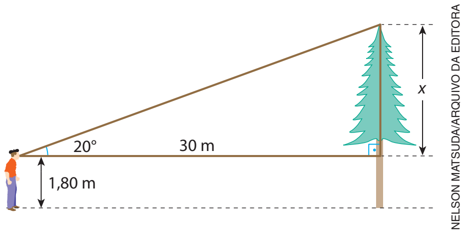
A medida do ângulo de inclinação do cabo do teleférico nessa etapa é aproximadamente 13°.

3 Resolução de problemas que envolvem triângulos retângulos

Observe algumas situações envolvendo triângulos retângulos em que podemos aplicar as razões trigonométricas estudadas.

Situação 1

Uma pessoa observa o ponto mais alto de uma árvore sob um ângulo de 20° em relação à horizontal, conforme a situação representada na figura. Vamos calcular a medida da altura dessa árvore.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Do triângulo retângulo representado na figura, obtemos:

- a medida do cateto adjacente ao ângulo de 20°: 30 m;
- a medida do cateto oposto ao ângulo de 20°: x.

Como conhecemos a medida do cateto adjacente e queremos determinar a medida do cateto oposto ao ângulo de 20°, vamos aplicar a razão trigonométrica definida por esses dois lados do triângulo, isto é, a tangente. Usando o valor aproximado com duas casas decimais, obtemos tg 20° = 0,36.

$$\text{tg } 20° = \frac{x}{30}$$

$$0{,}36 = \frac{x}{30}$$

$$x = 10{,}8$$

Para determinar a medida da altura da árvore, precisamos adicionar a altura dos olhos da pessoa que a observa, que é 1,80 m: $x + 1{,}80 = 10{,}8 + 1{,}80 = 12{,}60$.

Portanto, a medida da altura dessa árvore é 12,60 m.

Situação 2

Os bombeiros são chamados para tirar um gato de cima de uma árvore. Eles apoiam na árvore uma escada, formando com o chão um ângulo de 68°, cuja base dista 1,4 m do tronco. Qual é a medida do comprimento aproximado dessa escada?

Do triângulo retângulo da figura, obtemos:

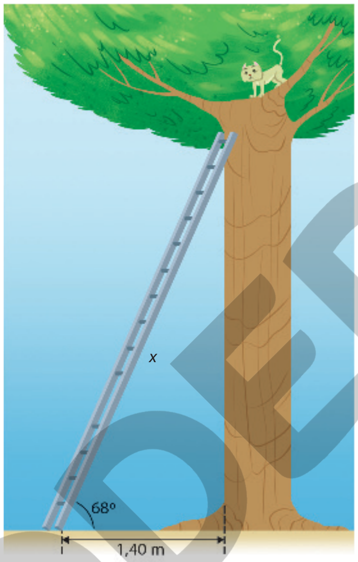
- a medida da distância da base da escada ao tronco (cateto adjacente ao ângulo de 68°): 1,4 m;
- a medida do comprimento da escada (hipotenusa): *x*.

Como conhecemos a medida do cateto adjacente e queremos determinar a medida da hipotenusa, vamos aplicar a razão trigonométrica definida por esses dois lados do triângulo, isto é, o cosseno. Usando o valor aproximado com duas casas decimais, obtemos cos 68° = 0,37.

$$\cos 68° = \frac{1{,}4}{x}$$

$$0{,}37 = \frac{1{,}4}{x}$$

$$x = \frac{1{,}4}{0{,}37} \simeq 3{,}8$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

O comprimento da escada mede aproximadamente 3,8 metros.

- Se uma escada fosse apoiada à distância de 1,4 m de uma árvore e, assim, formasse um ângulo de 60° com o solo, o comprimento dessa escada seria maior ou menor do que 3,8 m?

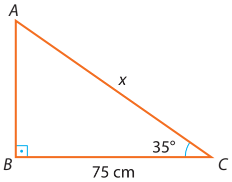
Espera-se que os estudantes percebam que, em relação à **situação 2**, como a medida de 1,4 m é mantida e 60° < 68°, o comprimento da escada (medida da hipotenusa na representação esquemática da situação) seria menor.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18 Retome o esquema da represa (apresentado na página 198) e calcule a medida da distância aproximada do ponto *A* ao ponto *C*. **18.** Aproximadamente 634 m.

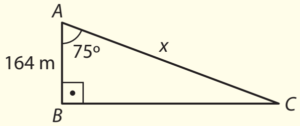
19 Usando valores das razões trigonométricas com duas casas decimais, calcule o valor aproximado de *x* no triângulo retângulo *ABC* ao lado. **19.** 91,46 cm



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Para auxiliar na resolução do **exercício 18**, a seguinte figura pode ser construída.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Como os dados envolvidos são as medidas do cateto adjacente ao ângulo de 75° e da hipotenusa, vamos aplicar a razão trigonométrica cosseno.

$$\cos 75° = \frac{164}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}2588 = \frac{164}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{164}{0{,}2588} \simeq 634$$

Logo, a distância aproximada de *A* até *C* mede 634 m.

Lembre os estudantes de consultar o quadro de razões trigonométricas para determinar o valor do cosseno de 75°.

A seguir, apresentamos uma possível resolução para o **exercício 19**.

Como é dada a medida do cateto adjacente ao ângulo de 35° e *x* representa a medida da hipotenusa, vamos aplicar a relação trigonométrica cosseno.

$$\cos 35° = \frac{75}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}82 = \frac{75}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}82x = 75 \Rightarrow$$

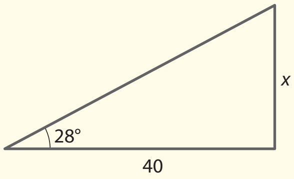
$$\Rightarrow x = \frac{75}{0{,}82}\, x \simeq 91{,}46$$

Portanto, o valor aproximado de *x* é 91,46 cm.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** a **22** e do **exercício 24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 23**, verifique se os estudantes interpretam adequadamente a medida 1,60 m da ilustração. Essa medida indica a distância dos olhos do observador ao chão e, portanto, deve ser considerada para determinar a altura aproximada da torre. Veja uma possível resolução.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Considerando as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo de 28°, vamos usar a razão trigonométrica tangente.

$$\text{tg } 28° = \frac{x}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}5317 = \frac{x}{40} \Rightarrow x \simeq 21{,}3$$

Fazemos, então:

$21{,}3 + 1{,}6 = 22{,}9$

Portanto, a medida da altura da torre será de aproximadamente 22,9 metros.

Para o **exercício 25**, apresentamos a seguinte resolução:

$$\text{sen } 17° = \frac{700}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}2924 = \frac{700}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}2924x = 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{700}{0{,}2924} \Rightarrow x \simeq 2.394$$

Logo, a medida da distância percorrida pelo gavião é aproximadamente 2.394 m.

O **exercício 26** deve ser resolvido em grupo. A pesquisa proposta conduz os estudantes à descoberta da relação fundamental da Trigonometria:

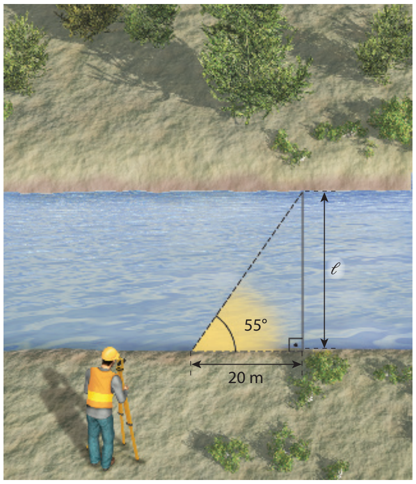
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$

Essa atividade constitui uma primeira abordagem da relação fundamental da Trigonometria, que será estudada com mais detalhes no Ensino Médio.

---

20 Para determinar a medida aproximada da largura de um rio, André mediu com um teodolito o ângulo indicado na figura a seguir.

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

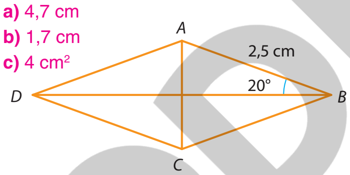


Qual é a medida aproximada, em metro, da largura do rio? **20.** 28,562 m

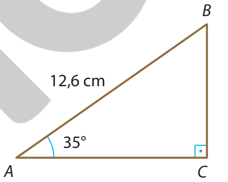
21 Para o losango *ABCD*, determine:

a) a medida aproximada da diagonal maior;
b) a medida aproximada da diagonal menor;
c) a medida aproximada da área do losango.

21. a) 4,7 cm
21. b) 1,7 cm
21. c) 4 cm²



22 Considere o triângulo retângulo *ABC* e faça o que se pede.

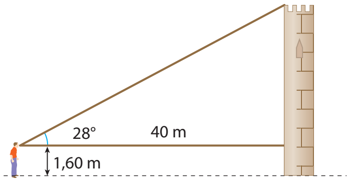


a) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}$? **22. a)** 55°
b) Calcule a medida aproximada do cateto $\overline{BC}$.
c) Determine a medida aproximada da área desse triângulo. **22. c)** 37,1 cm²

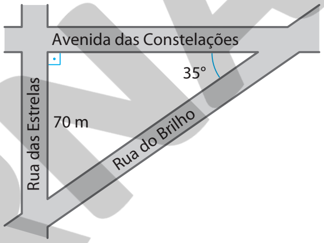
22. b) 7,2 cm

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

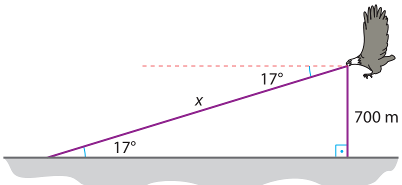
23 Um observador vê o ponto mais alto de uma torre sob um ângulo de 28°, conforme a figura a seguir. Calcule a medida aproximada da altura dessa torre. **23.** 22,9 m



24 Observando a representação a seguir, calcule quanto mede, aproximadamente, o trecho da avenida das Constelações entre a rua do Brilho e a rua das Estrelas. **24.** 100 m



25 Um gavião, a 700 m de altura, avista uma presa no chão; faz uma descida de 17° em relação à horizontal e consegue capturá-la. Quanto o gavião percorreu para capturar essa presa? **25.** 2 394 m



26 Reúna-se com um colega e façam o que se pede. **26. a)** Os valores devem ser próximos de 1.

a) Cada um escolhe cinco medidas de 1° a 89° para que o outro calcule, usando o quadro de razões trigonométricas e uma calculadora, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de cada uma das medidas escolhidas.
b) Arredondando os resultados obtidos no item anterior, qual é o valor do quadrado do seno de um ângulo mais o quadrado do cosseno do mesmo ângulo? **26. b)** 1

Pense mais um pouco...

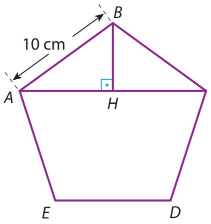
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Considerando que a figura *ABCDE* é um pentágono regular e *H* é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$, calcule:

a) m($A\hat{B}C$) e m($A\hat{B}H$); **1. a)** 108°; 54°

b) as medidas aproximadas de $\overline{AH}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$. **1. b)** 8,09 cm; 16,18 cm; 16,18 cm

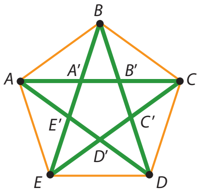


NELSON MATSUDA

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

2 No início do **capítulo 8** aprendemos que o emblema da sociedade secreta formada pelos pitagóricos era um pentagrama.

a) No pentágono regular *ABCDE*, podemos perceber que suas diagonais formam o pentagrama. Sendo *AB* = 10 cm, calcule a razão $\frac{AC}{AB}$. **2. a)** 1,618



b) Tendo por base o pentágono *ABCDE* do item **a**, também podemos obter o pentagrama, se prolongarmos os seus lados. Considerando o pentagrama da figura 1, calcule: **2. b)** 16,18 cm; 26,18 cm; 1,618

- *AJ*
- *JE*
- $\frac{JE}{AJ}$

c) Na figura 1, podemos traçar $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JF}$ e obter um novo pentágono regular.

Dessa maneira, calcule: *JF*, *JH* e $\frac{JH}{JF}$.
2. c) 26,18 cm; 42,36 cm; 1,618

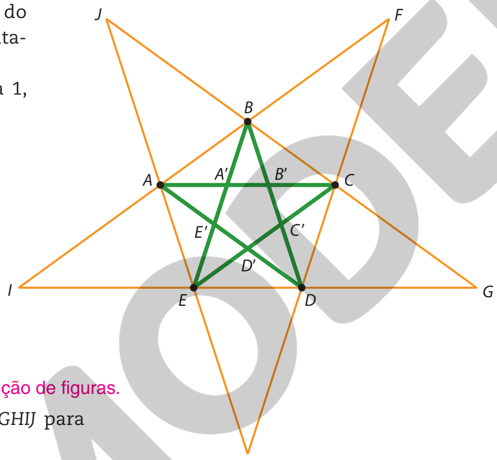


Figura 1

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

d) Copie a figura 1 e siga estes passos:

- trace o pentágono *FGHIJ*; **2. d)** Construção de figuras.
- prolongue os lados do pentágono *FGHIJ* para obter um pentagrama;
- trace as diagonais do pentágono *A'B'C'D'E'* para obter um pentagrama.

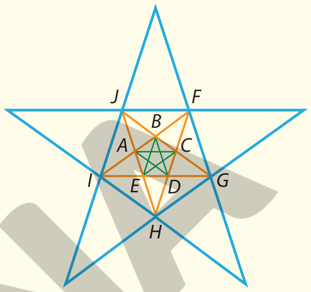
e) Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

As razões $\frac{AC}{AB}$, $\frac{JE}{AJ}$ e $\frac{JH}{JF}$ são iguais a um mesmo número irracional, conhecido como **número de ouro**, do qual vocês já obtiveram um valor aproximado. Pesquisem informações a respeito desse número e façam um resumo de sua pesquisa. **2. e)** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

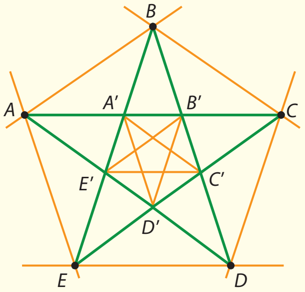
As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Para a resolução do **item d** da **atividade 2**, proponha aos estudantes que tracem o pentágono *FGHIJ*, a partir do pentagrama do **item b**, e depois prolonguem os seus lados formando o pentagrama a seguir.



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, eles devem traçar as diagonais do pentágono *A'B'C'D'E'*, formando outro pentagrama, como mostra a figura a seguir.



Para saber mais

Esta seção apresenta o teodolito, instrumento usado para medição de ângulos. O procedimento descrito para a construção de um teodolito simples pode ser realizado com os estudantes em sala de aula. Depois, seguindo as indicações do texto, proponha a eles que experimentem realizar algumas medições usando o instrumento construído.

PARA SABER MAIS

O teodolito

Instrumento de medição de ângulos, o teodolito é usado geralmente por **agrimensores** e construtores para calcular medidas de grandes distâncias ou de alturas inacessíveis. Para efetuar as medições com esse instrumento, o profissional utiliza-se do conceito de tangente de um ângulo agudo.


DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Medição de ângulos feita com teodolito em uma obra, Fortaleza (CE). (Fotografia de 2013.)

> **Agrimensor:** profissional legalmente habilitado para medir e demarcar terras ou propriedades rurais.

Vamos aprender a construir um teodolito?

- **Construção de um teodolito "caseiro"**

Material

- papelão grosso (10 cm × 15 cm);
- barbante (medindo cerca de 20 cm);
- um canudo de papel;
- um peso (moeda ou argola de metal);
- imagem (cópia xerográfica) de um transferidor de 180°;
- fita adesiva;
- cola.

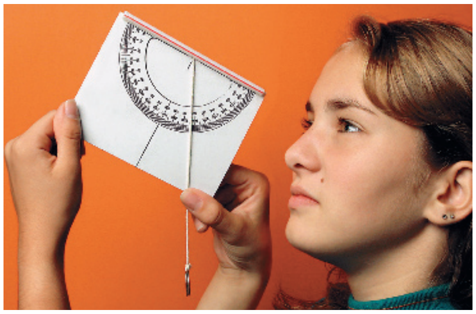
Como construir

- Com a fita adesiva, prenda o canudo em uma das bordas de 15 cm do papelão.
- Cole a imagem do transferidor logo abaixo do canudo.
- Prenda o peso em uma das extremidades do barbante.
- Com cuidado, faça um pequeno furo, transpassando o papelão bem no encontro da linha de fé do transferidor (linha 0°/180°) com a linha perpendicular que marca 90°.
- Passe por esse furo a outra extremidade do barbante, deixando o restante no mesmo lado em que está a imagem do transferidor e dê um nó bem firme.

Como fazer a medição

Agora, vamos experimentar o instrumento para cálculos de medida de grandes alturas. Para isso, necessitamos de uma trena (ou de uma fita métrica ou de um metro articulado).

- Afaste-se de um poste de iluminação, meça sua distância (*d*) até ele e anote (corresponde ao cateto adjacente).
- Olhe pelo orifício do canudo até enxergar o topo do poste (que corresponde ao cateto oposto).
- Segure o barbante com o peso na posição em que ele parou.


EDUARDO SANTALIESTRA

Adolescente utilizando um teodolito "caseiro".

- Anote a medida do ângulo determinado pelo barbante (na posição horizontal, o ângulo marcado mede 90°).
- Procure, no quadro de razões trigonométricas, a tangente do seu ângulo de visão, cuja medida é 90° menos o valor anotado. Essa tangente é a razão entre *h* e *d*, em que *h* é a diferença entre a medida da altura do poste (*H*) e a do olho do observador.

Faça os cálculos e determine *H*, que é a medida da altura do poste. Não se esqueça de que *H* é igual à medida *h* adicionada à altura dos olhos do observador.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Paulo usa um teodolito "caseiro" para calcular a medida da altura de uma torre. O ângulo de visão de Paulo ao topo dela é de 45°, ele está a 3,5 m dela e seus olhos estão a 1,25 m do chão. Qual é a altura da torre? **1.** 4,75 m

2 Ainda treinando o uso de seu teodolito, Paulo observou o topo de um poste de 7 m, sob um ângulo de visão de 15°. Qual é a distância aproximada de Paulo até o poste?
2. Aproximadamente 21,5 m.

4 Razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°

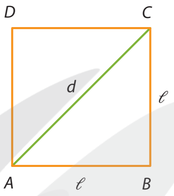
Estudamos que os valores das razões **seno**, **cosseno** e **tangente** podem ser encontrados no quadro de razões trigonométricas ou obtidos com uma calculadora científica.

Mas os valores encontrados dessas duas maneiras não são valores exatos, exceto os valores para sen 30º, cos 60º e tg 45º.

No entanto, os valores exatos das razões seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° são facilmente calculados, como verificaremos a seguir.

Razões trigonométricas do ângulo de 45°

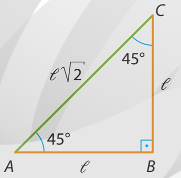
Considere o quadrado *ABCD*. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, obtemos:



$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$
$$\ell^2 + \ell^2 = d^2$$
$$\ell\sqrt{2} = d \quad \text{ou} \quad d = \ell\sqrt{2}$$

A diagonal $\overline{AC}$ mede $\ell\sqrt{2}$.

Destacando o triângulo *ABC*, obtemos:



$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}}$	$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell}$
$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$	**tg 45° = 1**
$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$**	

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

4. Razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°

Habilidade da BNCC: **EF09MA14**.

Neste tópico, os estudantes aprenderão como calcular os valores exatos das razões seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30°, 45° e 60°, e aplicarão essas razões trigonométricas na resolução de problemas em diferentes contextos.

Para determinar os valores exatos das razões trigonométricas desses ângulos, aplicaremos o teorema de Pitágoras, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA14). Além disso, essa habilidade será desenvolvida com a resolução de alguns dos exercícios propostos.

Razões trigonométricas do ângulo de 45°

Antes de apresentar o conteúdo descrito no livro, proponha aos estudantes o cálculo das razões trigonométricas do ângulo de 45° sem utilizar o quadro de razões trigonométricas, tomando como base um quadrado de lado ℓ. Estimule-os a obter um triângulo retângulo conveniente, que tenha elementos conhecidos e o ângulo de 45° como um dos ângulos internos.

Espera-se que eles percebam que o triângulo retângulo deve ser formado pela diagonal do quadrado e dois de seus lados. Assim, verifique se eles usam a relação $d = \ell\sqrt{2}$, estudada no capítulo anterior, ou se determinam a medida *d* da diagonal aplicando o teorema de Pitágoras.

Ao efetuar os cálculos, os estudantes devem perceber que a medida ℓ do quadrado não é importante, pois cada razão trigonométrica sempre terá o mesmo valor para qualquer quadrado.

Em seguida, peça a eles que leiam e acompanhem o desenvolvimento apresentado neste tópico para compararem com o que fizeram.

Razões trigonométricas do ângulo de 30°

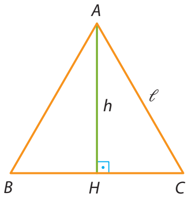
Para obter as razões trigonométricas do ângulo de 30°, proceda de modo análogo ao que foi feito no ângulo de 45°. Proponha aos estudantes que determinem essas razões sem utilizar o quadro de razões trigonométricas, tomando por base um triângulo equilátero de lado de medida ℓ. O triângulo retângulo a ser considerado é formado por uma das alturas. Nesse caso, os estudantes devem mobilizar conhecimentos construídos anteriormente sobre as cevianas de um triângulo, lembrando que, em qualquer triângulo equilátero, a altura, a bissetriz e a mediana coincidem.

Verifique se eles utilizam a relação $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, trabalhada no capítulo anterior.

Comente com os estudantes que esse procedimento também pode ser aplicado para a obtenção das razões trigonométricas do ângulo de 60°.

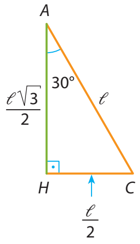
Razões trigonométricas do ângulo de 30°

Considere agora o triângulo equilátero *ABC*, com lado de medida ℓ.



Já sabemos que a altura $\overline{AH}$ do triângulo mede $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Destacando do triângulo *ABC* o triângulo *AHC*, obtemos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$

$$\mathbf{sen\ 30° = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$$

$$\cos 30° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$

$$\mathbf{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

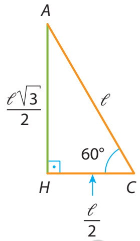
$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Razões trigonométricas do ângulo de 60°

Destacando novamente o triângulo *AHC* da figura anterior, obtemos:



$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$

$$\mathbf{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell}$$

$$\cos 60° = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell}$$

$$\mathbf{cos\ 60° = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell}$$

$$\mathbf{tg\ 60° = \sqrt{3}}$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, vamos organizar em um quadro todos os valores obtidos:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

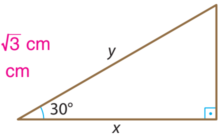
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Usando as razões trigonométricas, calcule o valor de x e de y nos triângulos retângulos.

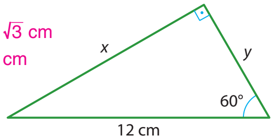
a)

27. a) $x = 10\sqrt{3}$ cm
$y = 20$ cm

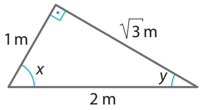


b)

27. b) $x = 6\sqrt{3}$ cm
$y = 6$ cm

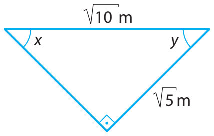


c)



27. c) $x = 60°$
$y = 30°$

d)



27. d) $x = 45°$
$y = 45°$

28 (UFV-MG) O cosseno do ângulo α, assinalado na figura abaixo, é: **28.** Alternativa **d**.

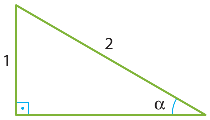
a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



29 O lado não perpendicular às bases de um trapézio retângulo forma com a base maior um ângulo de 45°. Considerando que as bases medem 12 cm e 9 cm, determine:

a) a medida da altura; **29. a)** 3 cm

b) a medida do lado não perpendicular às bases. **29. b)** $3\sqrt{2}$ cm

30 Construa um losango em que uma das diagonais meça 12 cm e forme com um dos lados um ângulo de 30°. Determine:

a) a medida da outra diagonal; **30. a)** $4\sqrt{3}$ cm

b) a medida do lado do losango. **30. b)** $4\sqrt{3}$ cm

31 Um poste cilíndrico cujo diâmetro da base mede 0,40 m projeta uma sombra de 5,6 m no momento em que os raios solares determinam um ângulo de 45° com a vertical.

31. a) 5,6 m **31. b)** Não.

a) Quanto mede a altura desse poste?

b) Para o cálculo do item **a**, foi preciso usar a medida 0,40 m?

32 Uma das alturas de um triângulo equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do lado desse triângulo. **32.** 4 cm

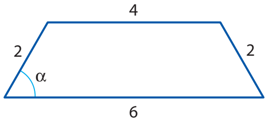
33 Em um trapézio isósceles, os lados não paralelos formam com a base maior ângulos de 60°. Se as bases medem 28 cm e 20 cm, então:

a) qual é a medida do perímetro do trapézio?

b) qual é a medida da área do trapézio?

33. a) 64 cm **33. b)** $96\sqrt{3}$ cm²

34 (UCSal-BA) Na figura abaixo, tem-se um trapézio isósceles cujos lados têm as medidas indicadas. **34.** Alternativa **a**.



A medida do ângulo assinalado é:

a) 60°.

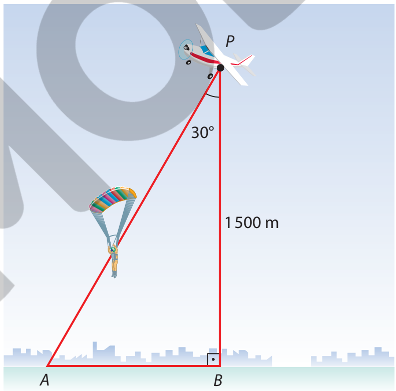
b) 45°.

c) 30°.

d) 22°30'.

e) 15°.

35 Um paraquedista salta de um avião que voa a 1 500 m de altura. Devido à velocidade do avião e à ação do vento, o paraquedista faz um percurso aproximado conforme indica o segmento $\overline{PA}$. A que medida de distância do ponto B o paraquedista cai? **35.** $500\sqrt{3}$ m



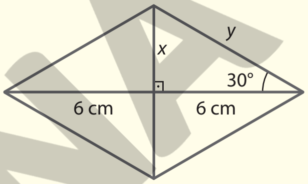
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 27** a **29**, do **exercício 31** e dos **exercícios 33** a **35** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 30**, os estudantes devem considerar o fato de que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se intersectam no ponto médio. Caso julgue necessário, faça uma breve revisão das propriedades dos paralelogramos.

Acompanhe uma possível resolução para esse exercício.



a) $\text{tg } 30° = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

Logo, a outra diagonal mede $4\sqrt{3}$ cm $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$.

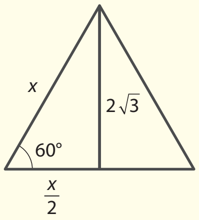
b) $\text{sen } 30° = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3}$

Logo, o lado do losango mede $4\sqrt{3}$ cm.

Ao resolver o **exercício 31**, espera-se que os estudantes percebam que existem dados a mais do que os que eles precisam utilizar.

Para a resolução do **exercício 32**, eles podem usar as razões trigonométricas ou o teorema de Pitágoras, considerando as propriedades de um triângulo equilátero.



Aplicando as razões trigonométricas:

$$\text{sen } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 4$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, os estudantes podem desenvolver a habilidade (EF09MA14).

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 12 \Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = 12 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, o lado desse triângulo mede 4 cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC:
EF09MA21.

A seção explora gráficos que apresentam algum tipo de distorção. Amplie o trabalho propondo aos estudantes a análise de outros gráficos publicados em diferentes mídias (como jornais impressos, revistas, artigos publicados na internet), discutindo o significado dos dados apresentados e as possíveis distorções, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA21).

Peça aos estudantes que observem os gráficos 1 a 4 e escrevam conclusões sobre eles. Por exemplo, podem comparar os gráficos 1 e 3 e observar que a expectativa de anos de estudo ficou sempre acima da média, em todos os anos. Além disso, ainda nessa comparação, eles podem perceber que o gráfico 3 mostra que a média de anos de estudo sempre cresceu ao longo desses 25 anos, mesmo que esse crescimento tenha sido pequeno; já o gráfico 1 mostra que houve período de decrescimento e de estagnação da expectativa de anos de estudo ao longo dos 25 anos.

No entanto, o mais importante é verificar se os estudantes percebem que esses gráficos apresentam erro de escala, pois no eixo horizontal utilizam a mesma unidade para intervalos diferentes de tempo. Note que, até 2010, cada unidade corresponde a 5 anos, mas, de 2010 a 2015, a unidade passa a corresponder a 1 ano, o que poderia levá-los a fazer interpretações equivocadas.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Gráficos com distorção

Pela primeira vez na série histórica, em 2017, o Brasil ficou estagnado (79ª posição) no Índice de Desenvolvimento Humano, com o indicador de 0,754.

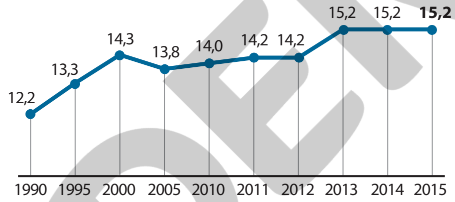
O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida composta de indicadores de três dimensões do desenvolvimento humano: longevidade, educação e renda. Ele varia de 0 a 1; **quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano**. São quatro classificações: baixo, médio, alto e muito alto.

O **Relatório de Desenvolvimento Humano 2016** da ONU (Organização das Nações Unidas) mostra que, em 2015, o Brasil apresentou uma discreta melhora em relação a 2014 em alguns aspectos, como: expectativa de vida (de 74,5 para 74,7 anos) e média de anos de estudo (de 7,7 para 7,8 anos). Porém, o país estagnou na marca de 15,2 anos na expectativa de anos de estudo.

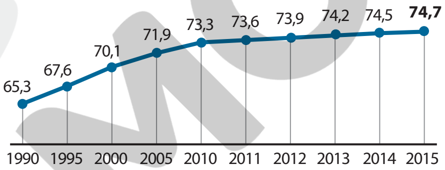
Podemos ler essa situação nos gráficos a seguir. Porém, para essa leitura, observe atentamente estes gráficos.

ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

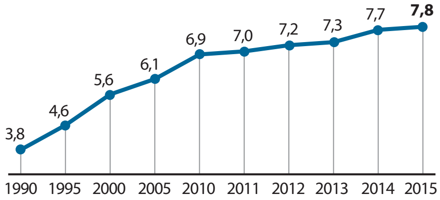
1. Expectativa de anos de estudo



2. Expectativa de vida ao nascer

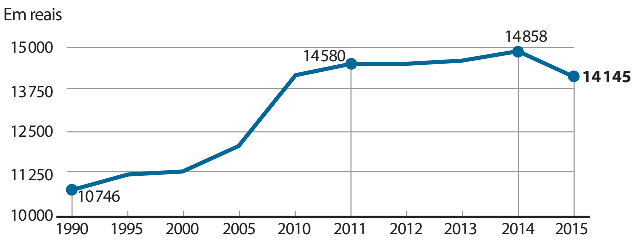


3. Média de anos de estudo



Dados dos gráficos 1, 2 e 3 obtidos em: LABORATÓRIO de Demografia e Estudos Populacionais. **Relatório do PNUD destaca grupos sociais que não se beneficiam do desenvolvimento humano**. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 21 mar. 2017. Disponível em: https://www.ufjf.br/ladem/2017/03/22/relatorio-do-pnud-destaca-grupos-sociais-que-nao-se-beneficiam-do-desenvolvimento-humano/. Acesso em: 4 jul. 2022.

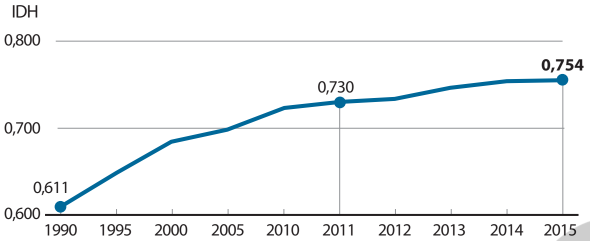
4. Renda Nacional Bruta *per capita* (PPS)



Dados obtidos em: LABORATÓRIO de Demografia e Estudos Populacionais. **Relatório do PNUD destaca grupos sociais que não se beneficiam do desenvolvimento humano**. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 21 mar. 2017. Disponível em: https://www.ufjf.br/ladem/2017/03/22/relatorio-do-pnud-destaca-grupos-sociais-que-nao-se-beneficiam-do-desenvolvimento-humano/. Acesso em: 4 jul. 2022.

Os quatro gráficos anteriores podem ser resumidos no gráfico a seguir.

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)



Dados obtidos em: LABORATÓRIO de Demografia e Estudos Populacionais. **Relatório do PNUD destaca grupos sociais que não se beneficiam do desenvolvimento humano**. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 21 mar. 2017. Disponível em: https://www.ufjf.br/ladem/2017/03/22/relatorio-do-pnud-destaca-grupos-sociais-que-nao-se-beneficiam-do-desenvolvimento-humano/. Acesso em: 4 jul. 2022.

ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em um gráfico de linha que preserva a escala nos eixos, isto é, em que a unidade é uniforme em cada eixo, ao caminhar da esquerda para a direita, a maior inclinação da linha indica maior variação na grandeza do eixo vertical. Identifique, em cada um dos quatro primeiros gráficos, o período em que houve a maior evolução. **1.** Resposta neste *Manual*.

2 Refaça os gráficos dados com espaçamentos horizontais iguais para períodos de tempo iguais, por exemplo, 1 cm para cada ano. Responda novamente à atividade **1**. As suas respostas são as mesmas? Por quê? **2.** Resposta neste *Manual*.

3 Em sua opinião, os gráficos de linha divulgados na mídia (jornais, revistas, internet, TV etc.) devem aplicar unidades uniformes nos eixos? **3.** Resposta pessoal.

Agora quem trabalha é você!

Se os estudantes não perceberam antes a distorção dos gráficos apresentados, durante a resolução das atividades encoraje-os a explicar o que ocorre com a escala do eixo horizontal. Esse tipo de distorção interfere na resposta à **atividade 1**. No gráfico 1, a maior evolução se deu de 2010 a 2015, obedecendo à escala de 5 em 5 anos, o que não é percebido ao visualizar o gráfico com a distorção apresentada. No gráfico 2, a maior evolução se deu de 1995 a 2000. No gráfico 3, a maior evolução se deu de 1995 a 2000. No gráfico 4, a maior evolução se deu de 2005 a 2010.

Na **atividade 2**, os estudantes devem perceber que há distorção nos gráficos dados e agora pode obter respostas corretas. São elas: gráfico 1 – de 2012 a 2013; gráfico 2 – de 1995 a 2000 (0,5 por ano); gráfico 3 – de 2013 a 2014; gráfico 4 – de 2005 a 2010. As respostas nem sempre são as mesmas porque as escalas dos eixos horizontais dos gráficos dados não são uniformes.

Amplie o trabalho com a **atividade 3** propondo à turma a análise de outros gráficos e discutindo o que ocorre com eles. Reforce a importância dos gráficos em nosso dia a dia e como a construção incorreta deles (propositalmente ou não) pode ter consequências graves, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA21).

Exercícios complementares

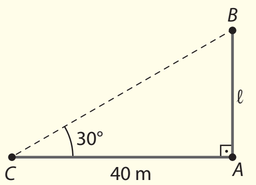
Este bloco de exercícios tem como objetivo a retomada e a aplicação dos conceitos tratados no capítulo.

Proponha aos estudantes que refaçam atividades anteriores relacionadas aos assuntos em que ainda apresentem alguma dúvida. Revisitar conceitos e estratégias estudados anteriormente pode contribuir para o aprendizado dos estudantes.

As resoluções dos **exercícios 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 6**, destaque que há dados além dos necessários para a resolução do problema. Já no **exercício 7**, não há dados suficientes para o cálculo da medida do volume do muro.

A figura a seguir representa um esquema da situação descrita no **exercício 9**.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

a) $\text{tg } 30° = \dfrac{\ell}{40} \Rightarrow \ell = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$ m

b) Para $\sqrt{3} = 1{,}73$, temos:

$$\ell = \frac{40}{3} \cdot 1{,}73 \simeq 23$$

Logo, a medida aproximada da largura do rio é 23 m.

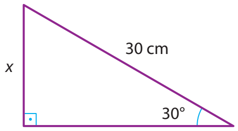
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

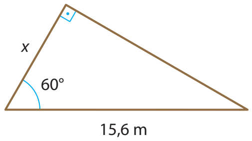
1 Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 55°. Meça os lados desse triângulo, em milímetro. Calcule as razões trigonométricas desse ângulo, com uma casa decimal. Confira os resultados consultando o quadro de razões trigonométricas ou uma calculadora.
1. sen 55° = 0,8; cos 55° = 0,6; tg 55° = 1,4

2 Nos triângulos, determine o valor de x:

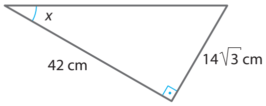
a)
2. a) 15 cm



b)
2. b) 7,8 m



c)
2. c) 30°



3 (Unopar-PR) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem a e $3a$, respectivamente, então o cosseno do ângulo oposto ao menor lado é: **3.** Alternativa **b**.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

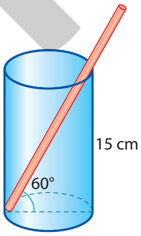
c) $\dfrac{1}{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

e) $2\sqrt{2}$.

4 Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 50°. Calcule a medida aproximada dos lados congruentes, sabendo que a altura em relação à base mede 20 cm. **4.** 26,1 cm

5 A figura a seguir representa um canudinho biodegradável dentro de um copo cuja altura mede 15 cm.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

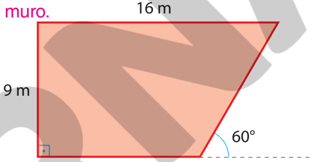
Calcule a medida aproximada do comprimento desse canudinho, sabendo que 8 cm dele estão fora do copo.

(Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.) **5.** 25,3 cm

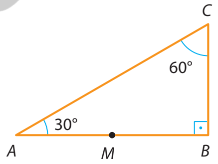
6 Uma escada medindo 2,80 m de comprimento e 0,65 m de largura está apoiada no topo de um muro, formando com ele um ângulo de 60°. Qual é a medida da altura do muro? **6.** 1,40 m

7 Regina tem um terreno no formato de um trapézio, conforme mostra a figura. Quantos metros quadrados de muro, aproximadamente, serão necessários para cercar esse terreno, se o muro tiver 1,80 m de altura? Calcule, se possível, a medida do volume desse muro.

7. 83 m². Não há dados suficientes para calcular a medida do volume do muro.



8 (UCSal-BA) Na figura abaixo tem-se o triângulo ABC, cujos ângulos internos têm as medidas indicadas.



Se M é ponto médio de $\overline{AB}$ e $AC = 10$ cm, qual é a medida do segmento $\overline{AM}$? **8.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

9 Rosana mediu a largura de um rio fixando um ponto A em uma das margens e um ponto B na margem oposta, de modo que $\overline{AB}$ ficasse perpendicular às margens desse rio. Do ponto A, caminhou 40 m perpendicularmente a $\overline{AB}$ e marcou um ponto C. Mediu o ângulo $B\hat{C}A$, obtendo 30°. Assim, ela pôde determinar a medida da largura do rio.

(Dado: $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

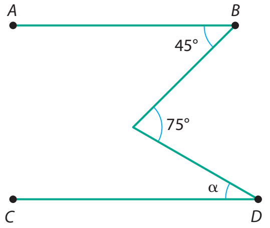
a) Determine a medida dessa largura, expressa na forma $a\sqrt{b}$. **9. a)** $\dfrac{40}{3}\sqrt{3}$ m

b) Determine a medida aproximada dessa largura. **9. b)** 23 m

10 De uma folha de cartolina, foi recortado um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede 120°. Cada um dos lados congruentes do triângulo mede 40 cm. Qual é a medida da área do triângulo recortado? **10.** $400\sqrt{3}$ cm²

11 Uma escada rolante une dois andares de uma loja. Sabendo que o comprimento dessa escada mede 10 m e tem inclinação de 30°, a medida de sua altura, em metro, fica entre quais números pares consecutivos? **11.** Entre 4 e 6.

12 (Mackenzie-SP) Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$.



O valor de sen α é: **12.** Alternativa **c**.

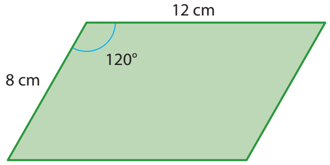
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) 1.
e) 0.

13 Dois prédios, *A* e *B*, estão situados em um mesmo plano. Da base do prédio *A*, avista-se o topo do prédio *B* sob um ângulo de 45° com a horizontal, e da base do prédio *B* avista-se o topo do prédio *A* sob um ângulo de 60° com a horizontal. Se a medida da distância entre *A* e *B* é 34,6 m, determine as medidas das alturas do prédio *A* e do prédio *B*. **13.** 60 m; 34,6 m.

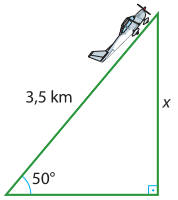
14 Considere o triângulo *ABC* da figura.

Sabendo que $AB = 750$ m e $AD = 620$ m, determine a medida *DC*. **14.** $10(75\sqrt{3} - 62)$ m

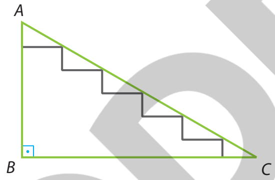
15 Um paralelogramo tem lados de medida 8 cm e 12 cm, e um de seus ângulos internos mede 120°. Calcule a medida da sua área. **15.** $48\sqrt{3}$ cm²



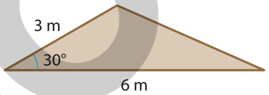
16 Um avião de acrobacias levanta voo formando um ângulo de 50° em relação à pista. Calcule a que altura o avião estará do solo após percorrer 3,5 km em linha reta. (Dado: sen 50° = 0,76.) **16.** 2,66 km



17 (Vunesp-SP) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se $AB = 2$ m e $B\hat{C}A$ mede 30°, qual é a medida da extensão de cada degrau? **17.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m



18 Qual é a medida da área do triângulo a seguir? **18.** Alternativa **b**.



a) 4 m²
b) 4,5 m²
c) 5 m²
d) 5,5 m²

19 Um automóvel parte de *A* e segue, em uma direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°, com velocidade média de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, qual será a medida da distância que o automóvel estará da reta $\overleftrightarrow{AC}$?

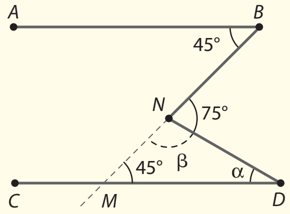
a) 75 km
b) $75\sqrt{3}$ km
c) $50\sqrt{3}$ km.
d) $75\sqrt{2}$ km

19. Alternativa **a**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

Para o **exercício 12**, temos:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$; $A\hat{B}N \cong N\hat{M}D$ (ângulos alternos internos)

Assim, $m(N\hat{M}D) = 45°$.

Verificamos também que:

$75° + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 105°$

Então, no triângulo *MND*:

$45° + 105° + \alpha = 180°$

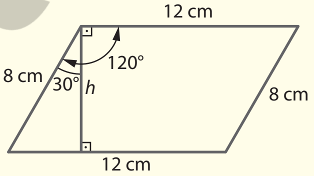
$\alpha = 30°$

Desse modo, obtemos:

$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ 30° = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

Alternativa **c**.

Para o **exercício 15**, temos a seguinte resolução.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Pela figura, como *h* é a medida da altura desse paralelogramo, temos:

$120° = 90° + 30°$

Desse modo, no triângulo destacado:

$\cos 30° = \frac{h}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2h = 8\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

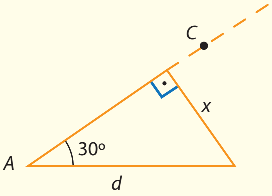
Assim, a medida da área do paralelogramo é dada por:

$A = b \cdot h \Rightarrow A = 12 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 48\sqrt{3}$

Portanto, a área do paralelogramo mede $48\sqrt{3}$ cm².

Segue um possível esquema da situação descrita no **exercício 19**.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Como a medida da velocidade é 50 km/h, após 3 horas, a medida da distância *d* percorrida é 150 km.

$50 = \frac{d}{3} \Rightarrow d = 150$

Assim, a medida da distância *x* que o automóvel estará da reta que passa pelos pontos *A* e *C* após 3 horas é dada por:

$$\text{sen}\ 30° = \frac{x}{150} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{150} \Rightarrow 2x = 150 \Rightarrow x = 75$$

A medida da distância que o automóvel estará da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é 75 km.

Alternativa **a**.

As resoluções dos **exercícios 10** e **11**, dos **exercícios 13** e **14** e dos **exercícios 16** a **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Verificando

Estes testes são mais uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

No **teste 1**, espera-se que os estudantes reconheçam que, em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo pode ser calculado pela razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.

Alternativa **a**.

No **teste 2**, os estudantes devem aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a medida do cateto oposto ao ângulo (x) e, em seguida, determinar o valor do seno desse ângulo.

$$13^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$$

Portanto: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{13}$

Alternativa **d**.

Para a resolução do **teste 3**, os estudantes devem se lembrar das razões trigonométricas nos triângulos retângulos.

Assim, sejam x a medida do cateto oposto ao ângulo α, h a medida da hipotenusa e y a medida do cateto adjacente ao ângulo α:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{x}{h} \cdot \frac{h}{y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{h}{h} = \text{tg}\ \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Alternativa **a**.

Para a resolução do **teste 4**, os estudantes devem lembrar da razão cosseno e consultar o quadro de razões trigonométricas.

$$\cos 38° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}7880 = \frac{x}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 5 \cdot 0{,}7880 \Rightarrow x = 3{,}94$$

Alternativa **b**.

As resoluções dos **testes 5** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O seno de um ângulo pode ser calculado em um triângulo retângulo pela razão, nessa ordem, entre as medidas: **1.** Alternativa **a**.

a) do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.
b) do cateto adjacente ao ângulo e da hipotenusa.
c) do cateto oposto ao ângulo e do cateto adjacente ao ângulo.
d) da hipotenusa e do cateto oposto ao ângulo.

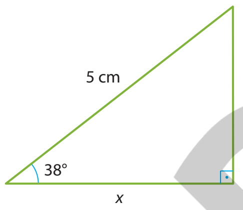
2 Sabendo que, em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 13 cm e o cateto adjacente a um ângulo mede 5 cm, qual é o valor do seno desse ângulo? **2.** Alternativa **d**.

a) $\frac{5}{13}$ **b)** $\frac{13}{5}$ **c)** $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{12}{13}$

3 A tangente de um ângulo agudo de medida α é uma relação entre as medidas do seno e do cosseno desse ângulo. Essa relação é: **3.** Alternativa **a**.

a) $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$ **c)** $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha$
b) $\frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$ **d)** $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha$

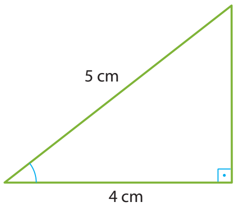
4 Qual é a medida x do cateto adjacente ao ângulo de 38°? **4.** Alternativa **b**.



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

a) 6,34 cm
b) 3,94 cm
c) 0,158 cm
d) Não é possível determinar.

5 Qual é, aproximadamente, a medida do ângulo agudo indicado na imagem? **5.** Alternativa **b**.



a) 53° **c)** 51°
b) 37° **d)** 45°

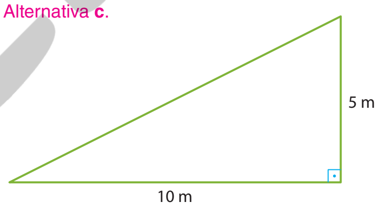
6 Qual é a diferença entre os valores do seno do ângulo de 30° e do cosseno do ângulo de 60°?

a) 1 **c)** 0,25
b) 0,5 **d)** 0 **6.** Alternativa **d**.

7 Qual é a medida do ângulo agudo de um triângulo retângulo com hipotenusa medindo 2 cm e cateto oposto medindo 1 cm? **7.** Alternativa **c**.

a) 60° **c)** 30°
b) 45° **d)** 15°

8 Qual é o valor da tangente do menor ângulo do triângulo a seguir, formado pela diagonal de um retângulo de lados medindo 10 m e 5 m? **8.** Alternativa **c**.



a) 2 **c)** 0,5
b) 0,3 **d)** 0,8

Organizando

Organizando:

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais são as três razões trigonométricas que você estudou neste capítulo? **a)** Seno, cosseno e tangente.

b) Qual é o instrumento de precisão usado para medir ângulos horizontais e verticais que você conheceu neste capítulo? **b)** Teodolito.

c) Quais são as razões do seno, do cosseno e da tangente dadas pelas medidas AC e BC dos catetos e AB da hipotenusa de um triângulo retângulo em $\hat{C}$?

c) $\text{sen}\ (B\hat{A}C) = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos\ (B\hat{A}C) = \dfrac{AC}{AB}$, $\text{sen}\ (A\hat{B}C) = \dfrac{AC}{AB}$, $\cos\ (A\hat{B}C) = \dfrac{BC}{AB}$, $\text{tg}\ (B\hat{A}C) = \dfrac{BC}{AC}$ e $\text{tg}\ (A\hat{B}C) = \dfrac{AC}{BC}$

d) Verifique a relação $\text{tg}\ (\alpha) = \dfrac{\text{sen}\ (\alpha)}{\cos\ (\alpha)}$ com os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de 30°.

d) $\text{tg}\ (30°) = \dfrac{\text{sen}\ (30°)}{\cos\ (30°)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seus aprendizados no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais, fluxogramas ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem os conteúdos estudados no capítulo e que reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção é importante pedir-lhes que compartilhem suas respostas. Essa estratégia permitirá o compartilhamento de dúvidas e percepções sobre o conteúdo, contribuindo para o aprendizado de todos.

Capítulo

10

Estudo das funções

Observe a fotografia e responda às questões no caderno.

a) Você conhece algum esporte em que os atletas fazem giros no ar?

b) Represente, em uma folha quadriculada, a trajetória do giro com a motocicleta realizada por Travis Pastrana desde o momento em que começa a subir na rampa para saltar até o momento em que chega à outra rampa. **b)** Construção de imagem.

c) Uma atividade como essa, em que o corpo é projetado no espaço com ou sem motocicleta, pode ser realizada pelas pessoas sem conhecimento das técnicas próprias, sem preparo com instrutores, sem treinamento evolutivo e sem os elementos necessários para a sua segurança? **c)** Não, todos esses requisitos são indispensáveis.

PETE SUMMERS/REX/SHUTTERSTOCK

O atleta Travis Pastrana realiza um salto acrobático com a motocicleta, em Londres, Inglaterra. (Fotografia de 2017.)

a) Respostas possíveis: ginástica acrobática, ginástica artística (argolas, barra fixa, barras paralelas, cavalo com alças, solo, trave), esqui, bicicleta, *skate*.

Travis Pastrana é um atleta que compete em várias modalidades, como Supercross, Motocross, Freestyle e corridas de *rally*. Na fotografia, está registrada uma sequência de momentos em que ele realiza uma de suas acrobacias em um movimento que pode ser associado ao lançamento oblíquo.

Nesse tipo de lançamento, desprezada a resistência do ar, sob a ação de seu peso, um corpo fica sujeito à aceleração da gravidade, e sua trajetória em relação à Terra é uma parábola.

O estudo desse fenômeno envolve dois movimentos:

- horizontal, descrito por uma função polinomial do 1º grau;
- vertical, descrito por uma função polinomial do 2º grau.

Capítulo 10 – Estudo das funções

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, situações contextualizadas subsidiam as abordagens dos conceitos de função, de função polinomial do 1º grau e de função polinomial do 2º grau. Enfatize o papel das variáveis e de suas interdependências nesse tipo de relação.

O contexto da abertura do capítulo possibilita trabalhar as culturas juvenis. Para explorar os **itens a** e **b**, incentive os estudantes a comentar situações em esportes ou *games* em que são realizados saltos e manobras como os da fotografia. Se possível, eles podem apresentar alguns vídeos desses movimentos a fim de verificar a trajetória e compará-la com a do motociclista e, depois, representá-la por meio de pontos no plano cartesiano. Nesse momento, não é necessário que os estudantes representem pontos de uma função polinomial do 2º grau, mas é importante que observem e representem características como o ponto de máximo e a simetria em relação a um eixo vertical, ainda que de maneira intuitiva. No **item c**, converse com eles sobre a importância de realizar manobras com treinamento adequado e equipamentos de segurança.

1. Conceito de função

Habilidade da BNCC:
EF09MA06.

Neste tópico, exploram-se a ideia de função e gráficos de uma função abordando a habilidade (EF09MA06). Na **situação 1**, o contexto é bastante simples para realçar as variáveis e a relação de dependência entre elas, com poucos valores (números naturais) possíveis de ser atribuídos à variável independente.

Os cálculos numéricos, feitos um a um e organizados em um quadro, induzem à descoberta das operações envolvidas na relação entre as variáveis, possibilitando a generalização delas para a elaboração da lei de formação da função.

Questione os estudantes sobre a impossibilidade de comprar 3,5 programas e reforce que essa é uma grandeza discreta (não contínua).

1 Conceito de função

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Uma empresa de TV a cabo cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 195,00 e mais R$ 9,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas extras adquiridos pelo assinante.

Vamos organizar um quadro que mostra a relação entre o número de programas extras comprados e o total a ser pago.

Número de programas extras	**Preço (em real)**
0	$195 + 0 \cdot 9$
1	$195 + 1 \cdot 9$
2	$195 + 2 \cdot 9$
3	$195 + 3 \cdot 9$
4	$195 + 4 \cdot 9$

TETRA IMAGES/TETRA IMAGES RF/GETTY IMAGES

Indicando por x o número de programas extras comprados e por y o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas por meio da sentença:

$$y = 195 + x \cdot 9 \quad \text{ou} \quad y = 195 + 9x$$

Note que, a cada valor atribuído para x, obtemos **um único** valor para y; por exemplo:

- para $x = 0$, obtemos:

$$y = 195 + 9 \cdot 0 = 195 + 0 = 195$$

Isso significa que, quando não se compra programa extra, o preço é R$ 195,00.

- para $x = 1$, obtemos:

$$y = 195 + 9 \cdot 1 = 195 + 9 = 204$$

Ou seja, com a compra de 1 programa extra, o preço é R$ 204,00.

- para $x = 2$, obtemos:

$$y = 195 + 9 \cdot 2 = 195 + 18 = 213$$

Ou seja, com a compra de 2 programas extras, o preço é R$ 213,00.

Nesse caso, podemos dizer que o preço a pagar (y) é obtido em **função** do número de programas extras comprados (x).

Dizemos que a grandeza y é **função** da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.

Na função que relaciona o número de programas extras comprados (x) e o preço a pagar (y), escrevemos a sentença $y = 195 + 9x$. Nesse caso, x e y são chamadas de **variáveis**, e a sentença $y = 195 + 9x$ é chamada de **lei da função**.

Em geral, dizemos que y é uma função de x por $y = f(x)$ (lemos: "y é igual a f de x"). Então, para o caso em que a lei da função é $y = 195 + 9x$, podemos escrever $f(x) = 195 + 9x$.

Situação 2

Paulo é vendedor de assinaturas de revistas, e seu salário varia conforme o número de assinaturas que ele vende no mês. Ele recebe um valor fixo de R$ 1 800,00, e uma comissão de R$ 40,00 para cada assinatura vendida. Considere a relação entre o número de assinaturas vendidas e o salário de Paulo indicada no quadro.

Número de assinaturas vendidas	Salário de Paulo (em real)
0	$1\,800 + 0 \cdot 40 = 1\,800$
1	$1\,800 + 1 \cdot 40 = 1\,840$
2	$1\,800 + 2 \cdot 40 = 1\,880$
3	$1\,800 + 3 \cdot 40 = 1\,920$
4	$1\,800 + 4 \cdot 40 = 1\,960$
5	$1\,800 + 5 \cdot 40 = 2\,000$

Nesse caso, podemos escrever a função:

$$f(x) = 1\,800 + x \cdot 40 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1\,800 + 40x$$

Observe que $f(x)$ representa o salário de Paulo, e x, o número de assinaturas vendidas por ele.

ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Com essas informações, podemos responder, por exemplo, às questões a seguir.

a) Se Paulo vender 59 assinaturas em um mês, qual será seu salário?

Nesse caso, substituímos x por 59 na lei da função $f(x) = 1\,800{,}00 + 40x$; desta maneira:

$f(59) = 1\,800 + 40 \cdot 59$

$f(59) = 1\,800 + 2\,360$

$f(59) = 4\,160$

Logo, se vender 59 assinaturas, Paulo receberá R$ 4 160,00 de salário.

Observe que $f(59)$ corresponde ao salário de Paulo quando x for igual a 59.

- Analisando os valores de $f(x)$, apresentados no quadro, é correto afirmar que $f(60) < f(61)$? E é verdade que, se $x < y$, $f(x) < f(y)$? Espera-se que os estudantes percebam intuitivamente que $f(x)$ é crescente, pois, se x aumenta, $f(x)$ aumenta também; assim, para quaisquer x e y, tais que $x < y$, temos que $f(x) < f(y)$.

Conceito de função

No contexto da **situação 2**, a variável independente também pode assumir apenas números naturais. Com alguns valores atribuídos a ela, os cálculos numéricos organizados em um quadro induzem facilmente à lei de formação da função que representa essa situação.

Avançamos um pouco na abordagem e levantamos um questionamento atribuindo à variável independente um valor, ainda compatível com o contexto, bem maior do que os valores do quadro.

Questione os estudantes sobre a impossibilidade de vender 8,2 revistas e reforce que essa também é uma grandeza discreta (não contínua).

Peça a cada estudante que escolha um número natural com dois dígitos e calcule o salário do personagem Paulo.

Conceito de função

A **situação 2** ainda é explorada com outro questionamento. No **item b**, atribuímos um valor numérico à variável dependente e pedimos o valor respectivo da variável independente.

Peça a cada estudante que atribua outro valor ao salário de Paulo e obtenha a quantidade de revistas vendidas para ele obter esse salário atribuído. Provavelmente, o número de revistas obtido nesse cálculo não será um número natural. Discuta esse fato com os estudantes. Espera-se que eles percebam que, dentro de um limite razoável ao contexto, podem atribuir ao número de revistas qualquer número natural, porém não podem fazer o mesmo com o salário de Paulo, que depende do número de revistas vendidas.

Na **situação 3**, as grandezas comprimento e largura são contínuas, possibilitando atribuir à variável independente, desde que satisfaçam às condições do contexto, quaisquer números reais; no caso, números reais maiores do que zero e menores do que 16. Apesar de esses números serem matematicamente adequados, discuta com os estudantes o que aconteceria com o galinheiro se o valor de x fosse igual a 0,01 m, ou seja, 1 cm. Certamente, esse galinheiro não teria utilidade prática. Semelhantemente, se a medida x da largura é um valor próximo de 8 m, a medida do comprimento tende a valores próximos de 0 (zero). Incentive os estudantes a comentar valores para x que façam sentido no contexto.

O contexto no qual se insere a **situação 3**, se julgar conveniente, pode ser explorado perguntando à turma o que eles entendem por agricultura de subsistência e por agricultura familiar. Solicite uma pesquisa em grupo com relatório que destaque os principais pontos a respeito do tema. A apresentação dos relatórios em uma roda de conversa valoriza a diversidade de saberes e vivências culturais e possibilita entender as relações do mundo do trabalho e exercitar a cidadania favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 6**.

b) Se o salário ao final do mês foi de R$ 3 600,00, quantas assinaturas Paulo vendeu?

Agora, substituímos $f(x)$ por 3 600 e encontramos o valor de x correspondente.

$3\,600 = 1\,800 + 40x$

$-40x = 1\,800 - 3\,600$

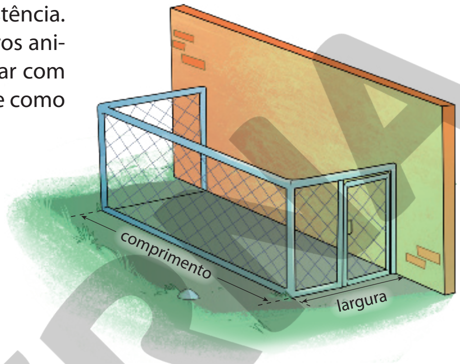
$40x = 1\,800$

$x = 45$

Portanto, se Paulo receber R$ 3 600,00 de salário, ele vendeu 45 assinaturas.

Situação 3

José tem um sítio e pratica agricultura de subsistência. Para proteger durante a noite suas galinhas de outros animais, ele resolveu construir um galinheiro retangular com 16 metros de tela e aproveitou um muro já existente como um dos lados.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a soma das medidas de duas larguras com a de um comprimento resulta em 16 metros. Assim, se José construir um galinheiro medindo 3 metros de largura, o comprimento medirá 10 metros.

$$16 - 2 \cdot 3 = 10, \text{ pois } 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

Considere outros possíveis valores para as medidas do galinheiro, em metro, como indicados no quadro:

Medida da largura (m)	Medida do comprimento (m)
1	$16 - 2 \cdot 1 = 14$
2	$16 - 2 \cdot 2 = 12$
3,5	$16 - 2 \cdot 3{,}5 = 9$
5	$16 - 2 \cdot 5 = 6$
6,4	$16 - 2 \cdot 6{,}4 = 3{,}2$

LEONID IKAN/SHUTTERSTOCK

Note que a medida y do comprimento é dada em função da medida x da largura e que ambos se relacionam de acordo com a lei $y = 16 - 2x$, ou seja, para essa situação, podemos considerar a função f dada por $f(x) = 16 - 2x$, em que x assume valores entre 0 e 8.

Com essas informações, podemos responder às questões a seguir.

a) Para José construir um galinheiro medindo 7,5 metros de comprimento, qual será a medida da largura?

Basta substituir $f(x)$ por 7,5 e encontramos o valor de x correspondente.

$7{,}5 = 16 - 2x$

$2x = 16 - 7{,}5$

$2x = 8{,}5$

$x = 4{,}25$

Portanto, para o galinheiro medir 7,5 metros de comprimento, a largura deverá medir 4,25 metros.

b) Se José quiser construir um galinheiro quadrado, qual será a medida da largura?

Nesse caso, a medida x da largura deverá ser igual à do comprimento $f(x)$. Assim, substituímos $f(x)$ por x na lei $f(x) = 16 - 2x$, obtendo:

$x = 16 - 2x$

$3x = 16$

$x = \frac{16}{3}$

Logo, se José construir um galinheiro quadrado, ele medirá $\frac{16}{3}$ metros de largura.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Responda oralmente às questões. **1. a)** R$ 80,00; R$ 400,00.

Em certa loja, uma camiseta custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

- a) Na compra de 2 camisetas, qual será o valor pago? E na compra de 10 camisetas?
- b) Para cada quantidade comprada dessa camiseta, o preço associado é único? **1. b)** Sim.
- c) A relação entre a quantidade de camisetas compradas e o preço a ser pago é uma função? **1. c)** Sim.
- d) Determine o preço pago (y) como uma função do número de camisetas compradas (x). **1. d)** $y = 40x$

2 Responda no caderno às questões a seguir.

- a) Considerando a relação que associa uma mãe a cada filho, podemos dizer que essa relação é uma função? **2. a)** Não, pois pode existir uma mãe que esteja associada a mais de um filho.
- b) Considerando a relação que associa cada filho à sua mãe biológica, podemos dizer que essa relação é uma função? **2. b)** Sim, pois qualquer filho tem uma única mãe biológica.

3 Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

- pela 1ª hora: R$ 15,00;
- pela 2ª hora e seguintes: R$ 4,00 por hora.

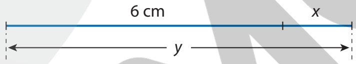
Se x representa o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento e y, o valor a ser pago, qual é a lei da função que fornece y em função de x? **3.** $y = 15 + 4 \cdot (x - 1)$

4 Uma máquina produz 8 litros de sorvete a cada 10 minutos. Assim, a produção p depende da quantidade t de minutos que a máquina funciona.

Escreva a lei dessa função, que fornece p em função de t. **4.** $p = \frac{8}{10} \cdot t$

5 Faça o que se pede.

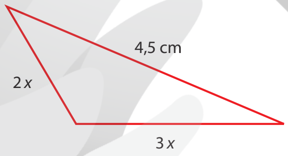
- a) Represente a medida do comprimento y, em centímetro, em função de x, na figura a seguir.

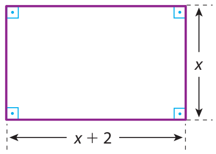


5. a) $y = x + 6$

- b) Determine a medida do perímetro y, em centímetro, em função de x, nos polígonos a seguir.

5. b) $y = 5x + 4,5$





5. b) $y = 4x + 4$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Conceito de função

No **item b** da **situação 3**, a Unidade Temática **Geometria** se integra à Unidade Temática **Álgebra** com a condição imposta de o galinheiro ter o piso quadrado. Converse com os estudantes se haveria mais de um valor para x de modo que o piso fosse quadrado. Eles devem concluir que há um só valor para o piso quadrado: $\frac{16}{3}$.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Explore a diversidade das atividades propostas no início deste bloco de exercícios. O **exercício 1** pede cálculo mental em uma resolução oral; o **exercício 2** não propõe cálculo, por meio da relação mãe/filho, mas o entendimento da ideia de função no que diz respeito à unicidade da imagem para cada elemento do domínio; o **exercício 3** se aproxima das situações-problema empregadas como exemplo; e no **exercício 4** pode ser explorada a proporcionalidade entre as duas grandezas. O **exercício 5**, tal como a **situação 3**, integra as Unidades Temáticas Geometria, Álgebra e Grandezas e medidas.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 6** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Peça aos estudantes que resolvam o **exercício 10** em duplas, incentivando a troca de ideias sobre as diferentes possibilidades de representar esse retângulo. Acompanhe as resoluções e faça as intervenções necessárias para que eles utilizem adequadamente a ideia de função nesse contexto. Os estudantes devem representar um retângulo e indicar a medida de seu comprimento como 10 e a de sua largura como $(10 - x)$, ambas medidas em centímetro.

No **item a**, é preciso encontrar a relação que possibilita calcular a medida da área desse retângulo. Com a afirmação “medindo 10 cm de comprimento e a largura medindo x cm a menos”, podemos escrever que a medida da área A do retângulo é dada por:

$A = 10(10 - x) = 100 - 10x$

Assim, podemos organizar o quadro solicitado:

Valor de x	Medida da área
1	$A = 100 - 10 \cdot 1 = 90$
2	$A = 100 - 10 \cdot 2 = 80$
3	$A = 100 - 10 \cdot 3 = 70$
4	$A = 100 - 10 \cdot 4 = 60$
5	$A = 100 - 10 \cdot 5 = 50$

No **item b**, para chegar à conclusão de que o valor de x não pode ser igual ou maior que dez, os estudantes podem atribuir valores para x na expressão $A = 100 - 10x$ ou usar diretamente a afirmação de que a largura mede “x cm a menos que os 10 cm da medida do comprimento”.

No **item c**, temos uma generalização da relação observada no item anterior. Vale comentar com os estudantes que podemos atribuir a x quaisquer valores que estiverem nesse intervalo, sejam eles naturais ou não, definido pela dupla desigualdade $0 < x < 10$. Essa ressalva é importante, pois, no **item a**, eles fizeram apenas “testes” com números naturais e podem acreditar que só esses números seriam válidos na relação.

6 Considerando a função f cuja lei é $f(x) = 4x + 9$, determine os valores indicados em cada item.

a) $f(2)$ **6. a)** $f(2) = 17$

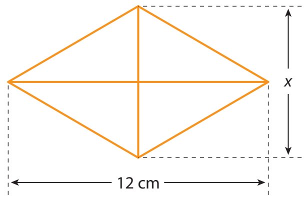
b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **6. b)** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 11$

c) $f(-2)$ **6. c)** $f(-2) = 1$

d) $f(-0,3)$ **6. d)** $f(-0,3) = 7,8$

e) $f(\sqrt{2})$ **6. e)** $f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 9$

7 A diagonal maior de um losango mede 12 cm.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Represente a medida da área desse losango em função da medida da diagonal menor. **7. a)** $y = \frac{12 \cdot x}{2}$

b) Calcule a medida da área desse losango quando a diagonal menor medir 7 cm. **7. b)** 42 cm^2

c) Quanto deve medir a diagonal menor para que a área desse losango meça 45 cm^2? **7. c)** 7,5 cm

8 Reúna-se com um colega para resolverem a atividade a seguir.

Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

a) Represente o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos. **8. a)** $c = 27 + 0,30n$

b) Se em um dia ele vender 200 pirulitos, terá lucro ou prejuízo? De quanto? **8. b)** Lucro de R$ 153,00.

c) Qual é o número mínimo de pirulitos que esse fabricante deverá vender por dia para ter lucro? **8. c)** 31 pirulitos.

d) Para esse fabricante ter um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos deverá vender? **8. d)** 80 pirulitos.

e) Quantos pirulitos ele deve vender por dia útil para que, no fim de um mês com 22 dias úteis, lucre 6 salários mínimos? **8. e)** A resposta depende do salário mínimo vigente.

f) Expliquem para outra dupla como vocês chegaram às respostas das questões. **8. f)** Resposta pessoal.

9 A produção de uma fábrica onde trabalham 121 funcionários é dada por $y = 50\sqrt{x}$, em que y representa a quantidade, em tonelada, de certo produto fabricado mensalmente e x representa o número de funcionários.

a) Calcule no caderno quantas toneladas a mais serão produzidas, em um mês, com a contratação de 48 novos funcionários. **9. a)** 100 toneladas.

b) Se o número de funcionários fosse quadruplicado, a produção também seria quadruplicada? A variação do número de funcionários é proporcional à variação da produção? **9. b)** Não, seria duplicada; não é proporcional.

10 Represente no caderno um retângulo medindo 10 cm de comprimento e a largura medindo x cm a menos.

a) Construa um quadro colocando na primeira linha os valores 1, 2, 3, 4 e 5 para x e, na segunda linha, a medida da área (A) do retângulo. **10. a)** Construção de quadro.

b) Pode-se atribuir a x um valor igual a 10 ou maior que 10? Justifique sua resposta. **10. b)** Não, pois a largura seria nula ou negativa.

c) Escreva uma dupla desigualdade, do tipo $a < x < b$, para indicar os valores reais que x pode assumir. **10. c)** $0 < x < 10$

11 *Hora de criar* – Troque com um colega um problema sobre a lei de uma função, criado individualmente por vocês. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **11.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Observe o mapa.

FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Mapa elaborado com base em: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018. p. 90.

Pense mais um pouco...:

Considerando a escala indicada no mapa, resolva as questões a seguir no caderno.

a) Escreva a lei da função que fornece a medida da distância real y, em quilômetro, entre duas cidades do mapa em função da medida da distância x, em centímetro, medida no mapa. **a)** $y = x \cdot 310$

b) Use uma régua para medir a distância entre São Paulo e Florianópolis em linha reta. Em seguida, calcule a distância real aproximada entre essas duas cidades. **b)** 495 km

c) Qual capital está a 1 800 km de Brasília? **c)** Natal.

d) Um pequeno avião tem autonomia de voo igual a 1 350 km. Se ele partisse de Belo Horizonte, a quais das cidades destacadas no mapa ele conseguiria chegar sem precisar reabastecer?
d) Brasília, Florianópolis, Curitiba, São Paulo, Rio de Janeiro, Campo Grande, Goiânia, Palmas, Aracaju, Salvador, Vitória.

Pense mais um pouco...

Comente com os estudantes que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter rosa dos ventos, que indica a orientação geográfica.

No **item a**, como para cada centímetro no mapa a distância real é 310 km, então $y = 310x$.

No **item b**, os estudantes devem usar régua; instrua-os sobre o fato de que algumas aproximações podem ser necessárias nas medições.

No **item c**, para estar a 1 800 km de Brasília, no mapa as capitais devem estar a uma distância de cerca de 5,8 cm, pois: $1800 : 310 \simeq 5{,}8$

A situação apresentada no **item d** coloca uma situação-problema recorrente nos procedimentos das torres de aeroportos em cartas aeronáuticas para o controle do tráfego aéreo ou nas cartas náuticas de embarcações marítimas.

A não observância do cálculo da medida de distâncias comparativo com a autonomia das aeronaves, por meio do uso de escalas, pode ocasionar desastres.

As respostas para o **item d** são as capitais que, no mapa, estão a uma distância aproximada de 4,35 cm de Belo Horizonte.

Para saber mais

Seja de qual for o componente curricular, não podemos prescindir do seu espaço na História. Assim, o texto desta seção descreve de maneira sucinta a trajetória observável do conceito função, possibilitando perceber a Matemática como um conjunto de conhecimentos historicamente construídos e, por isso, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Em textos de História da Matemática, é comum a origem ser citada com cautela, muitas vezes por meio de referências a registros incompletos de terceiros, ou seja, não menciona registros originais. Com o tempo, as informações tornam-se mais confiáveis e mais abundantes.

O objetivo aqui é mostrar aos estudantes que o conhecimento matemático é fruto do trabalho intelectual contínuo e progressivo de muitas pessoas dedicadas ao desenvolvimento da ciência. Discuta com os estudantes sobre em que locais esse desenvolvimento é propiciado atualmente e conversem sobre a importância das universidades e de outros centros de pesquisa científica e acadêmica. Incentive-os a pesquisar locais próximos de onde residem em que são realizadas pesquisas científicas e, se possível, agende uma visita a feiras de profissões realizadas por universidades, por exemplo. Esse trabalho possibilita a compreensão da importância do desenvolvimento científico e, assim, os estudantes desenvolvem a **competência geral 6**, pois aprendem a valorizar a diversidade de saberes que lhes propiciam entender relações próprias do mundo do trabalho, particularmente do campo científico.

PARA SABER MAIS

Função, um longo caminho na história da Matemática

Não sabemos exatamente quando o conceito de **função** foi usado pela primeira vez. Sabe-se que os babilônios, cerca de 2000 a.C., construíram quadros sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, as quais podem ser consideradas quadros de funções.

Antigos registros mesopotâmicos sobre **lunações** representavam, por meio de quadros, a relação entre as fases da Lua e o período de tempo solar. Os babilônios valorizavam esses quadros, pois eles estabeleciam uma correspondência de valores. Eram utilizados não somente para obter as informações que continham, mas também para avaliar os resultados correspondentes a valores intermediários, calculados por meio de aproximações por segmentos de reta.

Lunação: período de tempo entre duas luas novas consecutivas.

O emprego das aproximações na Antiguidade significa a aplicação de uma relação funcional elementar, pois é uma simples proporcionalidade e constituiu o primeiro passo rumo ao desenvolvimento posterior de noções mais gerais de função.

Novas contribuições, ainda implícitas, para o desenvolvimento do conceito de função surgiram muito depois, no final da Idade Média, como as do matemático francês Nicole Oresme (1323-1382).

As ideias mais explícitas de função parecem ter surgido por meio de René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês que adotou equações em *x* e em *y* para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a possibilitar o cálculo de valores de uma delas por meio do valor da outra.


FRANS HALS – MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Retrato de René Descartes.
HALS, F. [ca. 1649].
Óleo sobre tela. 77,5 cm × 68,5 cm.

Foi a partir dos trabalhos do físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) e do matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) que a palavra **função**, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida. Eles fizeram as primeiras contribuições efetivas para o desenvolvimento desse conceito.

Por volta de 1718, o matemático suíço Johann Bernoulli (1667-1748) chegou a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes. Usou várias notações para uma função de *x*, sendo *fx* a mais próxima da que usamos hoje.

O suíço Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos de sua época, também trabalhou com funções e introduziu a notação *f*(*x*), hoje padronizada.

Posteriormente, outros matemáticos, como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) e Johann Dirichlet (1805-1859), contribuíram significativamente para o desenvolvimento do conceito de função.

A teoria dos conjuntos, criada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), ampliou o conceito de função até chegar à definição conhecida atualmente.

Esse relato nos leva a concluir que os conceitos matemáticos são construídos e evoluem segundo as necessidades históricas e as conjunturas favoráveis nas mais diversas civilizações.

Gráfico de uma função

Considere a função f dada pela lei $y = x + 1$, em que x representa um número inteiro qualquer. Vamos construir seu gráfico.

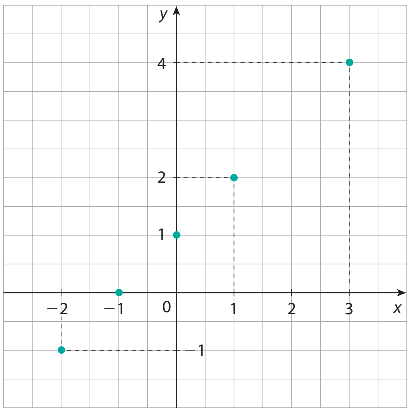
Para isso, atribuímos valores inteiros a x e calculamos os valores de y, determinando os pares ordenados correspondentes. Esses dados foram organizados no quadro com alguns pontos do gráfico de f.

Para representar graficamente essa função, vamos marcar, em um plano cartesiano, os pontos determinados por esses pares ordenados. Os pontos marcados são apenas alguns dos pontos do gráfico dessa função, pois existem infinitos pares ordenados (x, y) que satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo x um número inteiro.

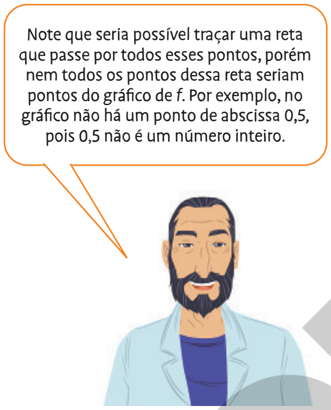
Quadro com alguns pontos do gráfico de *f*

x	$y = x + 1$	(x, y)
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
3	$y = 3 + 1 = 4$	$(3, 4)$

Gráfico de *f*



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

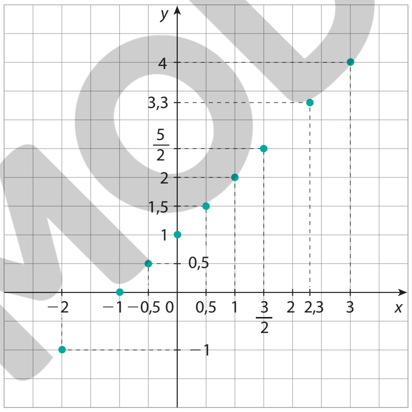
Considere agora uma função g dada pela mesma lei da função f, $y = x + 1$, porém com x representando um número racional qualquer.

Como todo número inteiro é também um número racional, todos os pontos do gráfico de f também são pontos do gráfico de g. Além desses pontos, podemos obter outros. Acompanhe:

Quadro com alguns pontos do gráfico de *g*

x	$y = x + 1$	(x, y)
$-0{,}5$	$y = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$	$(-0{,}5; 0{,}5)$
$0{,}5$	$y = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$(0{,}5; 1{,}5)$
$\frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$2{,}3$	$y = 2{,}3 + 1 = 3{,}3$	$(2{,}3; 3{,}3)$

Gráfico de *g*



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de uma função

Compreender o comportamento de uma função e, portanto, saber analisar gráficos de funções é importante para a interpretação de fenômenos das ciências em geral e da própria Matemática.

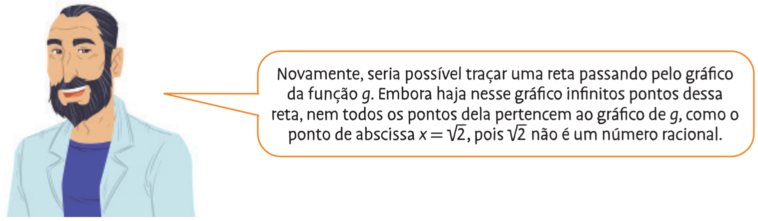
Os gráficos representam a expressão algébrica de uma função por meio de pontos do plano cartesiano que podem formar linhas retas ou curvas, intercaladas ou contínuas, limitadas ou ilimitadas.

Nesta página, após atribuirmos valores a x e fazermos os cálculos das ordenadas, com os pares ordenados organizados no quadro, obtemos alguns pontos do gráfico das funções f e g dadas pela mesma lei, $f(x) = x + 1$, porém com domínios diferentes: a função f definida para números inteiros e a função g definida para números racionais.

Gráfico de uma função

Explore a função *h*, definida pela mesma lei de *f* e de *g*, porém agora com domínio real. Neste caso, afirmamos, sem demonstrar, que o gráfico é uma reta. Neste nível de estudos, não é necessário demonstrar essa afirmação. Peça aos estudantes que atribuam um número real qualquer a *x*, obtenham *h*(*x*), localizem o ponto (*x*, *h*(*x*)) e observem que ele pertence à reta que é gráfico de *h*.

Também nesse caso não foram marcados todos os pontos do gráfico de *g*, pois existem infinitos pares ordenados (*x*, *y*), sendo *x* um número racional, que satisfazem a lei $y = x + 1$.



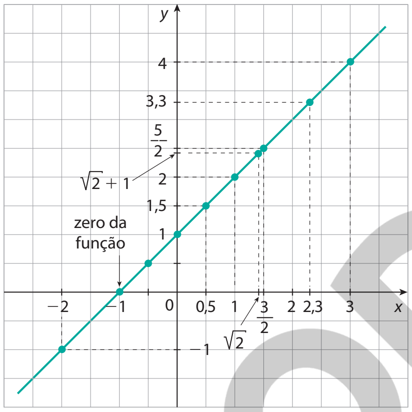
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- O termo *infinitos* não significa *todos*, por isso não podemos traçar a reta que passa pelos pontos obtidos no gráfico da função *g*.
- Em um ponto (*x*, *y*), dizemos que *x* corresponde à **abscissa** e *y*, à **ordenada** do ponto.

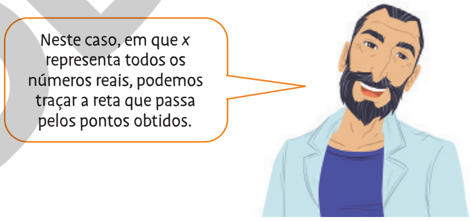
Agora, vamos considerar uma função *h* dada pela mesma lei da função *f*, $y = x + 1$, porém com *x* representando um número real qualquer.

Gráfico de *h*



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos obtidos para os gráficos das funções *f* e *g* também são pontos do gráfico de *h*, pois os números inteiros e os números racionais são números reais. Além desses pontos, devemos considerar aqueles cujos pares ordenados (*x*, *y*) satisfazem a lei $y = x + 1$, sendo *x* um número irracional, como $x = \sqrt{2}$, ou seja, $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\right)$.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Zero de uma função

No gráfico anterior, observe que a abscissa do ponto que tem $y = 0$ é $x = -1$. Esse valor de *x* é chamado de **zero da função**.

Zero da função é todo valor de *x* para o qual *y* é igual a zero, ou seja, é a abscissa do ponto onde o gráfico da função cruza o eixo *x*.

Desse modo, para calcular o zero da função do nosso exemplo, cuja lei é $y = x + 1$, basta resolver a equação $x + 1 = 0$. Assim, obtemos $x = -1$.

Acompanhe estes outros exemplos em que obtemos o zero da função dada pela lei:

a) $y = 4x + 9$

Basta atribuir a y o valor zero: $0 = 4x + 9$ ou $4x + 9 = 0$.

$4x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$ ou $x = -2{,}25$

O zero da função dada por $y = 4x + 9$ é $x = -2{,}25$.

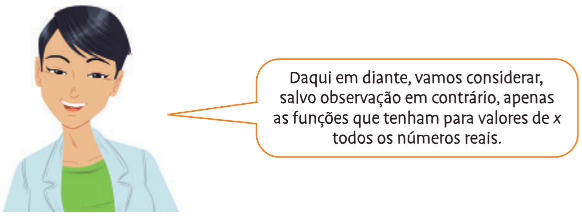
b) $y = x^2 - 121$

Basta atribuir a y o valor zero: $0 = x^2 - 121$ ou $x^2 - 121 = 0$.

$x^2 = 121 \Rightarrow x = 11$ ou $x = -11$

Os zeros da função dada por $y = x^2 - 121$ são $x = 11$ e $x = -11$.

Como reconhecer o gráfico de uma função



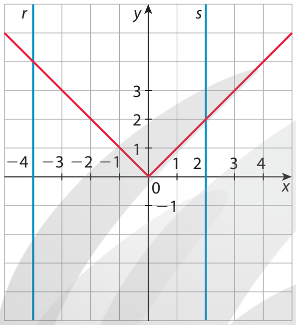
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

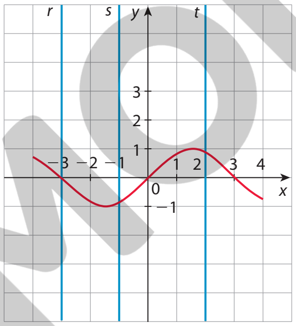
Já vimos que, quando y é função de x, para cada valor de x existe um único valor de y.

Desse modo, em um gráfico de função, para cada abscissa haverá somente um ponto correspondente no gráfico. Podemos verificar isso geometricamente, traçando retas perpendiculares ao eixo x.

Acompanhe alguns exemplos.

a)





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Em ambos os casos, qualquer reta perpendicular ao eixo dos x intersectará os gráficos em um único ponto. Logo, cada um desses gráficos representa uma função, pois, para qualquer valor de x, obtemos um único valor de y correspondente.

Como reconhecer o gráfico de uma função

O zero de uma função tem papel importante no estudo das funções em geral.

Convém sugerir uma revisão aos estudantes que apresentarem dificuldade na resolução de equações.

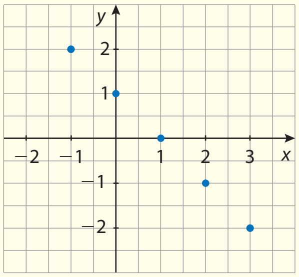
Uma maneira prática de verificar se um gráfico representa uma função é usando régua e esquadro. Posicionamos a régua paralelamente ao eixo da variável dependente x e encostamos um dos lados do ângulo reto do esquadro na reta, fazendo-o correr por ela. Nesse procedimento, devemos observar o outro lado do ângulo reto. Para qualquer valor de x, se ele cortar o gráfico em mais de um ponto, o gráfico não representa função, pois teríamos, associado a um valor de x, mais de um valor de y, o que contradiz a definição de função.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 14** e **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

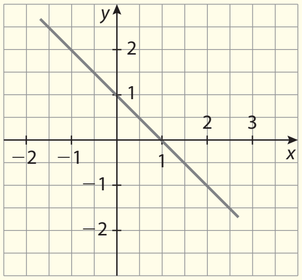
Para o **exercício 12**, temos os seguintes gráficos:

a)



REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

b)



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Retome o que esses gráficos têm de diferente ou em comum, explorando o fato de um ser discreto e o outro, contínuo, devido à natureza do domínio das funções.

Para o **exercício 13**, apresentamos uma possível resolução:

a)

x (medida do tempo em h)	*y* (medida da distância percorrida, em km)
0	0
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400

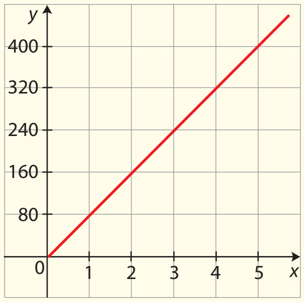
A lei da função que fornece *y* em relação a *x* é:

$y = 80x$

b) A variável *x* não pode assumir valores negativos porque representa a medida do tempo em que um automóvel faz determinado percurso a partir de um instante inicial ($x = 0$).

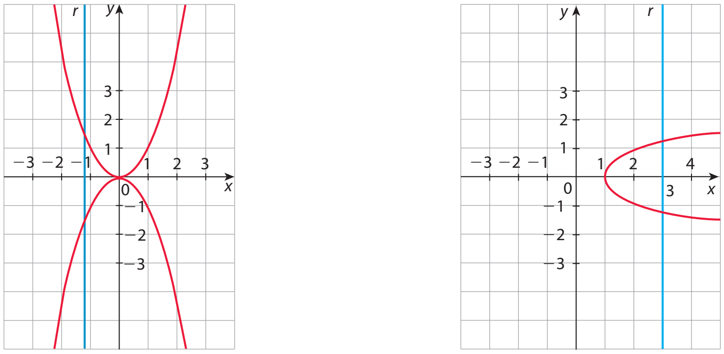
c) É uma semirreta que tem origem no ponto (0, 0).

d)



REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

b)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe, em cada caso, que existe uma reta *r*, perpendicular ao eixo *x*, que intersecta os gráficos em dois pontos com ordenadas (*y*) diferentes. Então, esses gráficos não representam função, pois existe valor de *x* com dois valores de *y* correspondentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

12 Considere a função dada pela lei y = –x + 1. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico dessa função, sendo: **12.** Construção de gráfico.

a) x um número inteiro qualquer;

b) x um número real qualquer.

13 Um automóvel percorre uma estrada à velocidade constante de 80 km por hora.

a) Indicando por x a medida do tempo transcorrido (em hora) e por y a medida da distância percorrida (em quilômetro), organize um quadro com os seguintes valores para x: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Em seguida, escreva a lei da função que fornece y em relação a x. **13. a)** *y* = 80*x*

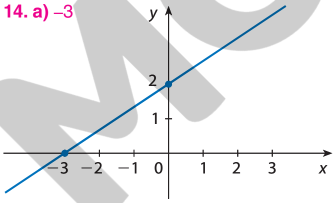
b) A variável x pode assumir qualquer número real, por exemplo, um número negativo? **13. b)** Não.

c) O gráfico dessa função é uma reta ou uma semirreta? **13. c)** O gráfico é uma semirreta.

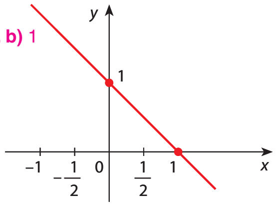
d) Represente, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico correspondente. **13. d)** Construção de gráfico.

14 Determine no caderno o zero das funções representadas nos gráficos a seguir.

a) **14. a)** –3



b) **14. b)** 1



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

15 Determine no caderno o zero das funções dadas por:

a) y = x + 3 **15. a)** *x* = –3

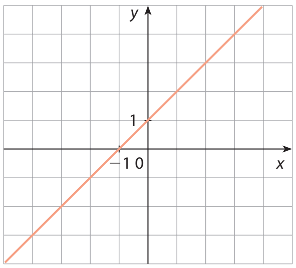
b) $y = -3x^2 + 6$ **15. b)** $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$

c) y = 3x + 18 **15. c)** *x* = –6

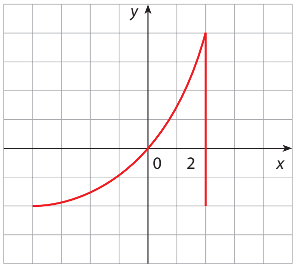
16 Observe os gráficos a seguir e identifique aqueles que representam funções. Justifique sua resposta.

16. As alternativas **a**, **d** e **f** representam funções, pois para cada valor de *x* existe um único valor de *y*.

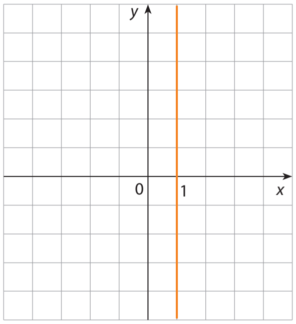
a)



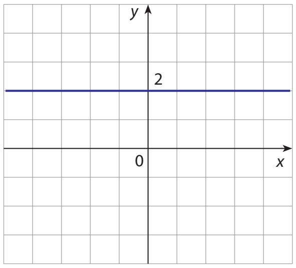
b)



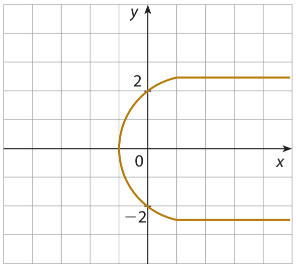
c)



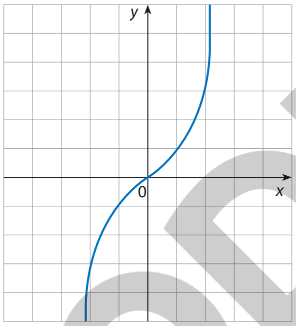
d)



e)



f)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Sabendo que o preço de uma revista em quadrinhos é 16 reais, faça o que se pede.

a) Construa um quadro que apresente o preço de 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 exemplares dessa revista. **a)** Construção de quadro.

b) Represente em um plano cartesiano os pares ordenados (*x*, *y*) do quadro, colocando no eixo *x* o número de revistas e no eixo *y* o preço a pagar. **b)** Construção do gráfico.

c) É possível comprar 4,5 revistas? E $\sqrt{3}$ revistas? Justifique sua resposta. **c)** Não; não; só é possível comprar um número natural de revistas.

d) Você pode traçar uma reta por esses pontos para representar o gráfico? Por quê? **d)** Não, porque a quantidade de revistas é uma grandeza discreta, ela é representada pelos números naturais, não pelos reais.

Pense mais um pouco...

As resoluções dos **itens a** a **c** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para o **item c**, discuta com os estudantes uma possível resposta em que o número de revistas a serem compradas só pode ser um número natural, pois compramos revistas por inteiro e não parte delas.

No **item d**, após ter realizado diversas atividades em que é necessário determinar a lei de formação de uma função, os estudantes farão o mesmo nos **itens a** e **b**, mas o foco principal será observar por que essa função não pode ser representada por uma reta e o que significa ser uma grandeza discreta. Explore com os estudantes exemplos de outras situações que envolvem grandezas discretas.

2. Função polinomial do 1º grau

Habilidade da BNCC:
EF09MA06.

Neste tópico, exploramos a representação algébrica e gráfica de uma função polinomial do 1º grau, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA06).

Verifique se é necessário fazer uma breve revisão do que é um polinômio. Questione os estudantes sobre o motivo da restrição $a \neq 0$. Pergunte como ficaria a lei de formação caso a fosse igual a zero. Eles devem concluir que a lei não seria dada por um polinômio do 1º grau, mas por uma constante. Sugerimos trabalhar o gráfico de algumas funções do tipo $y = b$, em que b é um número real qualquer, a fim de possibilitar aos estudantes distinguir o comportamento desse tipo de função em relação ao de funções polinomiais do 1º grau.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 17** e dos **exercícios 19** a **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Comente com os estudantes que o **exercício 19, item d**, pede que se calcule o zero da função f e que o procedimento para obtermos o zero de qualquer função é resolver a equação $f(x) = 0$.

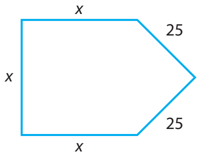
Explore o **exercício 20** solicitando aos estudantes que respondam: x pode assumir o valor 1 000 000 000? (Resposta: Sim.) Existe x de modo que y seja igual a 60? (Resposta: Não.)

2 Função polinomial do 1º grau

Considere o pentágono da figura ao lado. Nele, as medidas são dadas em centímetro. A medida do perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a x. Indicando a medida do perímetro por y, obtemos:

$$y = 3x + 50$$

A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de função polinomial do 1º grau.



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

> Uma **função polinomial do 1º grau** é toda função dada por uma lei de formação do tipo $y = ax + b$, sendo os coeficientes a e b números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

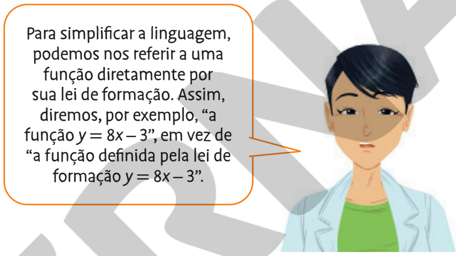
Observe outros exemplos de funções polinomiais do 1º grau, dos quais destacamos os valores de a e b.

a) $y = 2x - 1$, sendo $a = 2$ e $b = -1$.

b) $y = -\frac{3}{2}x + 5$ sendo $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 5$.

c) $y = -5x$, sendo $a = -5$ e $b = 0$. Em casos como este, nos quais $b = 0$, chamamos a função polinomial do 1º grau de **função linear**.

d) $y = \frac{x}{2}$ sendo $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$.



Para simplificar a linguagem, podemos nos referir a uma função diretamente por sua lei de formação. Assim, diremos, por exemplo, "a função $y = 8x - 3$", em vez de "a função definida pela lei de formação $y = 8x - 3$".

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Identifique as leis que representam funções polinomiais do 1º grau. **17.** Alternativas **a**, **b**, **d**, **f**.

a) $y = x + 3$
b) $y = -5x + 1$
c) $y = x^2 - 3x$
d) $y = -4x$
e) $y = x^2 - 5x + 6$
f) $y = 2 - x$

18 Dados a e b, escreva a lei de cada função polinomial do 1º grau, em que $y = ax + b$.

a) $a = 2$ e $b = -1$ **18. a)** $y = 2x - 1$

b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$ **18. b)** $y = \frac{x}{2}$

c) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$ **18. c)** $y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$

d) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$ **18. d)** $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

19 Dada a função definida pela lei $f(x) = 5x - 4$ com x real, determine:

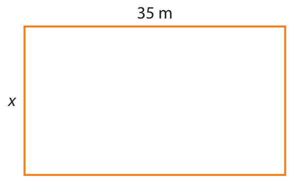
a) $f(-1)$ **19. a)** $f(-1) = -9$

b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$ **19. b)** $f\left(-\frac{3}{5}\right) = -7$

c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 6$; **19. c)** $x = 2$

d) o valor de x para que se tenha $f(x) = 0$. **19. d)** $x = \frac{4}{5}$

20 Considere o retângulo:



NELSON MATSUDA/
ARQUIVO DA EDITORA

Determine: **20. a)** $y = 2x + 70$ **20. b)** 95 m

a) a medida do perímetro y em função de x;
b) a medida do perímetro para $x = 12{,}5$ metros;
c) o valor de x para $y = 90$ metros. **20. c)** 10 m

21 Considerando um quadrado cujo lado mede x cm, determine: **21. a)** $p = 4x$

a) a medida do perímetro em função de x;
b) a medida do perímetro para $x = 10$. **21. b)** 40 cm

22 A lei que fornece a medida da temperatura T, em grau Celsius, de ebulição da água de acordo com a medida da altitude h, em metro, é: $T = 100 - 0{,}001h$.

Responda no caderno às questões a seguir.

a) Qual é a medida da temperatura de ebulição da água a 2 400 m de altitude? **22. a)** 97,6 °C

b) Qual é a medida da temperatura de ebulição da água ao nível do mar? **22. b)** 100 °C

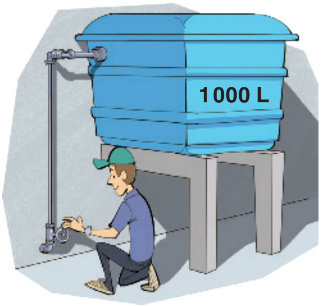
23 Uma caixa-d’água de 1 000 L de capacidade é alimentada por um registro que, totalmente aberto, despeja 25 L de água a cada 3 minutos. **23. a)** 120 minutos ou 2 horas.

a) Considerando que a caixa-d’água esteja vazia, em quanto tempo ela ficará cheia depois que o registro for totalmente aberto?

b) Se o registro permanecer totalmente aberto por 15 minutos, quantos litros de água serão despejados na caixa-d’água durante esse tempo?

c) Faça um quadro indicando a medida do volume de água que haverá na caixa-d’água de 15 em 15 minutos até ela ficar cheia.

d) Qual é a lei da função que representa a medida do volume de água v em função da medida do tempo t do registro totalmente aberto?



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

23. b) 125 litros. **23. c)** Construção de quadro. **23. d)** $v = 25 \cdot \frac{t}{3}$

Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta não perpendicular ao eixo x.

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos representar graficamente a função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = 2x + 1$.

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
−1	−1	(−1, −1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)

Indicação dos pontos determinados no quadro

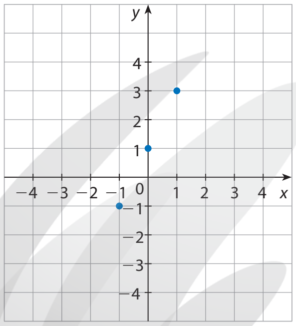
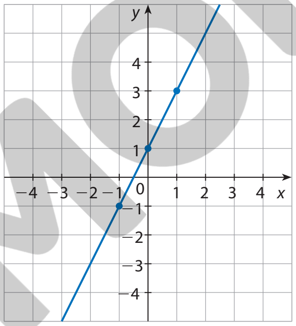


Gráfico da função



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como uma reta pode ser determinada por dois pontos distintos, então, para construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, é suficiente representar dois pontos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por esses pontos.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 22** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para complementar o **exercício 22**, peça aos estudantes que pesquisem as diferentes altitudes encontradas no Brasil e, em seguida, organizem os dados em uma tabela comparando as diferentes temperaturas de ebulição da água nessas altitudes. Essa pesquisa pode ser feita com o auxílio do professor de Geografia, promovendo um trabalho interdisciplinar.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 23**.

a) A cada 3 minutos, o registro despeja 25 litros de água, em um crescimento diretamente proporcional, o que nos possibilita escrever a seguinte proporção:

$\frac{t}{v} = \frac{3}{25}$, em que t é a medida do tempo decorrido para despejar v litros de água na caixa.

Então, para $v = 1000$, temos:

$$\frac{t}{1000} = \frac{3}{25} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 1000}{25} = 120$$

A caixa estará cheia após 120 minutos, ou seja, após 2 horas.

b) Do mesmo modo, aos 15 minutos, podemos escrever:

$$\frac{15}{v} = \frac{3}{25} \Rightarrow v = \frac{15 \cdot 25}{3} = 125$$

A cada 15 minutos a caixa enche 125 litros.

c) Como a cada 15 minutos o registro despeja 125 litros de água, podemos montar o quadro a seguir:

t (medida do tempo, em minuto)	v (quantidade de água, em litro)
0	0
15	125
30	250
45	375
60	500
75	625
90	750
105	875
120	1 000

d) A lei da função é:

$$v(t) = \frac{25}{3}t$$

Pergunte aos estudantes por que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau não pode ser uma reta vertical. Eles devem responder que uma reta vertical não representa o gráfico de função, pois para um único valor de x corresponderia mais de um valor de y.

Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

Solicite aos estudantes que, na função do **exemplo a**, atribuam a x quatro números inteiros e consecutivos e calculem os respectivos valores de y. Em seguida, pergunte a eles o que acontece com a variação dos valores de y cada vez que x aumenta 1 unidade.

Pergunte também se isso é uma regularidade para essa função, isto é, se acontece sempre. Espera-se que eles percebam que y aumenta 2 unidades e que, para essa função, isso é uma regularidade, acontece sempre que x aumenta 1 unidade.

Solicite que façam o mesmo para a função do **exemplo b**. Espera-se que eles percebam que sempre que x aumenta 1 unidade, y diminui 2 unidades.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 24** a **27** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

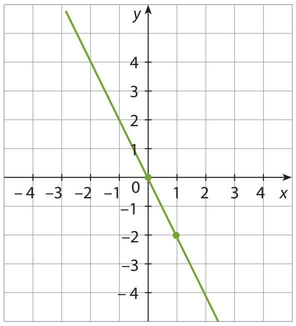
Após resolverem o **exercício 24**, pergunte aos estudantes o que acontece com a variação dos valores de y cada vez que x aumenta 1 unidade. Pergunte também se isso é uma regularidade para essa função. Eles devem responder que y diminui 1 unidade e que, para essa função, isso é uma regularidade.

b) Vamos representar graficamente a função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = -2x$.

Quadro com dois pontos do gráfico da função

x	$y = -2x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	–2	(1, –2)

Gráfico da função



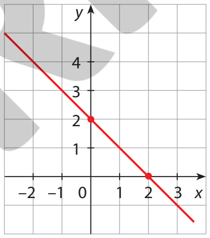
SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax$ é sempre uma reta, não perpendicular ao eixo x, que passa pela origem do plano cartesiano. A função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = -2x$ é um exemplo de função com essa característica.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Observe o gráfico de uma função para responder no caderno às questões.



a) Qual é o valor de y quando $x = 2$? **24. a)** $y = 0$

b) Para que valor de x obtemos $y = 4$? **24. b)** $x = -2$

25 O par ordenado (2, 8) representa um ponto do gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax$.

a) Determine o valor de a da lei dessa função. **25. a)** $a = 4$

b) Determine o valor de y para $x = 3{,}5$. **25. b)** $y = 14$

c) Dê o valor de x para $y = 0$. **25. c)** $x = 0$

d) Represente graficamente essa função. Utilize uma folha de papel quadriculado para representar o plano cartesiano. **25. d)** Construção de gráfico.

26 Considere a função polinomial do 1º grau definida pela lei $y = x - 3$.

a) Represente graficamente essa função. **26. a)** Construção de gráfico.

b) Qual é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x? **26. b)** $x = 3$

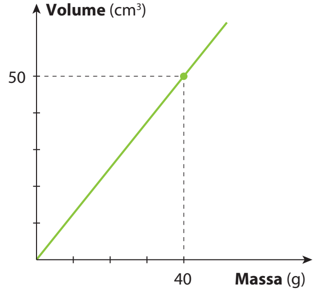
c) Qual é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y? **26. c)** $y = -3$

27 O gráfico ao lado mostra a variação da medida do volume de álcool em função da medida de sua massa.

Determine no caderno:

a) a lei da função; **27. a)** $y = 1{,}25x$

b) a massa (em grama) de 30 cm³ de álcool. **27. b)** 24 gramas.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

28 Usando uma folha de papel quadriculado, represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções polinomiais do 1º grau dadas pelas leis: $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = -2x + 6$.

Em seguida, responda às questões.:

a) Para que valor de x obtemos $f(x) = 0$? **28. a)** $x = -\frac{1}{3}$

b) Qual é a abscissa do ponto onde o gráfico da função g corta o eixo x? **28. b)** $x = 3$

c) Qual é a ordenada do ponto onde o gráfico da função f corta o eixo y? **28. c)** $y = 1$

d) Para que valor de x obtemos $f(x) = g(x)$? **28. d)** $x = 1$

29 No papel quadriculado, construa o gráfico, em um mesmo plano cartesiano, das funções polinomiais do 1º grau dadas pelas leis: $h(x) = -3x + 1$ e $i(x) = -3x + 6$.

Em seguida, responda às questões. **29. a)** $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; $(0, 1)$

a) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de h corta o eixo x? E o eixo y?

b) Quais são as coordenadas do ponto em que o gráfico de i corta o eixo x? E o eixo y? **29. b)** $(2, 0)$; $(0, 6)$

c) Os gráficos de h e de i têm ponto comum? **29. c)** Não.

d) Para que valor de x obtemos $h(x) = i(x)$? **29. d)** Não existe valor de x para que $h(x) = i(x)$.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Em uma folha de papel quadriculado e em um mesmo plano cartesiano para cada item, construa os gráficos das funções: **1.** Construção de gráfico.

a) $y = -0{,}5x + 3$ e $y = 0{,}5x + 3$

b) $y = -x + 3$ e $y = x + 3$

c) $y = -2x + 3$ e $y = 2x + 3$

d) $y = -3x + 3$ e $y = 3x + 3$

O objetivo do exercício **2** é possibilitar ao estudante antecipar, de modo intuitivo, os conceitos de função crescente e de função decrescente.

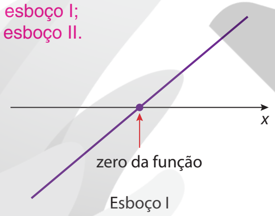
2 Observando os gráficos das funções $y = ax + b$ do exercício anterior, responda às questões.

a) Quando $a > 0$, ao aumentar o valor atribuído a x, também aumenta (cresce) o valor de y? Se tivesse que classificar essas funções polinomiais do 1º grau com $a > 0$ entre função crescente ou função decrescente, por qual delas você optaria? **2. a)** Sim. Espera-se que o estudante opte por função crescente.

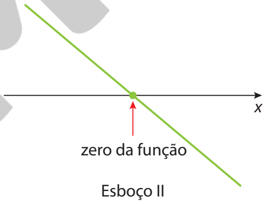
b) Quando $a < 0$, ao aumentar o valor atribuído a x, também aumenta (cresce) o valor de y? Se tivesse que classificar essas funções polinomiais de 1º grau com $a < 0$ como função crescente ou função decrescente, por qual delas você optaria? **2. b)** Não. Espera-se que o estudante opte por função decrescente.

3 ***Hora de criar*** – Escreva duas leis de função polinomial do 1º grau $y = ax + b$, nas quais os valores de a sejam opostos. Troque-as com um colega. Depois que cada um construir os gráficos das funções dadas pelo colega, discutam e identifiquem em qual dos esboços a seguir a inclinação da reta mais se aproxima dos gráficos em que $a > 0$ e em qual deles a inclinação mais se aproxima dos gráficos em que $a < 0$.

3. Para $a > 0$, esboço I;
para $a < 0$, esboço II.



Esboço I



Esboço II

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 28** e **29** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Peça aos estudantes que resolvam os **exercícios 28** e **29** individualmente e, em seguida, solicite que troquem de caderno com outro colega, de modo que cada um corrija a resolução do outro.

Comente as posições relativas das retas que representam os gráficos de f e g (concorrentes, no **exercício 28**) e de h e i (paralelas, no **exercício 29**).

Pense mais um pouco...

A resolução do **exercício 1** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

A seção antecipa informalmente os conceitos de função crescente e função decrescente e possibilita aos estudantes optar pela denominação adequada às características da variação.

Variação de uma função polinomial do 1º grau

Neste tópico, apresentamos uma definição formal de função crescente e de função decrescente. Retome com os estudantes o que aconteceria com uma função cuja lei de formação fosse

$f(x) = ax + b$, com $a = 0$.

Eles deverão concluir que ela não seria uma função polinomial do 1º grau.

Neste momento, se possível, leve os estudantes ao laboratório de informática da escola, providenciando que nos computadores esteja instalado algum *software* de geometria dinâmica, como o Geogebra (disponível em: https://www.geogebra.org/classic; acesso em: 24 jul. 2022).

Ao utilizar as ferramentas desse *software*, proponha a eles que digitem $f(x) = ax + b$ no campo **Entrada** e pressionem **Enter**. Automaticamente é gerado um gráfico e são criados os controles deslizantes **a** e **b**. Oriente os estudantes a utilizar esses controles deslizantes para inferir como os coeficientes a e b influenciam no comportamento do gráfico de uma função polinomial do 1º grau.

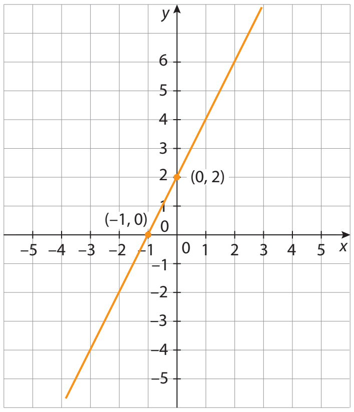
Esse tipo de atividade possibilita desenvolver a **competência geral 5**, pois os estudantes podem utilizar tecnologias digitais para criar conhecimentos e para resolver problemas.

Variação de uma função polinomial do 1º grau

Observe os gráficos das funções $y = 2x + 2$ e $y = -3x + 1$, em que x pode ser qualquer número real.

Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = 2x + 2$

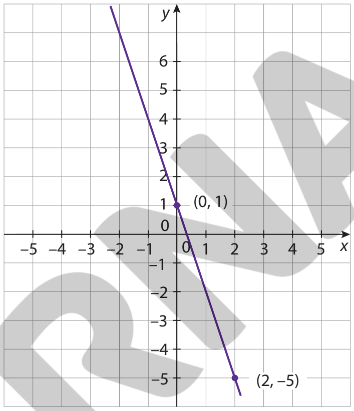
x	y	Par ordenado
0	2	(0, 2)
–1	0	(–1, 0)



Aumentando o valor de x, o valor de y aumenta; por isso, dizemos que a função é **crescente**. Observe que na lei $y = 2x + 2$ temos $a = 2$.

Quadro com alguns pontos do gráfico de $y = -3x + 1$

x	y	Par ordenado
0	1	(0, 1)
2	–5	(2, –5)



Aumentando o valor de x, o valor de y diminui; por isso, dizemos que a função é **decrescente**. Observe que na lei $y = -3x + 1$ temos $a = -3$.

ILUSTRAÇÕES: REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

De modo geral, verificamos:

- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente a é maior que zero ($a > 0$);
- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **decrescente** quando o coeficiente a é menor que zero ($a < 0$).

Acompanhe mais exemplos.

a) $f(x) = -\frac{x}{5}$ é decrescente, pois $a < 0$.

b) $g(z) = \sqrt{3}z$ é crescente, pois $a > 0$.

Observação

▶ Existem funções que não são crescentes nem decrescentes. Por exemplo:

a) $h(y) = -10$

b) $p(k) = \pi$

Funções como essas são chamadas de **constantes**, e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x.

PARA SABER MAIS

Uso do computador: retas

Na internet, existem *softwares* de geometria dinâmica gratuitos que apresentam muitas ferramentas, entre elas uma que nos auxilia no estudo das funções. É possível, por exemplo, construir o gráfico de qualquer função digitando a lei correspondente no campo "Entrada" na tela inicial e, em seguida, teclando "Enter".

Por meio desse recurso, podemos estudar o que acontece com o gráfico de funções do tipo $f(x) = ax + b$ à medida que os coeficientes a e b variam.

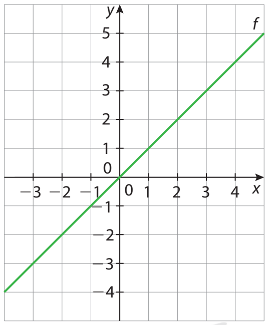
1. Ao digitar $f(x) = ax + b$ e teclar "Enter" no campo "Entrada" da tela inicial do *software*, aparecerá uma janela.
2. Clicando em "Criar Controles Deslizantes", aparecerão os controles deslizantes correspondentes aos coeficientes a e b de $f(x) = ax + b$, além do gráfico para $a = 1$ e $b = 1$.
3. É possível movimentar os cursores dos controles deslizantes para variar os valores dos coeficientes a e b.

Agora é com você!

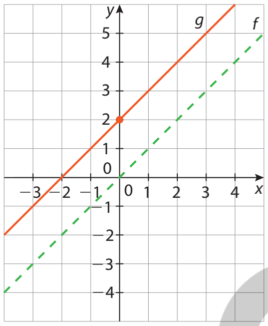
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. $p(x)$: bissetriz dos quadrantes pares; $q(x)$: paralela à bissetriz dos quadrantes pares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, 4); $t(x)$: paralela à bissetriz dos quadrantes pares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, –5). Construção de gráficos.

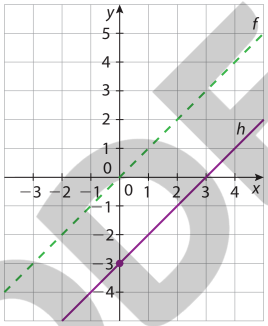
1 Considere os gráficos das funções $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x - 3$.



Bissetriz dos quadrantes ímpares.



Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, 2).



Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, –3).

ILUSTRAÇÕES: REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, responda: como seria o gráfico das funções $p(x) = -x$, $q(x) = -x + 4$ e $t(x) = -x - 5$?

Se for possível, construa esses gráficos usando um *software* de geometria dinâmica e confira suas respostas.

2 Imagine o que acontece se modificarmos o coeficiente a. Qual é o papel do coeficiente a no gráfico de $f(x) = ax + b$? **2.** O coeficiente *a* determina a inclinação da reta.

3 Imagine se modificarmos o coeficiente b. Em seguida, responda às questões.

a) Qual é o papel do coeficiente b no gráfico de $f(x) = ax + b$? **3. a)** O coeficiente *b* determina a translação vertical da reta.

b) Podemos associar esse coeficiente à ordenada de um ponto. Que ponto é esse? **3. b)** Ponto de intersecção da reta com o eixo *y*.

Para saber mais

Para a construção dos gráficos da seção, é possível usar *softwares* de geometria dinâmica para representar gráficos em um sistema de coordenadas, que possibilitam visualizar uma função e fazer alguns cálculos matemáticos.

Os gráficos da **atividade 1** do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Exercícios propostos

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 30**.

a) Decrescente, pois: $a = -2 < 0$

b) Crescente, pois: $a = 7 > 0$

c) Crescente, pois: $a = 1 > 0$

d) Decrescente, pois: $a = -\frac{1}{3} < 0$

e) Decrescente, pois: $a = -1 < 0$

f) Crescente, pois: $a = 6 > 0$

g) Crescente, pois: $a = \pi \simeq 3{,}14 > 0$

h) Crescente, pois: $a = 0{,}001 > 0$

No **exercício 31**, peça aos estudantes que construam os esboços dos gráficos utilizando os pontos dados, antes de responderem aos itens.

Acompanhe uma possível resolução para esse exercício.

a) Decrescente, pois do ponto $(-3, 4)$ para o ponto $(0, 0)$ a abscissa x aumenta 3 unidades, enquanto a ordenada y diminui 4 unidades.

b) Crescente, pois do ponto $(-3, -4)$ para o ponto $(0, 0)$ a abscissa x aumenta 3 unidades enquanto a ordenada y também aumenta, só que 4 unidades.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau

Sugerimos utilizar um *software* de geometria dinâmica para representar gráficos de funções polinomiais do 1º grau e incentivar os estudantes a estudar o sinal da função. Oriente-os a observar o ponto $(x', 0)$ do gráfico e a verificar o que acontece com as imagens (valores da variável dependente) para valores de x tais que $x < x'$ e para valores de x tais que $x' < x$. Para funções crescentes, eles perceberão que as imagens y serão negativas quando $x < x'$ e serão positivas para $x' < x$. Analogamente, para funções decrescentes, as imagens y são positivas para $x < x'$ e negativas para $x' < x$.

Após observarem essas características das funções estudadas, solicite que leiam o conteúdo do livro do estudante e as sistematizem elaborando um texto de maneira coletiva.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 Classifique cada função em crescente ou decrescente.

a) $f(x) = -2x + 3$ **30. a)** Decrescente.

b) $g(x) = 7x + 1$ **30. b)** Crescente.

c) $h(x) = x$ **30. c)** Crescente.

d) $m(x) = -\frac{x}{3}$ **30. d)** Decrescente.

e) $n(x) = 5 - x$ **30. e)** Decrescente.

f) $p(x) = \sqrt{2} + 6x$ **30. f)** Crescente.

g) $q(x) = \pi x$ **30. g)** Crescente.

h) $r(x) = -5 + 0{,}001x$ **30. h)** Crescente.

31 Responda às questões sobre função polinomial do 1º grau.

a) A função cujo gráfico passa pelos pontos $(-3, 4)$ e $(0, 0)$ é crescente ou decrescente? **31. a)** Decrescente.

b) A função cujo gráfico passa pelos pontos $(-3, -4)$ e $(0, 0)$ é crescente ou decrescente? **31. b)** Crescente.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau

Estudar o sinal de uma função $y = f(x)$ é determinar os valores reais de x para que:
- a função se anule ($y = 0$);
- a função seja positiva ($y > 0$);
- a função seja negativa ($y < 0$).

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe dois exemplos.

a) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei: $y = 2x - 4$.

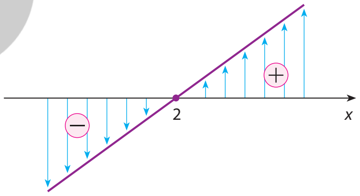
Podemos fazer esse estudo por meio do esboço do gráfico da função. Para isso, calculamos o valor de x para o qual essa função se anula.

Para $y = 0$, obtemos:

$2x - 4 = 0$, ou seja, $x = 2$.

Logo, essa função se anula quando $x = 2$.

Observando ainda que na lei dessa função $y = 2x - 4$, $a = 2$, portanto $a > 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Estudo do sinal

- Para $x = 2$, ponto do eixo x, obtemos: $y = 0$
- Para $x > 2$, pontos acima do eixo x, obtemos: $y > 0$
- Para $x < 2$, pontos abaixo do eixo x, obtemos: $y < 0$

b) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei: $y = -2x + 4$.

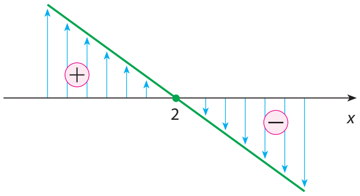
Inicialmente, vamos calcular o valor de x para o qual essa função se anula.

Para $y = 0$, obtemos:

$-2x + 4 = 0$, ou seja, $x = 2$.

Logo, essa função se anula quando $x = 2$.

Observando ainda que em $y = -2x + 4$, $a = -2$, portanto $a < 0$, podemos esboçar o gráfico e fazer o estudo do sinal.



Estudo do sinal

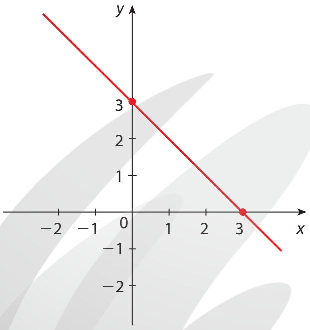
- Para $x = 2$, ponto do eixo x, obtemos: $y = 0$
- Para $x > 2$, pontos abaixo do eixo x, obtemos: $y < 0$
- Para $x < 2$, pontos acima do eixo x, obtemos: $y > 0$

33. a) $x = 4$: $y = 0$; $x > 4$: $y > 0$; $x < 4$: $y < 0$
b) $x = 2$: $y = 0$; $x > 2$: $y < 0$; $x < 2$: $y > 0$
c) $x = \frac{5}{2}$: $y = 0$; $x > \frac{5}{2}$: $y > 0$; $x < \frac{5}{2}$: $y < 0$
d) $x = -\frac{1}{2}$: $y = 0$; $x > -\frac{1}{2}$: $y < 0$; $x < -\frac{1}{2}$: $y > 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Considere o seguinte gráfico de uma função polinomial do 1º grau.



Responda:

a) Para que valor de x obtemos $y = 0$?
b) Para que valores de x obtemos $y > 0$?
c) Para que valores de x obtemos $y < 0$?

32. a) $x = 3$ **32. b)** $x < 3$ **32. c)** $x > 3$

33 Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau.

a) $y = 2x - 8$
b) $y = -3x + 6$
c) $y = 2x - 5$
d) $y = -2x - 1$

34 Considere a função polinomial do 1º grau definida por $y = ax + b$. Sabe-se que $a > 0$ e que o ponto determinado pelo par (5, 0) pertence ao gráfico dessa função. Determine o sinal de y em cada caso. **34. b)** Negativo.

a) $x = -2$ **34. a)** Negativo.
b) $x = 0$
c) $x = 4{,}99$
d) $x = 5{,}01$
e) $x = 10$

34. c) Negativo. **34. d)** Positivo. **34. e)** Positivo.

35 ***Hora de criar*** – Crie uma função polinomial do 1º grau de modo que:

- o zero dessa função seja 2;
- o gráfico para $x > 2$ esteja acima do eixo das abscissas, ou seja, $y > 0$.

Quantas funções assim existem?

35. Existem infinitas funções que satisfazem os critérios, por exemplo: $y = x - 2$, $y = +\frac{x}{2} - 1$; $y = 2x - 4$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 32** a **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Antes de responderem ao **exercício 34**, oriente os estudantes a fazer um esboço do gráfico da função referida no enunciado.

O **exercício 35** merece atenção especial por possibilitar infinitas respostas. Por isso, é preciso dar condições para que todos os estudantes tenham certeza de que a “sua função” está de acordo com o enunciado, embora aquela não seja a única resposta possível.

Vale a pena sugerir que eles confiram as próprias respostas, retomando o enunciado e testando as condições na função escolhida. Além disso, a troca com outros colegas possibilitará verificar eventuais erros, assim como observar que há outras possibilidades de resposta. Pode-se sugerir aos estudantes que utilizem um *software* de geometria dinâmica para construir o gráfico nele e comparar se as condições do exercício foram contempladas.

Para saber mais

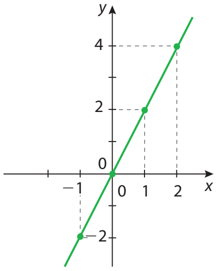
O contexto dessa seção possibilita desenvolver a habilidade (EF09MA08). Pergunte aos estudantes se, caso a velocidade não fosse constante, poderíamos dizer que as grandezas “distância percorrida” e “tempo” são diretamente proporcionais. Espera-se que eles respondam que não. Como a velocidade é a razão entre as medidas da distância percorrida e do tempo, se a velocidade não fosse constante, as razões entre as medidas de distância e tempo seriam diferentes, ou seja, essas grandezas não seriam diretamente proporcionais.

PARA SABER MAIS

Proporcionalidade na função linear

Vamos analisar a função linear dada pela lei $y = 2x$.

x	y
–1	–2
0	0
1	2
2	4



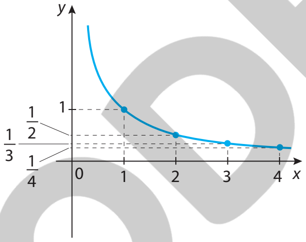
Observe que os valores de *y* são **diretamente proporcionais** aos valores de *x*, porque, dobrando o valor de *x*, o valor de *y* também dobra; triplicando o valor de *x*, o valor de *y* também triplica, e assim por diante.

Se há **proporcionalidade direta** entre os valores reais de *x* e *y*, existe uma função linear que relaciona as variáveis *x* e *y*, ou seja, uma função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax$, com *a* real, $a \neq 0$, *x* e *y* reais. Reciprocamente, se as variáveis *x* e *y* estão relacionadas por uma função linear, então *x* e *y* são **diretamente proporcionais**.

Outras funções apresentam **proporcionalidade inversa**, e algumas não apresentam proporcionalidade direta nem inversa entre os valores de *x* e de *y*. Acompanhe alguns exemplos.

a) $y = \frac{1}{x}$

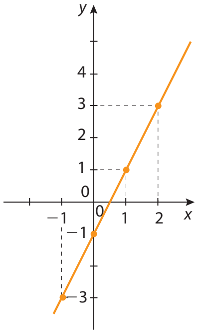
x	y
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$



Observe que os valores de *y* são **inversamente proporcionais** aos valores de *x*, porque, dobrando o valor de *x*, o valor de *y* se reduz pela metade; triplicando o valor de *x*, o valor de *y* se reduz a um terço, e assim por diante.

b) $y = 2x - 1$

x	y
–1	–3
0	–1
1	1
2	3



Observe que não há proporcionalidade direta nem inversa entre os valores de *x* e de *y*.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Um automóvel percorre certa distância com velocidade constante de 50 km/h.

a) $y = 50x$

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância percorrida (*y*), em quilômetro, e o tempo (*x*), em hora?

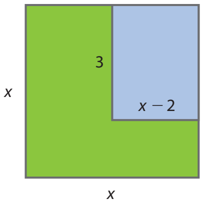
b) Considerando que a velocidade é constante, as grandezas distância percorrida e tempo são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não são proporcionais? Por quê?

b) São diretamente proporcionais. Exemplo de resposta: porque estão relacionadas por uma função linear.

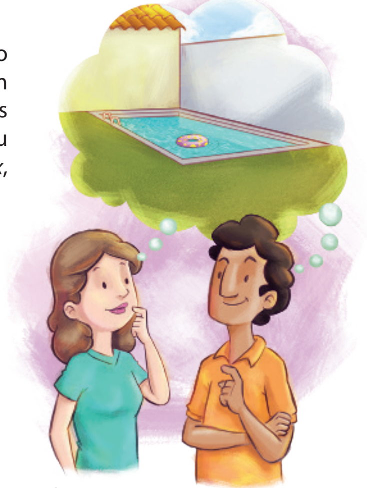
ILUSTRAÇÕES: REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

3 Função polinomial do 2º grau

Gustavo e Nicole estudam as possibilidades de uso do quintal de sua casa para a construção de um terraço com piscina ladeada por um gramado cuja medida da área eles precisam decidir. Nicole fez o croqui e Gustavo representou algebricamente a medida da área do gramado em função de x, com as medidas indicadas em metro. Observe:



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área do quadrado é: x^2

A medida da área da piscina, representada pelo retângulo azul, é: $3(x – 2)$

Então, a medida da área do gramado é: $x^2 – 3(x – 2)$, ou seja, $x^2 – 3x + 6$

Indicando essa medida de área por y, obtemos: $y = x^2 – 3x + 6$.

A função definida pela lei $y = x^2 – 3x + 6$ é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** (ou **função quadrática**).

> Uma **função polinomial do 2º grau** é uma função dada por uma lei de formação do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

- Considerando $f(x) = x^2 – 3x + 6$ e os valores $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$, é possível afirmar que o gráfico de $f(x)$ é uma reta? Como $f(0) = 6$, $f(1) = 4$ e $f(2) = 4$, espera-se que os estudantes percebam o gráfico não pode ser uma reta, pois a reta que passa por (0, 6) e (1, 4) não é a mesma que passa por (1, 4) e (2, 4).

Observe outros exemplos de funções polinomiais do 2º grau, em que destacamos os valores de a, b e c.

a) $y = x^2 – 5x + 4$, sendo $a = 1$, $b = –5$ e $c = 4$

b) $y = 2x^2 + 5x – 2$, sendo $a = 2$, $b = 5$ e $c = –2$

c) $y = x^2 – 9$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = –9$

d) $y = –3x^2 + 2x$, sendo $a = –3$, $b = 2$ e $c = 0$

e) $y = x^2$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

36 Na situação inicial desta página, se Gustavo e Nicole reservarem para o terraço (incluindo a piscina) um quadrado de lado medindo 8 m, quantos metros quadrados de gramado eles deverão comprar? **36.** 46 m²

37 Sendo $f(x) = x^2 – 5x + 6$, determine:

a) $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$; **37. a)** $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 2$

b) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 0;

c) os valores de x de modo que $f(x)$ seja 20.

37. b) $x = 2$ ou $x = 3$ **37. c)** $x = –2$ ou $x = 7$

3. Função polinomial do 2º grau

Habilidades da BNCC: **EF09MA06** e **EF09MA09**.

Verifique a necessidade de revisar com os estudantes a resolução de equações do 2º grau e de fatoração de expressões algébricas. Neste tópico, ampliamos o estudo das funções trabalhando com funções polinomiais do 2º grau. Os estudantes podem, assim, mobilizar e aprofundar o desenvolvimento das habilidades (EF09MA06) e (EF09MA09).

Assim como na abordagem inicial de outros conceitos importantes, fazemos um primeiro contato com função polinomial do 2º grau por meio de uma situação contextualizada, na qual um projeto arquitetônico apresenta uma medida generalizada x do lado de um quadrado e propõe analisar a construção de um jardim próximo de uma piscina.

Problemas do cotidiano muitas vezes podem ser generalizados por meio de expressões algébricas. Em geral, quando trabalhamos com área de superfícies poligonais, recaímos em uma função polinomial do 2º grau.

Para que os estudantes entendam melhor as restrições que um contexto pode impor à estruturação da resolução por meio da Álgebra, considerando os valores das variáveis em metro, discuta com eles as possibilidades de x valer 2 ou valer 3. Eles devem concluir que, se x for igual a 2, a piscina teria a medida da largura igual a zero; logo, não é possível. Se x for igual a 3, a largura da piscina medirá 1 m e a parte do gramado será um retângulo com lados medindo 2 m e 3 m.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 36** e **37** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 38** a **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

No **exercício 38**, peça aos estudantes que, por meio de fatorações, encontrem outras figuras que tenham a mesma medida da área. Por exemplo, no **item b**, em que a medida da área do triângulo é dada por $5x^2 - 3x$, temos:

$$5x^2 - 3x = x(5x - 3)$$

$$5x^2 - 3x = 5x\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

Nesse caso, um retângulo cujas dimensões são x e $(5x - 3)$ ou outro que tenha as dimensões $5x$ e $\left(x - \frac{3}{5}\right)$ têm a mesma medida da área do triângulo do **item b**. Em contextos como o desse exercício, incentive os estudantes a determinar, ainda que de maneira intuitiva, o domínio das funções. No **item a**, por exemplo, por se tratar das medidas do lado de um retângulo, temos:

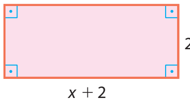
- $x + 2 > 0$
  $x > -2$
- $2x - 1 > 0$
  $2x > 1$
  $x > \frac{1}{2}$

Assim, x deve ser maior do que $\frac{1}{2}$ no contexto do **item a**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

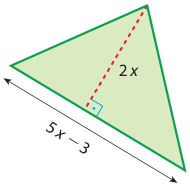
38 Expresse a medida da área y de cada polígono em função de x.

a)



38. a) $y = 2x^2 + 3x - 2$

b)



38. b) $y = 5x^2 - 3x$

39 Sendo $f(x) = x^2 + 3x$, determine o que se pede em cada item.

a) $f(0)$ **39. a)** $f(0) = 0$

b) Os valores de x para que $y = 0$. **39. b)** $x = 0$ ou $x = -3$

c) $f(2)$; **39. c)** $f(2) = 10$

d) Os valores de x para que $y = 10$. **39. d)** $x = -5$ ou $x = 2$

40 Sendo $f(x) = 2x^2 + 5$, determine no caderno:

a) o valor de $f(\sqrt{3})$; **40. a)** $f(\sqrt{3}) = 11$

b) os valores de x para que $f(x) = 21$. **40. b)** $x = \pm 2\sqrt{2}$

41 Expresse na forma $y = ax^2 + bx + c$ a medida do volume do paralelepípedo.

41. $y = 2x^2 + 6x + 4$

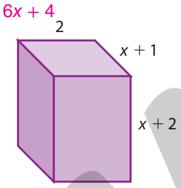
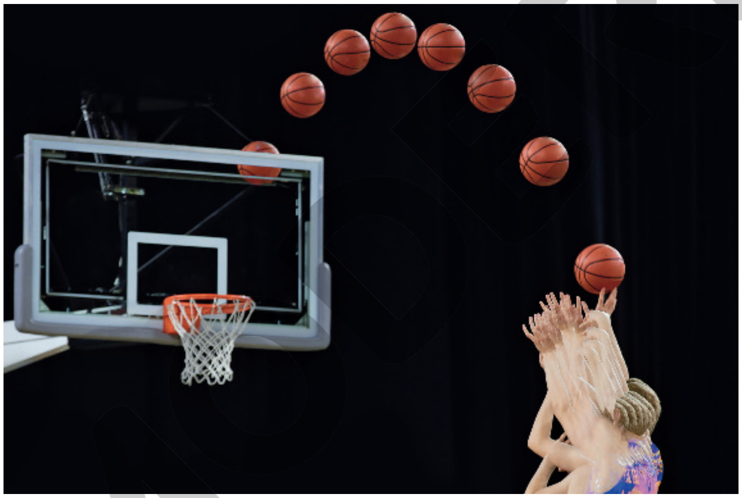


Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma curva chamada **parábola**.

CHARLIE RIEDEL/AP PHOTO/IMAGEPLUS



Fotocomposição da trajetória parabólica descrita por uma bola lançada por um jogador de basquete, em Houston, Texas, Estados Unidos. (Fotografia de 2015.)

Para construir o gráfico de uma função desse tipo, procedemos como no caso da função polinomial do 1º grau:

- Atribuímos valores a x e obtemos os correspondentes valores de y.
- Organizamos os dados obtidos em um quadro com os pares ordenados.
- Localizamos esses pontos no plano cartesiano.
- Se o conjunto de pontos localizados possibilitar que se perceba a linha que passa por eles, traçamos essa linha. Caso contrário, devemos obter e localizar mais pontos do gráfico.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos representar graficamente a função polinomial do 2º grau definida pela lei:
$y = x^2 - 2x - 3$

Para $x = -2$, obtemos: $y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$

Para $x = -1$, obtemos: $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$

Para $x = 0$, obtemos: $y = (0)^2 - 2 \cdot (0) - 3 = -3$

Para $x = 1$, obtemos: $y = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Para $x = 2$, obtemos: $y = (2)^2 - 2 \cdot (2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$

Para $x = 3$, obtemos: $y = (3)^2 - 2 \cdot (3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

Para $x = 4$, obtemos: $y = (4)^2 - 2 \cdot (4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = x^2 - 2x - 3$	(x, y)
–2	5	(–2, 5)
–1	0	(–1, 0)
0	–3	(0, –3)
1	–4	(1, –4)
2	–3	(2, –3)
3	0	(3, 0)
4	5	(4, 5)

Indicação dos pontos encontrados no quadro

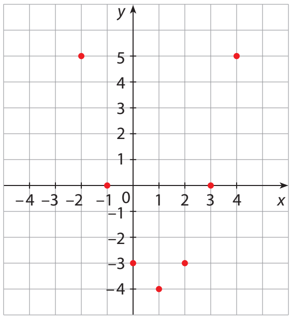
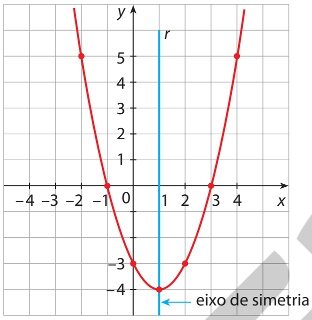


Gráfico da função



b) Vamos representar graficamente a função polinomial do 2º grau definida pela lei:
$y = -x^2 + 4x - 3$

Para $x = 0$, obtemos: $y = -(0)^2 + 4 \cdot (0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

Para $x = 1$, obtemos: $y = -(1)^2 + 4 \cdot (1) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$

Para $x = 2$, obtemos: $y = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$

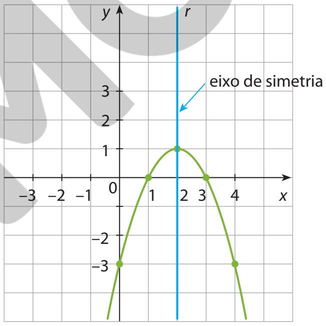
Para $x = 3$, obtemos: $y = -(3)^2 + 4 \cdot (3) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$

Para $x = 4$, obtemos: $y = -(4)^2 + 4 \cdot (4) - 3 = -16 + 16 - 3 = -3$

Quadro com alguns pontos do gráfico da função

x	$y = -x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	–3	(0, –3)
1	0	(1, 0)
2	1	(2, 1)
3	0	(3, 0)
4	–3	(4, –3)

Gráfico da função



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

No estudo da construção dos gráficos, iniciamos por atribuir a *x* valores convenientes para serem abscissas de pontos que se situam próximo do vértice, pois esse trecho representa a variação no comportamento da função (crescente/decrescente). Depois de estudar o cálculo das coordenadas do vértice, os estudantes terão mais autonomia para a escolha dos valores a serem atribuídos a *x*. Esclareça antecipadamente essa opção didática para os estudantes.

Destaque a existência do eixo de simetria da parábola nos gráficos das funções polinomiais do 2º grau, conceito que será usado adiante para a obtenção da expressão que determina as coordenadas do vértice.

Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

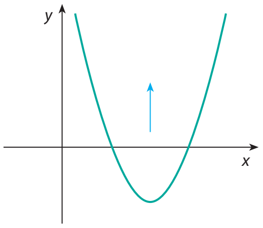
Se julgar pertinente, utilize os recursos de um *software* de geometria dinâmica incentivando os estudantes a descobrir o que determina a concavidade da parábola ser para baixo ou para cima. Eles podem explorar o gráfico de uma função genérica do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ e variar, um por vez, os coeficientes a, b e c atribuindo valores positivos e negativos a cada um deles. Ao atribuir valores negativos ao coeficiente a, poderão perceber que os gráficos obtidos têm concavidade para baixo e, ao atribuir valores positivos, concavidade para cima. Esse fato não precisa ser demonstrado nesta etapa do ensino, mas auxiliará os estudantes na resolução de problemas que envolvem o esboço de gráficos desse tipo de função.

Nesta página, apresentamos e definimos o vértice da parábola. Esse conceito será retomado para a obtenção das fórmulas das coordenadas do vértice.

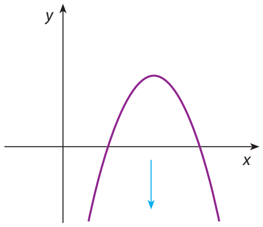
Concavidade da parábola

Conforme observamos nos gráficos dos dois exemplos anteriores, a parábola pode ter a **concavidade** voltada **para cima** ou **para baixo**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



concavidade para cima



concavidade para baixo

No primeiro exemplo ($y = x^2 - 2x - 3$), o coeficiente a é positivo, e a parábola tem a concavidade voltada para cima.

No segundo exemplo ($y = -x^2 + 4x - 3$), o coeficiente a é negativo, e a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Considerando a função polinomial $f(x)$ dada pela lei $y = ax^2 + bx + c$, verificamos:
- se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

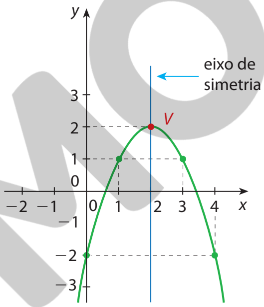
Vértice da parábola

Toda parábola tem um **eixo de simetria** e um **vértice** (V).

Observe os exemplos.

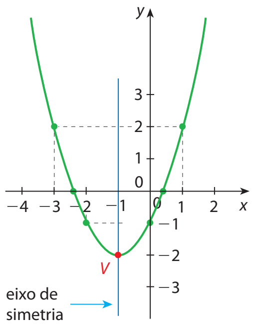
a) $p(x) = -x^2 + 4x - 2$

ILUSTRAÇÕES: REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA



Vértice: $V = (2, 2)$

b) $q(x) = x^2 + 2x - 1$



Vértice: $V = (-1, -2)$

O vértice da parábola é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo de simetria.

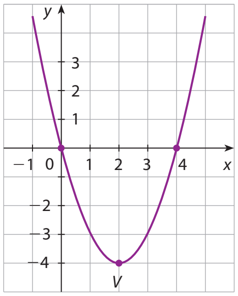
Observações

- O vértice de uma parábola corresponde ao **ponto de máximo** dessa parábola quando ela tem concavidade voltada para baixo e corresponde ao **ponto de mínimo** dessa parábola quando ela tem concavidade voltada para cima.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

42 Considere a parábola indicada no plano cartesiano.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

42. a) Positivo.

a) Qual é o sinal do coeficiente a?

b) Quais são as coordenadas do vértice da parábola? **42. b)** (2, –4)

42. c) $x = 0$ e $x = 4$

c) Para quais valores de x se obtém $y = 0$?

d) Identifique o ponto de intersecção entre o eixo x e o eixo de simetria da parábola.

42. d) (2, 0)

43 As medidas, em centímetro, das diagonais de um losango são expressas por $(x + 2)$ e $(2x + 4)$. Determine no caderno:

a) a medida da área y desse losango em função de x; **43. a)** $y = x^2 + 4x + 4$

b) para que valor de x esse losango tem área medindo 25 cm. **43. b)** $x = 3$

44 O gráfico de cada uma das funções a seguir é uma parábola. Determine no caderno os casos em que a parábola tem concavidade voltada para cima. **44.** Alternativas **a**, **d**, **e**.

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

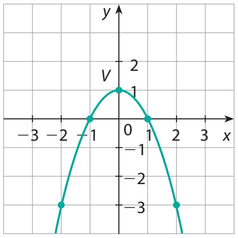
c) $y = -3x^2 + x - 4$

d) $y = x^2 + 5x$

e) $y = x^2$

f) $y = -x^2 + 9$

45 Considere a parábola a indicada no plano cartesiano.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine no caderno:

a) x quando $y = -3$; **45. a)** $x = -2$ e $x = 2$

b) x quando $y = 2$; **45. b)** Não existe.

c) y quando $x = 2$; **45. c)** $y = -3$

d) $f(1)$; **45. d)** $f(1) = 0$

e) as coordenadas do vértice. **45. e)** (0, 1)

46 Determine no caderno os valores de p na função definida pela lei $y = (p - 3)x^2 - 5x - 24$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para cima. **46.** $p > 3$

47 Determine no caderno os valores de p na função definida pela lei $y = (2p + 1)x^2 - 2x + 1$ para que a parábola tenha a concavidade voltada para baixo. **47.** $p < -\frac{1}{2}$

48 Uma função polinomial do 2º grau é definida pela lei:

$y = (m + 2)x^2 + (m + 3)x + m + 4$

Responda no caderno às questões a seguir.

a) Para que valores reais de m o gráfico dessa função tem concavidade voltada para baixo? **48. a)** $m < -2$

b) Para que valores reais de m o gráfico dessa função passa pelo ponto (0, 0)? **48. b)** $m = -4$

Gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Caso os estudantes estranhem as denominações ponto de máximo ou ponto de mínimo, comente que tais nomenclaturas se referem a pontos que têm ordenada máxima (maior do que a dos demais pontos) ou que têm ordenada mínima (menor do que a dos demais pontos).

Exercícios propostos

Os exercícios desta página trabalham a verificação do sinal do coeficiente a da lei da função.

No **exercício 42**, os estudantes obtêm esse sinal por meio da leitura do gráfico, enquanto nos **exercícios 44**, **46**, **47** e **48** o sinal é obtido pela leitura da lei ou por imposição de uma condição algébrica que resulta em uma equação a ser resolvida.

No **item a** do **exercício 48**, devemos impor a condição do coeficiente a ser negativo, logo:

$m + 2 < 0$

$m < -2$

No **item b** do **exercício 48**, como (0, 0) pertence ao gráfico, para $x = 0$, temos $y = 0$, então devemos substituir x e y por 0, logo:

$(m + 2) \cdot 0^2 + (m + 3) \cdot 0 +$

$+ m + 4 = 0$

$0 + 0 + m + 4 = 0$

$m = -4$

As resoluções dos **exercícios 42** a **47** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Zeros de uma função polinomial do 2º grau

Relembre aos estudantes que, ao resolver uma equação do 2º grau em $\mathbb{R}$, temos três possibilidades:

- $\Delta > 0$ (a equação tem duas raízes reais e distintas, x_1 e x_2);
- $\Delta = 0$ (a equação tem duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$);
- $\Delta < 0$ (a equação não tem raízes reais).

Comente com eles que, sempre que o primeiro membro da equação obtida, atribuindo 0 a y, puder ser fatorado em quadrado de uma soma ou de uma diferença, a função tem duas raízes reais iguais ou raiz dupla. Peça a eles que façam a verificação desse fato na função dada no **exemplo b**.

Zeros de uma função polinomial do 2º grau

Antes de fazer o esboço de uma parábola, devemos determinar os zeros da função e identificar sua concavidade.

Acompanhe um exemplo. Vamos determinar os zeros da função dada pela lei $y = x^2 - 3x - 10$.

$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (a = 1, b = -3 \text{ e } c = -10)$

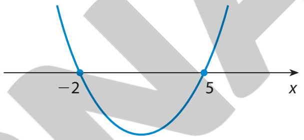
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 \longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + 7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \text{e} \\ x_2 = \dfrac{3 - 7}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Portanto, os zeros da função são −2 e 5.

Como $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Desse modo, podemos fazer o esboço do gráfico da função dada pela lei $y = x^2 - 3x - 10$.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Considere estes outros exemplos.

a) $y = -2x^2 + 5x - 2$

$-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

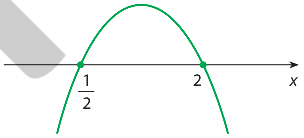
$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm 3}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \\ \text{e} \\ x_2 = \dfrac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$$

Como $a = -2$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

b) $y = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

Como o 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito, podemos escrever:

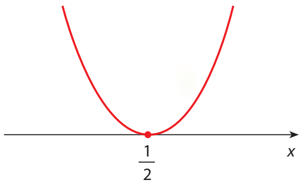
$(2x - 1)^2 = 0$

Assim, obtemos:

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

Como $a = 4$, portanto $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

c) $y = -3x^2 + 2x - 1$

$-3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

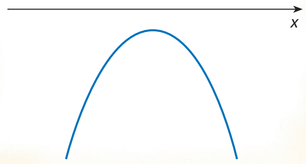
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)$

$\Delta = 4 - 12 = -8$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Portanto, a parábola não corta o eixo x.

Como $a = -3$, portanto $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

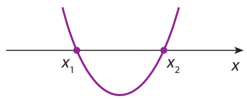
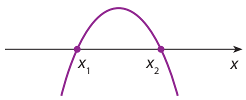
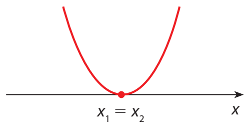
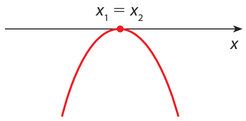
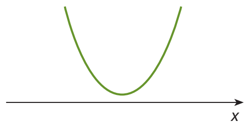
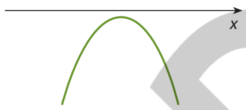


NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

No esboço do gráfico de uma função quadrática, podem ocorrer os seguintes casos:

Quadro-resumo da relação entre os zeros da função quadrática e seu gráfico

	$a > 0$	**$a < 0$**
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

49 Determine no caderno os zeros (se existentes) das funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma. **49.** Construção de figura.

a) $y = x^2 - 6x + 8$ **49. a)** 2 e 4.

b) $y = x^2 + 2$ **49. b)** Não existem.

c) $y = -x^2 + 4x$ **49. c)** 0 e 4.

d) $y = x^2 - 6x + 9$ **49. d)** 3

e) $y = -9x^2 + 12x - 4$ **49. e)** $\frac{2}{3}$

f) $y = 2x^2 - 2x + 1$ **49. f)** Não existem.

50 A trajetória de um projétil lançado obliquamente por um canhão, em um local plano e horizontal, é dada por parte do gráfico da função cuja lei é:

$$y = \frac{-x^2}{32} + \frac{x}{8}$$

Se as medidas das distâncias horizontal e vertical, em relação ao canhão, são dadas em quilômetro e representadas, respectivamente por x e y, determine a quantos quilômetros do canhão o projétil caiu. **50.** 4 km

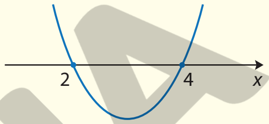
Exercícios propostos

No **exercício 49**, ao fazer $y = 0$ em cada item, obtemos as raízes das equações.

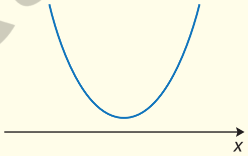
A resolução do **exercício 49** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Aqui, considerando as raízes de cada função, apresentamos o esboço de cada uma delas.

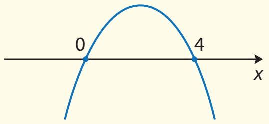
a) Encontramos como zeros da função: 2 e 4. Considerando que o coeficiente a é positivo, a concavidade é para cima:



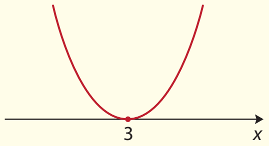
b) A equação não tem raízes reais; logo, a função dada por $y = x^2 + 2$ não tem zeros. Como $a = 1$, a concavidade é voltada para cima:



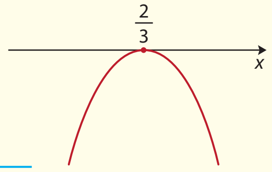
c) Encontramos como zeros da função: 0 e 4. Como $a = -1$, a concavidade é voltada para baixo:



d) Encontramos como zero da função: 3. Como $a = 1$, a concavidade é voltada para cima:

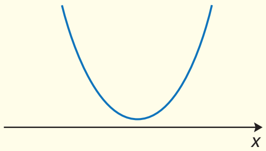


e) Encontramos como zero da função: $\frac{2}{3}$. Como $a = -9$, a concavidade é voltada para baixo:



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

f) A equação não tem raízes reais; logo, a função dada por $y = 2x^2 - 2x + 1$ não tem zeros. Como $a = 2$, a concavidade é voltada para cima:



A resolução do **exercício 50** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Coordenadas do vértice da parábola

Relembre com os estudantes o conceito de simetria de reflexão em relação a uma reta.

Neste tópico, retomamos o conceito de eixo de simetria para obter a fórmula da abscissa do vértice. Em um primeiro momento, obtemos a abscissa do vértice de determinada função polinomial do 2º grau. Em seguida, generalizamos o procedimento e desenvolvemos o cálculo cujo resultado é expresso por: $x_V = -\frac{b}{2a}$

Comente com os estudantes que, na demonstração, foram considerados dois pontos simétricos quaisquer em relação ao eixo de simetria e que, por esse motivo, poderíamos considerar outros pares de abscissas como $x_V - 2$, $x_V + 2$ ou $x_V - 3$, $x_V + 3$ etc.

Coordenadas do vértice da parábola

Observe o gráfico correspondente à função $y = x^2 - 2x - 3$.

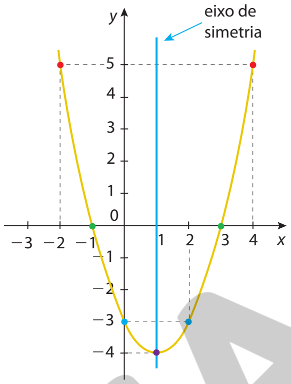
Note que a abscissa do vértice da parábola ($x = 1$) corresponde à metade da soma das abscissas dos pontos que são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola. Assim, considerando os pares de pontos destacados no gráfico, obtemos:

$$\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Substituindo x por 1 em $y = x^2 - 2x - 3$ e efetuando os cálculos, obtemos a ordenada do vértice:

$$y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

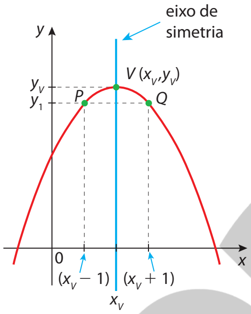


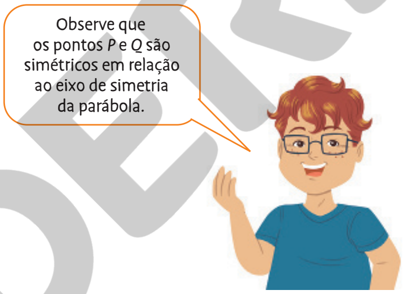
REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos destacados com a mesma cor são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

De modo geral, podemos relacionar a abscissa do vértice da parábola (x_V) que representa a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ aos coeficientes a e b.

REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA





ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Por causa da simetria do gráfico, observe, por exemplo, que as abscissas $(x_V - 1)$ e $(x_V + 1)$ estão a uma mesma distância de x_V e que $f(x_V - 1) = f(x_V + 1) = y_1$. Dessa forma, obtemos:

$$a(x_V - 1)^2 + b(x_V - 1) + c = a(x_V + 1)^2 + b(x_V + 1) + c$$

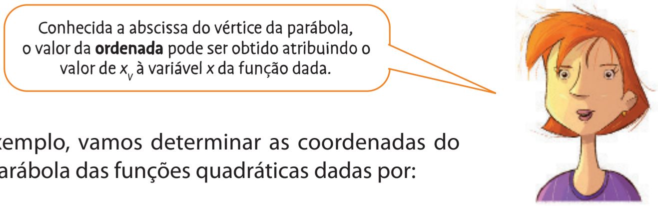
$$a[(x_V)^2 - 2x_V \cdot 1 + 1] + b(x_V - 1) + c = a[(x_V)^2 + 2x_V \cdot 1 + 1] + b(x_V + 1) + c$$

$$a(x_V)^2 - 2ax_V + a + bx_V - b + c = a(x_V)^2 + 2ax_V + a + bx_V + b + c$$

$$-2ax_V - b = 2ax_V + b$$

$$-4ax_V = 2b$$

$$x_V = \frac{2b}{-4a}, \text{ ou seja: } \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola das funções quadráticas dadas por:

a) $y = x^2 - 8x + 15$

- Abscissa do vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \cdot (1)} = \frac{8}{2} = 4$$

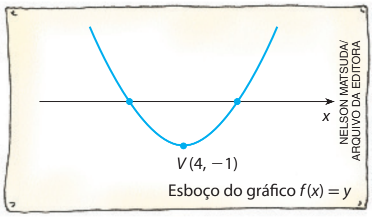
- Ordenada do vértice:

Substituindo x por 4 na lei da função, obtemos:

$y_V = (4)^2 - 8 \cdot (4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Logo, o vértice da parábola é $V(4, -1)$.

Note que $a > 0$ e $\Delta = 4 > 0$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA
VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

b) $y = 2x^2 - 3x + 2$

- Abscissa do vértice:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot (2)} = \frac{3}{4}$$

- Ordenada do vértice:

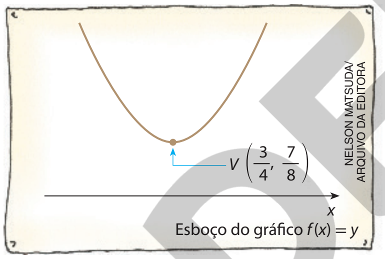
$$y_V = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 2 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 2 =$$

$$= \frac{18}{16} - \frac{36}{16} + \frac{32}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Portanto, o vértice da parábola é $V\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$.

Note que $a > 0$ e $\Delta = -7 < 0$.

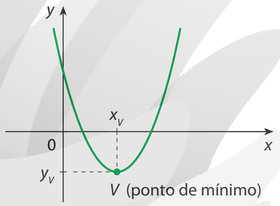


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA
VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

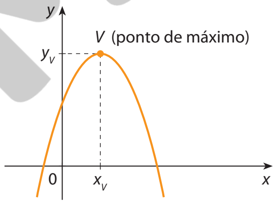
Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau

Considere as funções polinomiais do 2º grau cujos gráficos estão representados a seguir.

$a > 0$



$a < 0$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Coordenadas do vértice da parábola

Reforce com os estudantes que o vértice é um ponto importante da parábola porque é nele que a função muda de sentido, de crescente para decrescente ou vice-versa.

Essa importância pode ser reforçada também pelo fato de que a ordenada do vértice determina o ponto de maior ordenada do gráfico da função (ponto de máximo, quando $a < 0$) ou de menor ordenada (ponto de mínimo, quando $a > 0$).

Coordenadas do vértice da parábola

Se julgar conveniente, incentive os estudantes a demonstrar a expressão da ordenada do vértice, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. Para isso, pode-se utilizar a expressão de x_V em $y = ax^2 + bx + c$.

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, iniciamos pelos exercícios de aplicação da fórmula da abscissa do vértice para que os estudantes adquiram habilidade do cálculo do valor numérico.

As resoluções dos **exercícios 51** a **59** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Os **exercícios 58** e **59** propõem uma aplicação da fórmula para a resolução de situações-problema contextualizadas. O **exercício 58** articula a Unidade Temática **Álgebra** com a **Geometria**, enquanto o **exercício 59** trabalha no campo da minimização de custo.

Examinando esses gráficos, podemos dizer que:

- se $a > 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada mínima. Nesse caso, o vértice é chamado **ponto de mínimo**, e a ordenada do vértice, **valor mínimo** da função;
- se $a < 0$, o vértice é o ponto da parábola que tem ordenada máxima. Nesse caso, o vértice é chamado **ponto de máximo**, e a ordenada do vértice, **valor máximo** da função.

Acompanhe dois exemplos.

a) Para que valor de x o valor de $y = -2x^2 + 6x + 1$ é máximo?

O ponto de máximo de uma função polinomial do 2º grau com $a < 0$ é o vértice V. Como queremos o valor de x, devemos calcular x_V.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-(+6)}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Logo, y tem valor máximo para $x = 1{,}5$.

b) Vamos determinar o valor mínimo da função dada pela lei $y = x^2 - 10x + 24$.

O valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau com $a > 0$ é dado pela ordenada y_V do vértice da parábola. Primeiro, calculamos x_V:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$$

Agora, calculamos y_V, substituindo x por 5 na lei da função:

$y_V = 5^2 - 10 \cdot 5 + 24 = 25 - 50 + 24 = -1$

Logo, o valor mínimo dessa função ocorre quando $y = -1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

51 Determine no caderno as coordenadas do vértice da parábola em cada caso.

a) $y = -x^2 - 8x + 16$ **51. a)** $V(-4, 32)$

b) $y = 2x^2 + 6x$ **51. b)** $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

c) $y = x^2 - 16$ **51. c)** $V(0, -16)$

52 O ponto de vértice da parábola definida pela lei da função $y = 3x^2 - px + 2q$ é dado por $V(2, 1)$. Determine no caderno os valores reais de p e q. **52.** $p = 12$ e $q = \frac{13}{2}$

53 Verifique se a função tem ponto de máximo ou de mínimo.

a) $y = 4x^2 - 9x + 2$ **53. a)** Ponto de mínimo.

b) $y = x^2 + 3x - 70$ **53. b)** Ponto de mínimo.

c) $y = -x^2 + 14x - 24$ **53. c)** Ponto de máximo.

d) $y = 5x^2 - 6x$ **53. d)** Ponto de mínimo.

e) $y = -3x^2 + 9x$ **53. e)** Ponto de máximo.

f) $y = -2x^2 - 50$ **53. f)** Ponto de máximo.

54 Para cada lei da função, calcule no caderno o x correspondente ao valor mínimo.

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$ **54. a)** $x = \frac{2}{3}$

b) $y = x^2 + 12x + 11$ **54. b)** $x = -6$

55 Para cada lei da função, calcule no caderno o x correspondente ao valor máximo.

a) $y = -2x^2 + 11x - 5$ **55. a)** $x = \frac{11}{4}$

b) $y = -2x^2 + 25x - 150$ **55. b)** $x = \frac{25}{4}$

56 Calcule no caderno o valor máximo da função dada pela lei $y = -x^2 + 11x - 18$. **56.** $y = \frac{49}{4}$

57 Calcule no caderno o valor mínimo da função dada pela lei $y = x^2 - 6x + 8$. **57.** $y = -1$

58 Fernando demarcou uma região retangular de 100 m de medida do perímetro em um terreno para construir uma casa.

Calcule no caderno as dimensões dessa região para que Fernando aproveite a maior medida de área possível. **58.** A maior medida de área é obtida por um quadrado medindo 25 m de lado.

59 O custo C, em real, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3\,000$, sendo x a quantidade de unidades produzidas.

a) Qual deve ser a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo? **59. a)** 40 unidades.

b) Qual é o valor desse custo mínimo? **59. b)** R$ 1 400,00

Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

A parte da parábola que melhor caracteriza o gráfico da função polinomial do 2º grau é a parte próxima do vértice. Por isso, utilizamos o procedimento a seguir.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

- Determinamos as coordenadas do vértice V;
- atribuímos a x valores próximos de x_V e calculamos os correspondentes valores de y;
- construímos um quadro com os pontos determinados;
- marcamos, no plano cartesiano, os pontos obtidos;
- considerando o sentido da concavidade dada pelo sinal de a, traçamos o gráfico (a parábola).

Acompanhe alguns exemplos.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

- Coordenadas do vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot (1)} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_V = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$

Portanto, $V(2, -1)$ é o vértice da parábola.

Vamos atribuir a x valores próximos de x_V.

Não podemos usar régua para unir os pontos, pois a parábola não é formada por segmentos de reta.

Note que $a > 0$; logo, a concavidade é voltada para cima.

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

$$\underbrace{0 \qquad\qquad 1}_{\textbf{valores menores}} \qquad \underset{x_V}{\boxed{2}} \qquad \underbrace{3 \qquad\qquad 4}_{\textbf{valores maiores}}$$

Para $x = 0$, obtemos: $y = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

Para $x = 1$, obtemos: $y = (1)^2 - 4 \cdot (1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

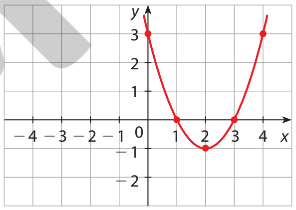
Para $x = 3$, obtemos: $y = (3)^2 - 4 \cdot (3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

Para $x = 4$, obtemos: $y = (4)^2 - 4 \cdot (4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

Quadro com alguns pontos simétricos e o vértice do gráfico da função

x	$y = x^2 - 4x + 3$	(x, y)	
0	3	(0, 3)	
1	0	(1, 0)	
2	–1	**(2, –1)**	V
3	0	(3, 0)	
4	3	(4, 3)	

Gráfico da função



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau

Já apresentamos uma abordagem inicial sobre o gráfico de uma função polinomial do 2º grau, estudamos os conceitos de concavidade e vértice da parábola, realizamos o cálculo dos zeros de uma função polinomial do 2º grau acompanhado de quadro analítico com os sinais do coeficiente a e do discriminante, demonstramos a fórmula da abscissa do vértice da parábola e obtivemos valor máximo e valor mínimo. Agora, chegamos à condição de organizar e utilizar todo esse conhecimento para a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau, com critério e entendimento do procedimento. Neste momento, os estudantes adquirem autonomia para saber quais valores reais devem atribuir a x para obter pontos convenientes na construção desse gráfico.

É importante destacar a fala da personagem sobre o fato de que não podemos unir os pontos obtidos e organizados no quadro de coordenadas usando uma régua. Sempre que necessário, outros valores podem ser atribuídos a x e acrescentados ao quadro, obtendo, assim, mais pontos do gráfico que auxiliarão no traçado da linha.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 60** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Se necessário, retome com os estudantes alguns pontos notáveis da parábola, como o vértice, as raízes (quando houver) e o ponto que o gráfico intersecta o eixo y (isto é, quando $x = 0$).

Após resolverem o exercício, sugerimos orientar os estudantes a compor os gráficos das funções de cada item utilizando algum recurso tecnológico. Eles podem criar um quadro de duas colunas, em uma planilha eletrônica, em que na primeira coluna digitam valores para x e na segunda coluna obtêm, por meio das ferramentas de cálculo automático da planilha eletrônica, os valores de y. Com esse conjunto de pares de pontos de um gráfico, podem plotar o gráfico com os recursos da planilha eletrônica. Neste caso, o gráfico será composto de pontos discretos (relativos aos pares de pontos que os estudantes digitarem). Contudo, pode-se ampliar o estudo discutindo com eles que, quanto mais pontos digitarem, mais o gráfico se aproxima de uma linha contínua. Se julgar pertinente, para visualizarem esse fato, solicite que utilizem algum *software* de geometria dinâmica a fim de obter, de fato, o gráfico de cada função.

Esse trabalho favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois os estudantes podem perceber como utilizar diferentes recursos tecnológicos para resolver problemas.

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

- Coordenadas do vértice:

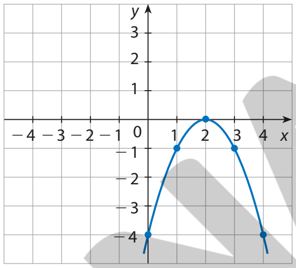
$$\left.\begin{aligned} x_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ y_V &= -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0 \end{aligned}\right\} V(2, 0)$$

Note que $a < 0$; então, a concavidade é voltada para baixo.

Quadro com alguns pontos simétricos e o vértice do gráfico da função

x	$y = -x^2 + 4x - 4$	(x, y)	
0	–4	(0, –4)	
1	–1	(1, –1)	
2	0	**(2, 0)**	V
3	–1	(3, –1)	
4	–4	(4, –4)	

Gráfico da função



c) $y = x^2 - 2x + 2$

- Coordenadas do vértice:

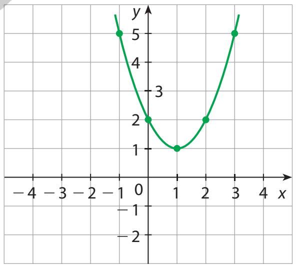
$$\left.\begin{aligned} x_V &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (1)} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_V &= (1)^2 - 2 \cdot (1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1 \end{aligned}\right\} V(1, 1)$$

Note que $a > 0$; então, a concavidade é voltada para cima.

Quadro com alguns pontos simétricos e o vértice do gráfico da função

x	$y = x^2 - 2x + 2$	(x, y)	
–1	5	(–1, 5)	
0	2	(0, 2)	
1	1	**(1, 1)**	V
2	2	(2, 2)	
3	5	(3, 5)	

Gráfico da função



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

60 Construa o gráfico das funções quadráticas em uma folha de papel quadriculado.

60. Construção de gráficos.

a) $y = x^2 + 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 6x - 5$

c) $y = 3x^2 - 12x + 9$

d) $y = -x^2 + x + 1$

e) $y = -x^2$

f) $y = x^2 - x + 2$

61 Em uma folha de papel quadriculado e em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções dadas pelas leis $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$ e determine os pontos de intersecção desses dois gráficos. **61.** (–2, 0) e (2, 0).

62 Reúna-se com um colega para fazerem esta atividade.
Usando uma folha de papel quadriculado, construam, para cada item, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas pelas seguintes leis: **62.** Construção de gráficos.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x^2 - 1$ **62. a)** Há uma translação vertical das parábolas.

b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ **62. b)** As parábolas são simétricas em relação ao eixo *x*.

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 4x^2$ **62. c)** As parábolas têm o mesmo vértice e a concavidade para cima.

Comparando os gráficos em cada plano cartesiano, o que vocês podem observar?

PARA SABER MAIS

Uso do computador: parábolas

Com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, é possível estudar o que acontece com o gráfico de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ à medida que os coeficientes *a*, *b* e *c* variam.

1. Ao digitar $f(x) = ax^2 + bx + c$ e teclar “Enter” no campo “Entrada” na tela inicial, aparecerá uma janela.
2. Clicando em “Criar Controles Deslizantes” na tela inicial, aparecerão os controles deslizantes correspondentes aos coeficientes *a*, *b* e *c* de $f(x) = ax^2 + bx + c$, além do gráfico para $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
3. É possível movimentar os cursores dos controles deslizantes para variar os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Imagine se modificarmos o coeficiente *a*. Em seguida, responda às questões a seguir.

a) O que acontece quando o valor absoluto de *a* aumenta? **1. a)** A abertura da parábola diminui.

b) O que acontece quando o valor absoluto de *a* diminui? **1. b)** A abertura da parábola aumenta.

2 Imagine o que acontece se modificarmos o coeficiente *c*. Em seguida, responda às questões a seguir.

a) Qual é o papel do coeficiente *c* no gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$? **2. a)** O coeficiente *c* determina a translação vertical da parábola.

b) Podemos associar esse coeficiente à ordenada de um ponto. Que ponto é esse? **2. b)** Ponto de intersecção da parábola com o eixo *y*.

3 Construa o gráfico de algumas funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2 + c$. Depois, responda às questões a seguir.

a) Em que ponto cada parábola traçada intersecta o eixo *y*? **3. a)** No vértice.

b) Qual é o eixo de simetria de cada parábola traçada? **3. b)** Eixo *y*.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 61** e **62** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para saber mais

Para desenvolver a atividade proposta nesta seção, indicamos utilizar um *software* de geometria dinâmica como o Geogebra (disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt; acesso em: 25 jul. 2022) ou o Winplot (disponível em: https://winplot.softonic.com.br/. Acesso em: 25 jul. 2022).

No **Agora é com você!**, para resolver a **atividade 1**, os estudantes devem atribuir diferentes valores para o coeficiente *a* e observar o comportamento do gráfico função.

De maneira semelhante, para a **atividade 2**, devem atribuir diferentes valores para *c* e observar o que muda no gráfico. Neste momento, eles poderão perceber que o valor do gráfico de uma função polinomial do 2º grau intersecta o eixo *y* sempre no ponto (0, *c*).

Na **atividade 3**, eles podem estudar um tipo específico de função polinomial do 2º grau, em que $b = 0$, e perceber que, nesse caso, o eixo *y* será o eixo de simetria do gráfico.

Sugestão de leitura

Sugerimos o material a seguir para aprofundar o uso de tecnologias digitais no estudo de funções:

SOUZA, A. S. **Usando o Winplot**. Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Matemática. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html. Acesso em: 25 jul. 2022.

Nessa página, apresentam-se informações gerais sobre o Winplot e como utilizar esse *software* para compor gráficos de funções de diferentes maneiras.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau

Peça aos estudantes que observem que, assim como estudamos o sinal da função polinomial do 1º grau, também o fazemos com o sinal da função polinomial do 2º grau, que pode ser usado em estudos mais avançados para aplicar em restrições de situações-problema contextualizadas.

Preferencialmente em duplas, solicite aos estudantes uma leitura atenta dos exemplos do estudo do sinal das funções apresentadas para propiciar a troca de entendimentos e de dúvidas. Depois, verifique se há alguma dúvida sobre esses exemplos.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau

Estudar o sinal de uma função polinomial do 2º grau é determinar os valores reais de *x* que tornam a função positiva ($y > 0$), negativa ($y < 0$) ou nula ($y = 0$). Para isso, é necessário determinar, quando houver, os zeros da função (valores de *x* que anulam a função), observar o sentido da concavidade (para cima ou para baixo) e esboçar seu gráfico.

Agora, acompanhe alguns exemplos do estudo do sinal de funções polinomiais do 2º grau.

a) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = x^2 - 6x + 8$.

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Zeros da função

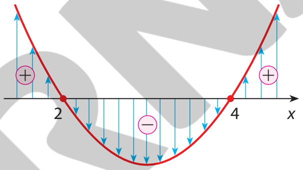
$x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad (a = 1 > 0, b = -6, c = 8)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{tikzcd} & x_1 = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x = \frac{6 \pm 2}{2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \text{e} \\ & x_2 = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{tikzcd}$$

Esboço do gráfico



Estudo do sinal

- Para $x < 2$ ou $x > 4$, obtemos: $y > 0$; pontos acima do eixo *x*.
- Para $x = 2$ ou $x = 4$, obtemos: $y = 0$; pontos do eixo *x*.
- Para $2 < x < 4$, obtemos: $y < 0$; pontos abaixo do eixo *x*.

b) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = -x^2 - 6x - 9$.

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

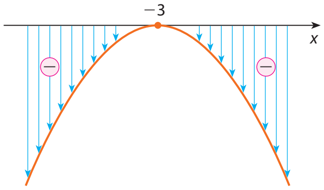
$-x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad (a = -1 < 0, b = -6, c = -9)$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$

$$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot (-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

Esboço do gráfico



Estudo do sinal

- Para $x \neq -3$, obtemos: $y < 0$; pontos abaixo do eixo *x*.
- Para $x = -3$, obtemos: $y = 0$; ponto do eixo *x*.
- Não existe valor real de *x* que torne $y > 0$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

c) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = x^2 - 3x + 3$.

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad (a = 1 > 0, b = -3, c = 3)$

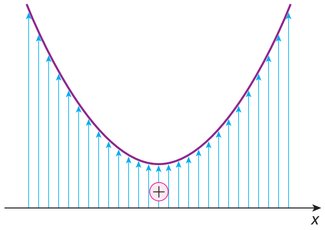
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$

A função não tem zeros reais.

Estudo do sinal

A função nunca se anula e não existe valor de x real que a torne negativa, ou seja, para qualquer x real, a função sempre é positiva.

Esboço do gráfico



d) Vamos estudar o sinal da função dada pela lei $y = -x^2 + 3x - 3$.

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

$-x^2 + 3x - 3 = 0 \qquad (a = -1 < 0, b = 3, c = -3)$

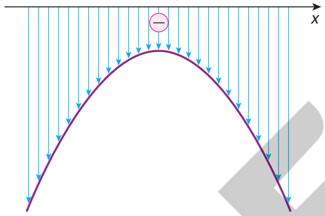
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -3$

A função não tem zeros reais.

Estudo do sinal

A função nunca se anula e não existe valor de x real que a torne positiva, ou seja, para cada x real, a função sempre é negativa.

Esboço do gráfico



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

63. a) $x < 1$ ou $x > 2$: $y > 0$; $x = 1$ ou $x = 2$: $y = 0$; $1 < x < 2$: $y < 0$

63. b) $x < \frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$: $y > 0$; $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$: $y = 0$; $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$: $y < 0$

EXERCÍCIO PROPOSTO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

63 Faça o estudo do sinal das funções dadas pelas leis:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = 6x^2 - 5x + 1$

c) $y = -2x^2 - 5x + 3$

d) $y = x^2 + 8x + 16$ **63. d)** $x \neq -4$: $y > 0$; $x = -4$: $y = 0$

e) $y = -x^2 + 12x - 36$ **63. e)** $x = 6$: $y = 0$; $x \neq 6$: $y < 0$

f) $y = 3x^2 - 2x + 1$ **63. f)** Para qualquer x real a função é sempre positiva.

63. c) $-3 < x < \frac{1}{2}$: $y > 0$; $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$: $y = 0$; $x < -3$ ou $x > \frac{1}{2}$: $y < 0$

PARA SABER MAIS

Sistema de equações do 2º grau

Na linguagem matemática, as situações que relacionam dados por meio de uma igualdade são expressas por uma equação. Duas ou mais equações, com incógnitas em comum, constituem um sistema de equações. Se pelo menos uma delas é do 2º grau, obtemos um sistema de equações do 2º grau.

Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau

Solicite aos estudantes que comparem as expressões que definem as duas funções dos **exemplos c** e **d**. Depois, peça que respondam qual é a consequência dessa relação nos dois gráficos. Eles devem perceber que a expressão da função no **exemplo d** é a oposta da expressão do **exemplo c** e que a consequência no plano cartesiano é a reflexão do gráfico do **item c** em relação ao eixo x, resultando no gráfico do **item d**. Se julgar pertinente, sugira que construam os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano e, para isso, utilizem folha de papel quadriculado.

Exercício proposto

A resolução do **exercício 63** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Após a resolução desse exercício, peça aos estudantes que investiguem o que acontece com os gráficos das funções polinomiais do 2º grau cuja expressão da lei que as define tem os coeficientes a, b e c com os sinais opostos aos dados em cada item. Eles devem verificar que cada gráfico é obtido pela reflexão do respectivo gráfico do item.

Para saber mais

A seção traz uma situação-problema cuja solução demanda a aplicação de um sistema de equações, das quais uma é equação do 2º grau.

Questione os estudantes se também seria possível, para resolver um sistema como esse, usar os métodos estudados anteriormente (adição e comparação). Eles devem concluir que podem utilizar o método da adição apenas se, na adição membro a membro, eliminarmos a incógnita que tem grau 1.

As resoluções das **atividades 1** a **3** do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Considere a situação a seguir.

Hoje, a soma das idades de um tio e de seu sobrinho é 38 anos. Sabendo que daqui a 2 anos a idade do tio será igual ao quadrado da idade do sobrinho, calcule a idade de cada um hoje.

Para calcular as idades, vamos chamar de x a idade do tio e de y a idade do sobrinho. Com os dados fornecidos, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2 = (y + 2)^2 \end{cases}$$

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Isolando x na equação $x + y = 38$, obtemos:

$$x = 38 - y$$

Substituindo x por $38 - y$ na equação $x + 2 = (y + 2)^2$, obtemos:

$$x + 2 = (y + 2)^2$$
$$38 - y + 2 = y^2 + 4y + 4$$
$$-y^2 - y - 4y + 38 + 2 - 4 = 0$$
$$-y^2 - 5y + 36 = 0$$
$$y^2 + 5y - 36 = 0$$

Resolvendo essa equação na incógnita y, obtemos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 13}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$y_1 = \frac{-5 + 13}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

e

$$y_2 = \frac{-5 - 13}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

Como não pode haver idade negativa, então $y = 4$.

Portanto, o sobrinho tem 4 anos.

Substituindo y por 4 na equação $x = 38 - y$, encontramos a idade do tio.

$$x = 38 - y = 38 - 4 = 34$$

Logo, hoje o sobrinho tem 4 anos e o tio, 34 anos.

Agora é com você!

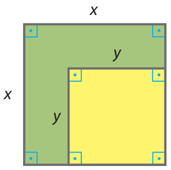
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

1 Determine no caderno dois números positivos a e b de modo que $a + b = 2$ e $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$.

2 A diferença entre dois números é 3. A soma de seus quadrados é 17. Qual é o maior desses números? **2.** Há duas possibilidades para o maior número: 4 ou –1.

3 Na figura, a área verde mede 51 cm², e a diferença entre as medidas dos lados dos quadrados é 3 cm. Calcule no caderno a medida da área amarela. **3.** 49 cm²



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

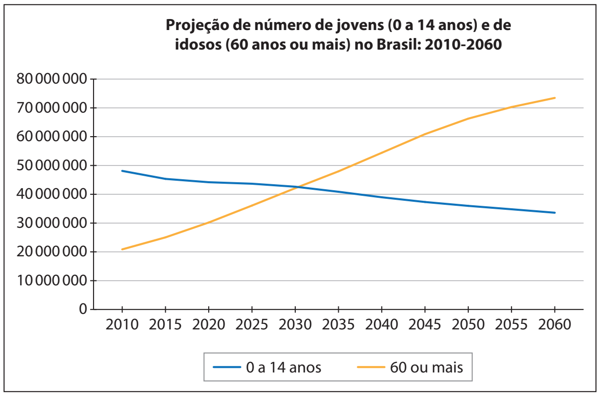
O envelhecimento populacional

O artigo 3º da lei 10.741 estabelece que é obrigação de todos, inclusive do Estado, garantir aos idosos (pessoas com 60 anos ou mais) a efetivação do direito à vida, à saúde, à alimentação e, entre outros, à dignidade.

Em 1950, o total de brasileiros idosos era maior do que 2,6 milhões e correspondia a cerca de 4,9% da população naquele ano. Já em 2020, o total de brasileiros idosos era de quase 30 milhões, cerca de 14% da população brasileira. Esses dados evidenciam o envelhecimento populacional, que pode ser analisado, também, por meio do **índice de envelhecimento** (IE). Esse índice é a razão entre o número de pessoas idosas e o número de jovens (crianças e adolescentes até 14 anos). A população é considerada idosa quando o IE é maior do que 1.

Alguns meios de comunicação expressam a preocupação de que o envelhecimento populacional comprometa o crescimento econômico, pois a população em idade ativa diminui em relação à população total, como indica o gráfico a seguir.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeções da população do Brasil e Unidades da Federação por sexo e idade**: 2010-2060. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados. Acesso em: 6 jul. 2022.

Apesar da preocupação em relação à diminuição da população em idade ativa, há outros fatores que podem ser considerados, como o comportamento dessa população. A inserção da mulher no mercado de trabalho, por exemplo, possibilitou que a população ocupada passasse de 32% em 1950 para 45,3% em 2010.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se em um grupo e façam o que se pede.

a) Determinem uma função polinomial do 1º grau, $f(x)$, que indique, aproximadamente, a projeção de número de jovens de 2010 a 2060. Depois, determinem uma função polinomial do 1º grau, $g(x)$, que aproxime a projeção do número de idosos nesse mesmo período. Considere que $x = 0$ corresponde ao ano 2010; $x = 1$, ao ano 2015; $x = 2$, ao ano 2020; e assim sucessivamente até $x = 10$, correspondendo ao ano 2060. **a)** Veja a resposta neste *Manual*.

b) Em que ano, aproximadamente, o índice de envelhecimento (IE) será maior do que 1 de acordo com essas projeções? **b)** Após 2030, aproximadamente.

c) Na opinião de vocês, qual é a importância da participação das mulheres no mercado de trabalho, considerando o envelhecimento populacional? **c)** Resposta pessoal.

d) Qual é a importância da projeção do envelhecimento populacional em relação às políticas públicas que garantem os direitos dos idosos? **d)** Resposta pessoal.

e) Pesquisem informações sobre envelhecimento saudável e, depois, com base na projeção do envelhecimento populacional, discutam como vocês poderiam se preparar para envelhecer de maneira saudável. **e)** Resposta pessoal.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC:
EF09MA06.

A seção trata de funções polinomiais e análise de gráfico com o tema “Envelhecimento populacional”. Ao explorar esse tema contribui-se para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**.

Agora quem trabalha é você!

Pode-se trabalhar as atividades coletivamente. Incentive os estudantes a discutir os assuntos abordados.

Para responder ao **item b**, os estudantes devem observar o gráfico e notar que após 2030, aproximadamente, o índice de envelhecimento será maior do que 1.

No **item c**, espera-se que os estudantes percebam que a inserção das mulheres no mercado de trabalho possibilita recompor a população em idade ativa, por exemplo. Além disso, a igualdade de direitos e a de participação na sociedade, em todas as esferas, independente do gênero, contribuem para que as mulheres assumam autonomia no desenvolvimento de seus projetos de vida.

No **item d**, espera-se que os estudantes percebam que projeções como essas possibilitam antecipar possíveis cenários e, assim, são instrumentos para requerer dos governantes políticas públicas que garantam o direito à vida e à dignidade humana agora e no futuro.

Após a pesquisa realizada no **item e**, espera-se que os estudantes percebam que, para possibilitar um processo de envelhecimento saudável, é importante ter hábitos como praticar regularmente atividades físicas, alimentar-se de maneira balanceada, dormir adequadamente ou proteger-se financeiramente, na medida do possível, por exemplo.

A resolução do **item a** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Pense mais um pouco...

O desafio pode ser realizado com os estudantes organizados em duplas ou trios. A discussão entre eles favorece a exposição das ideias e amplia a busca de estratégias de resolução, enriquecendo o aprendizado.

Considerando que são *n* pessoas, cada uma cumprimentará (*n* – 1) pessoa. Como devemos desconsiderar as repetições (o cumprimento entre A e B é o mesmo de B e A), o total de cumprimentos é dado por:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Como são realizados 78 cumprimentos distintos, temos:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 78$$

$$n^2 - n = 156$$

$$n^2 - n - 156 = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos $n = -12$ (não convém) ou $n = 13$.

Portanto, participaram 13 pessoas.

Após os estudantes resolverem esse exercício, peça-lhes para verificarem que:

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$$

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Logo depois da formatura, a família de Juliana resolveu comemorar em uma pizzaria. Ao se despedirem, todos os familiares deram apertos de mão. Juliana calculou que o total de cumprimentos foi 78. Sabendo que, quando uma pessoa cumprimenta outra, esta outra também está cumprimentando-a, portanto, conta-se como um só cumprimento, quantas pessoas estavam participando dessa comemoração?

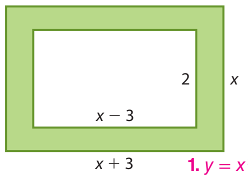
Pense mais um pouco...: 13 pessoas.

DANILLO SOUZA/ ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considerando a figura, expresse a medida da área y da região verde em função de x.



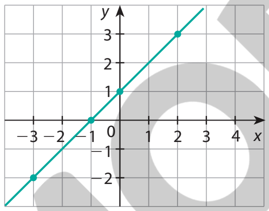
1. $y = x^2 + x + 6$

2 Considerando a função dada pela lei $f(x) = \frac{3x}{5} - \frac{7}{4}$, calcule no caderno:

$\frac{f(15) - f(10)}{15 - 10}$ **2.** $\frac{3}{5}$

3 Uma função é dada pela lei $f(x) = 10x + 10$. Calcule no caderno $f(10) - f(0)$. **3.** 100

4 Observe este gráfico da função polinomial *f* do 1º grau:



Determine no caderno o que se pede em cada item.

a) $f(-3)$ **4. a)** $f(-3) = -2$

b) $f(0)$ **4. b)** $f(0) = 1$

c) O valor de x para y = 3. **4. c)** $x = 2$

d) O zero da função. **4. d)** $x = -1$

- Agora, responda: o gráfico passa pelo ponto (10, 11)? **4.** Sim.

5 Considere a função polinomial do 1º grau dada pela lei $y = 7x - 4$.

a) Determine no caderno o zero da função. **5. a)** $x = \frac{4}{7}$

b) Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico dessa função. **5. b)** Construção de gráfico.

c) Para que valor de x se obtém $f(x) = 2$? **5. c)** $x = \frac{6}{7}$

d) Para que valores de x se obtém $y > 0$? **5. d)** $x > \frac{4}{7}$

6 Dadas as funções $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = -3x + 6$, determine no caderno os valores reais de x de acordo com o que se pede em cada item.

a) $f(x) > 0$

b) $g(x) > 0$

c) $f(x) = g(x)$

d) $f(x) > g(x)$

6. a) $x > 3$ **6. b)** $x < 2$ **6. c)** $x = \frac{12}{5}$ **6. d)** $x > \frac{12}{5}$

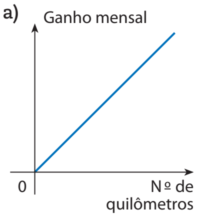
7 O gráfico da função dada pela lei $y = 6x + p$ passa pelo ponto (1, 11). Determine no caderno para que valores reais de *x* se obtém:

a) $y = 23$ **7. a)** $x = 3$

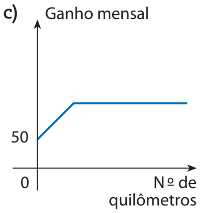
b) $y < 0$ **7. b)** $x < -\frac{5}{6}$

8 (Saresp) Um *motoboy*, para fazer entregas ou retirar documentos de escritórios espalhados pela cidade de São Paulo, recebe R$ 3,00 por quilômetro rodado. Suponhamos que ele passe a receber, mensalmente, um auxílio fixo de R$ 50,00. O gráfico que representa o seu ganho mensal, em reais, em função dos quilômetros rodados é: **8.** Alternativa **b**.

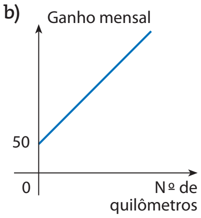
a)



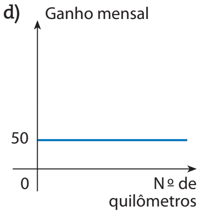
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

9 (Unifor-CE) A função f do 1º grau é definida por $f(x) = -3x + k$. O valor de k para que o gráfico de f corte o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5 é: **9.** Alternativa **e**.

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

10 Considere a função definida pela lei $y = x^2 - 2x + 1$. **10. a)** $x = 1$

a) Determine no caderno o(s) zero(s) dessa função. **10. b)** Construção de gráfico.

b) Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico da função. **10. c)** $x = 0$ ou $x = 2$

c) Para que valores de x obtemos $y = 1$?

d) Para que valores de x obtemos $y > 0$? **10. d)** $x \neq 1$

11 A medida da temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica é dada por uma função cuja lei é $y = t^2 - 7t + c$, em que t indica a medida de tempo após a câmara ser ligada até atingir a temperatura mínima e y indica a medida da temperatura. **11. a)** $c = 10$

a) Sabendo que para $t = 0$ a temperatura mede 10 °C, calcule no caderno o valor de c.

b) Qual é a lei da função? **11. b)** $y = t^2 - 7t + 10$

c) Calcule o valor de t para que a medida da temperatura seja a mínima possível. **11. c)** 3,5 minutos.

12 (UCSal-BA) A parábola de equação $y = 2x^2 - 3x + 1$ corta o eixo das abscissas nos pontos: **12.** Alternativa **d**.

a) (0, 0) e (3, 0).

b) (0, 1) e (0, 2).

c) (0, 1) e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

d) (1, 0) e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

e) (2, 0) e (1, 0).

13 O custo (C) de certo produto é obtido pela função definida pela lei $C(x) = x^2 - 50x + 2$, em que x representa a quantidade do produto. Calcule no caderno o valor de x para que o custo desse produto seja mínimo. **13.** $x = 25$

14 (PUC-MG) O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ é: **14.** Alternativa **b**.

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

15 Em um experimento, um objeto é solto do alto de um prédio e cai, em queda livre, em direção ao chão. A medida de sua altura y em relação ao solo, x segundos após o lançamento, é dada por $y = -16x^2 + 256$. Quantos segundos após o lançamento o objeto atingirá o chão?

a) 2 s c) 6 s e) 16 s

b) 4 s d) 8 s **15.** Alternativa **b**.

16 (UFRGS-RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, em que y é a medida da altura dada em metro. A altura máxima atingida pela bola mede:

a) 36 m. d) 6 m.

b) 18 m. e) 3 m.

c) 12 m. **16.** Alternativa **b**.

17 Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas, em metro, são expressas por x, $(20 - x)$ e 2. Qual é a maior medida de volume que essa piscina poderá ter, em metro cúbico? **17.** 200 m³

18 (ESPM-SP) A estrutura do lucro de uma pequena empresa pode ser estudada através da equação $y = -x^2 + 120x - 2000$, sendo y o lucro em real quando a empresa vende x unidades. Com base nisso, pode-se afirmar que: **18.** Alternativa **a**.

a) o lucro é máximo quando $x = 60$.

b) o lucro é máximo quando $x = 1600$.

c) o lucro é máximo quando $x = 20$ ou $x = 100$.

d) o lucro é máximo quando $x > 2000$.

e) o lucro é máximo quando $x < 20$ ou $x > 100$.

19 O lucro (L) de uma empresa para certo produto é obtido pela função definida pela lei $L = -2x^2 + 2000x - 100$, em que x representa a quantidade do produto. Calcule no caderno para quantas unidades se obtém o lucro máximo possível. **19.** 500 unidades.

20 (FespSP) Considere a função quadrática $f(x) = (m + 1)x^2 - 5x + 5$. **20. a)** $m < -1$

a) Para que valores de m o gráfico da função tem concavidade voltada para baixo?

b) Para que valor de m o gráfico da função tangencia o eixo das abscissas? **20. b)** $m = \frac{1}{4}$

21 Estude o sinal das funções quadráticas. **21.** Construção de gráficos.

a) $y = -3x^2 - 5x + 2$

b) $y = 9x^2 - 12x + 4$

c) $y = 4x^2 - 2x + 3$

d) $y = 2x^2 - 6x$

22 Assinale a alternativa que indica quando o vértice da parábola que representa a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ será um ponto do eixo das abscissas. **22.** Alternativa **c**.

a) $a = 0$ c) $\Delta = 0$

b) $\Delta < 0$ d) $\Delta > 0$

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 9** a **20** e do **exercício 22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

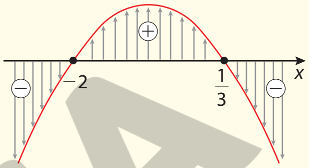
Para o **exercício 21**, temos:

a) $y = -3x^2 - 5x + 2$

$-3x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 49$

$x = \frac{5 \pm 7}{-6} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ e } x_2 = \frac{1}{3}$



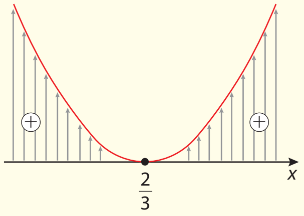
- $x < -2$ ou $x > \frac{1}{3} \Rightarrow y < 0$.
- x entre -2 e $\frac{1}{3} \Rightarrow y > 0$.
- $x = -2$ ou $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 0$.

b) $y = 9x^2 - 12x + 4$

$9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$

$x = \frac{12 \pm 0}{18} = \frac{2}{3}$



- $x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 0$.
- $x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow y > 0$.

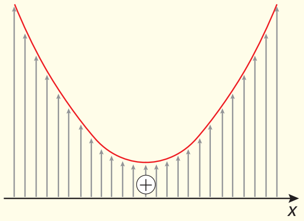
Não existe valor real de x que torne a função negativa.

c) $y = 4x^2 - 2x + 3$

$4x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$

A função não tem zeros reais.



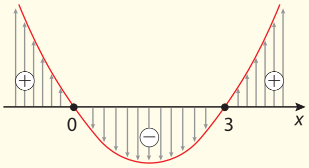
Para qualquer x real, a função é sempre positiva.

d) $y = 2x^2 - 6x$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 3$



- $x < 0$ ou $x > 3 \Rightarrow y > 0$.
- x entre 0 e $3 \Rightarrow y < 0$.
- $x = 0$ ou $x = 3 \Rightarrow y = 0$.

ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando

Nesta seção, apresentamos testes que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos exercícios propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

Sugerimos, ainda, que os estudantes se organizem em duplas para resolver os exercícios e, depois de corrigidos, cada estudante resolva novamente aqueles que tiver errado.

As resoluções e os comentários dos **exercícios 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Organizando

As questões feitas nesta seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação dos estudantes.

É interessante que cada estudante responda individualmente e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou ampliando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Quais são os valores de y para x igual a 0, 1, 2 e 3 na função dada pela lei $y = 14 - 2x$, respectivamente? **1.** Alternativa **b.**

a) 8; 10; 12; 14.
b) 14; 12; 10; 8.
c) 12; 10; 8; 6.
d) 12; 12; 12; 12.

2 João trabalha com venda de planos de celular. Seu salário mensal é composto de um valor fixo de R$ 2 500,00 e de R$ 12,00 por plano vendido. Qual é a equação que ele deve usar para calcular seu salário (S) em um mês em que vender uma quantidade v de planos? **2.** Alternativa **d.**

a) $v = 12 + 2\,500S$
b) $S = 12 + 2\,500v$
c) $v = 2\,500 + 12S$
d) $S = 2\,500 + 12v$

3 Qual deve ser o valor de x para que y seja igual a 47 na função dada pela lei $y = 20 + 3x$? **3.** Alternativa **b.**

a) 7
b) 9
c) 8
d) 10

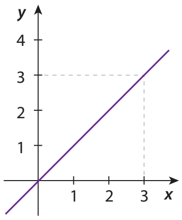
4 Qual é a equação de 2º grau que dá a medida da área (A) de um retângulo de lados que medem x e x + 3? **4.** Alternativa **a.**

a) $A = x^2 + 3x$
b) $A = 3x^2$
c) $A = x^2 + 3x^2$
d) $A = 3x^2 + x$

5 Qual é o zero da função dada pela lei $y = 3x + 2$?

a) 2
b) $-\frac{3}{2}$
c) $-\frac{2}{3}$
d) 3 **5.** Alternativa **c.**

6 Qual é a lei da função que relaciona as variáveis x e y no gráfico a seguir? **6.** Alternativa **d.**



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

a) $y = \frac{x}{2}$
b) $y = 3x$
c) $y = 2x$
d) $y = x$

7 Quais são os zeros da função polinomial do 2º grau dada pela lei $y = -2x^2 + 5x - 2$? **7.** Alternativa **a.**

a) $\frac{1}{2}$ e 2
b) $-\frac{1}{2}$ e 2
c) $\frac{1}{2}$ e -2
d) $-\frac{1}{2}$ e -2

8 Qual(is) é(são) o(s) zero(s) da função polinomial do 2º grau dada pela lei $y = (4x - 1)^2$? **8.** Alternativa **c.**

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$

9 Assinale a alternativa que completa a frase corretamente: "O gráfico da função dada pela lei $y = x^2 - 5x + 6$ é uma parábola voltada para ■ e cruza o eixo x ■ vez(es)". **9.** Alternativa **c.**

a) baixo; uma.
b) baixo; duas.
c) cima; duas.
d) cima; uma.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Qual é a definição de função?
b) O que é uma função polinomial de 1º grau? E de 2º grau?
c) Como são os gráficos das funções polinomiais de 1º e 2º grau, respectivamente?
d) Como você explicaria a um colega um procedimento para verificar se um gráfico cartesiano representa uma função?
e) Dada uma função polinomial do 2º grau pela lei $y = ax^2 + bx + c$, qual condição deve haver para que o vértice do gráfico seja um ponto de mínimo? E como as suas coordenadas podem ser obtidas?

Organizando:

a) Uma função $f(x) = y$ é definida por uma relação matemática entre duas grandezas, x e y, de modo que, para cada valor de x, associa-se um único valor de y.

b) Função polinomial do 1º grau é toda função dada por uma lei do tipo $y = ax + b$, em que a e b são coeficientes reais, com $a \neq 0$. Função polinomial do 2º grau é toda função dada por uma lei do tipo $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são coeficientes reais, com $a \neq 0$.

c) O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta não vertical e não horizontal; e o da função polinomial de 2º grau é uma parábola com eixo de simetria vertical.

d) Deve-se verificar se há alguma reta perpendicular ao eixo x que corta o gráfico em mais de um ponto. Se houver, o gráfico não representa uma função.

e) Condição: $a > 0$. Coordenadas: $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = a(x_V)^2 + bx_V + c$.

DIVERSIFICANDO

Vistas ortogonais

Em um jogo, apresenta-se dois tipos de cartas.

Tipo 1: cartas com a representação de uma figura tridimensional.

Tipo 2: cartas com a representação de vistas dessa figura.

O objetivo do jogo é de que os jogadores associem as vistas ortogonais à figura tridimensional.

Observe os exemplos de cartas que compõe esse jogo:

Exemplo 1

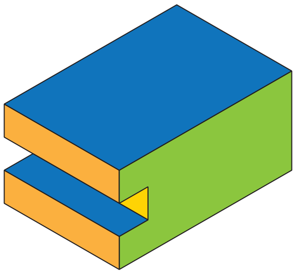
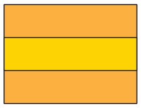


Figura A

Vista 1



Vista 2

Vista 3

Exemplo 2

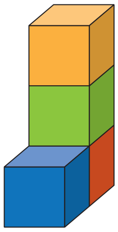
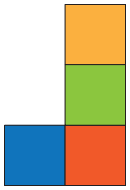
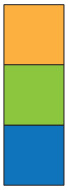


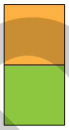
Figura B



Vista 1



Vista 2



Vista 3

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúnam-se em grupos e façam o que se pede em cada item.

a) Que figuras geométricas planas podem ser associadas às vistas ortogonais de um objeto com:
- formato de cubo?
- formato de cilindro reto?
- formato de pirâmide quadrangular?

a) As vistas ortogonais de um cubo podem ser associadas a um quadrado; as de um cilindro podem ser associadas a um círculo e a um retângulo; e as vistas ortogonais de uma pirâmide quadrangular podem ser associadas a triângulos e a um quadrado.

b) Escolham alguns objetos que lembram figuras geométricas planas e produzam cartas contendo vistas ortogonais desses objetos. **b)** Resposta pessoal. Construção de figuras.

c) Elaborem as regras de um jogo em que esses objetos e as cartas sejam utilizados. Lembrem-se de definir um objetivo para o jogo e de explicar como jogar, dando exemplos. **c)** Resposta pessoal.

d) Apresentem o jogo aos demais colegas da turma. Depois, joguem o jogo. **d)** Resposta pessoal.

Diversificando

Habilidade da BNCC:
EF09MA17.

Propomos aos estudantes que construam um jogo envolvendo representações ortogonais de objetos tridimensionais. Para a construção das cartas, deverão desenhar objetos em perspectiva, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF09MA17).

Aproveite esse momento para fazer um trabalho interdisciplinar com o professor de Língua Portuguesa para a escrita das regras do jogo. É importante que os estudantes compreendam os diferentes elementos que devem fazer parte dessa produção de texto, como quantidade de jogadores, regras e definição de como um jogador será o vencedor.

Após a elaboração das regras e das cartas, proponha a troca dos jogos desenvolvidos entre os grupos, para que todos possam jogar e avaliar as diferentes regras elaboradas.

Capítulo 11 – Circunferência, arcos e relações métricas

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas de Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, tratamos da circunferência e da determinação da medida de seu comprimento, das medidas de arcos e das relações métricas em uma circunferência. O conceito de proporcionalidade, frequente no desenvolvimento de vários conteúdos abordados ao longo do Ensino Fundamental e já estudado neste volume, também é utilizado para determinar a medida de arcos de circunferência. Além disso, ampliamos o trabalho com gráficos explorando os formados por semicoroas circulares.

A abertura do capítulo traz uma imagem que pode ser associada a uma circunferência. Em uma roda de conversa, aproveite para estimular os estudantes a expor o que sabem sobre essa figura geométrica, quais são seus principais elementos, mobilizando conhecimentos construídos anteriormente.

Para responder à questão proposta no **item b** é necessário considerar que a medida do raio é igual à metade da medida do diâmetro.

Incentive os estudantes a pesquisar fotografias de outras situações em que se observam elementos que possam ser associados à circunferência ou ao círculo e aproveite o momento para discutir com eles o que essas figuras geométricas planas têm em comum e o que elas têm de diferente, conduzindo os estudantes a perceber que o círculo é a região interna delimitada por uma circunferência.

Capítulo 11

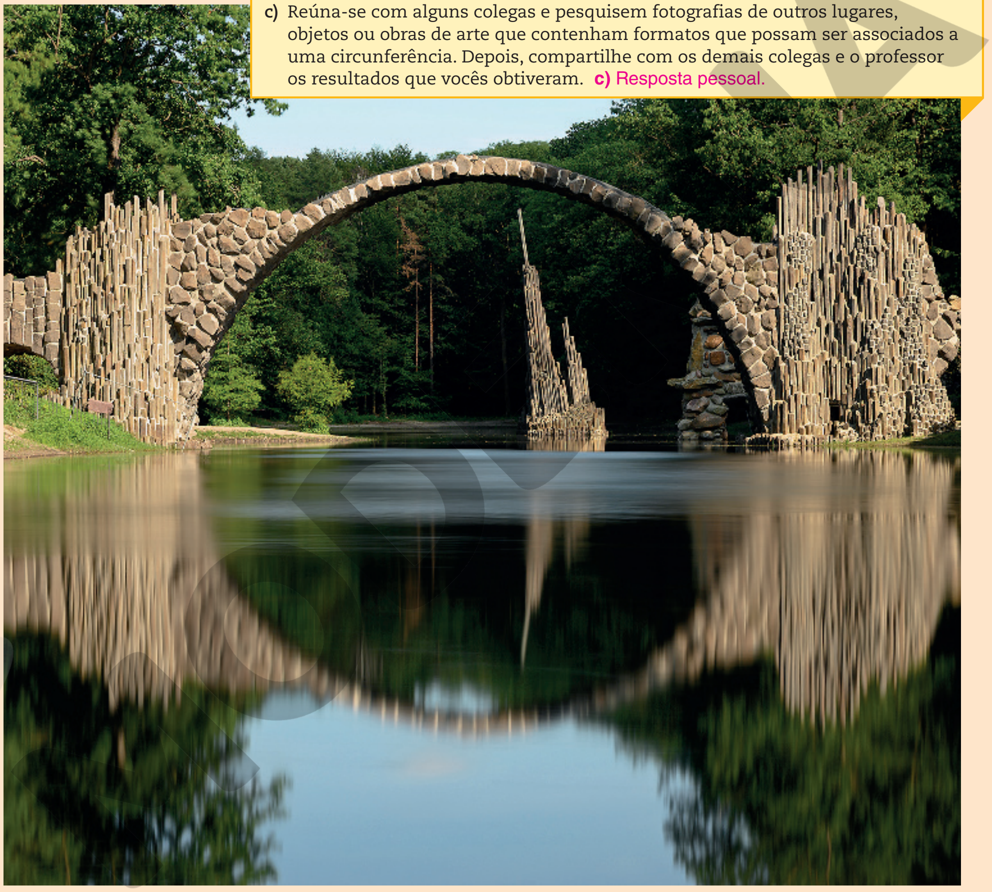
Circunferência, arcos e relações métricas

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Você conhecia ou já tinha ouvido falar dessa ponte? Comente sua resposta. **a)** Resposta pessoal.

b) Sabendo que a altura da ponte da fotografia mede 15 m, o diâmetro da circunferência imaginária que ela forma, ao ser refletida na água, mede quantos metros? **b)** 30 m

c) Reúna-se com alguns colegas e pesquisem fotografias de outros lugares, objetos ou obras de arte que contenham formatos que possam ser associados a uma circunferência. Depois, compartilhe com os demais colegas e o professor os resultados que vocês obtiveram. **c)** Resposta pessoal.



ROBERT MICHAEL/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

Ponte do Diabo, Parque Kromlau, distrito de Görlitz Gablenzgasse, Alemanha. (Fotografia de 2021.)

Revelada pela lente fotográfica do artista, uma circunferência imaginária, espelhada na água tranquila do lago, pode surgir da simetria do arco da ponte.

1 Circunferência e arcos de circunferência

Em muitas culturas agrícolas é empregado um sistema de irrigação chamado pivô central. Nesse sistema, a água é distribuída de maneira controlada, com economia e eficiência, por meio de uma tubulação que, apoiada em torres sobre rodas, dá voltas completas em torno de um dispositivo central.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Plantação com sistema de irrigação com pivô central em Bernardino dos Campos, São Paulo. (Fotografia de 2021.)

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

WASSILY KANDINSKY – MUSEU DE ARTE DE FILADÉLFIA, EUA

KANDINSKY, W. **Círculos em um círculo**. 1923.
Óleo sobre tela, 98,7 cm × 95,6 cm.

1. Circunferência e arcos de circunferência

Habilidade da BNCC: **EF09MA11**.

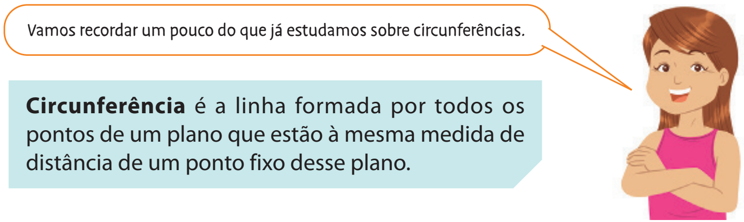
Peça aos estudantes que citem exemplos de elementos do cotidiano que possam ser associados à circunferência ou ao círculo. Espera-se que sejam citados: tampos de mesas, DVDs, pneus, ventiladores, moedas, anéis e alianças, *pizzas* etc.

Solicite aos estudantes que façam composições envolvendo circunferências. Depois, faça uma exposição na sala para divulgar os trabalhos elaborados por eles.

É interessante que os estudantes pesquisem na internet outras obras de arte em que os elementos utilizados para compor a obra dão ideia de circunferência. Ao final da pesquisa, peça a eles que compartilhem com os colegas as obras encontradas. Esse trabalho pode ser feito de maneira interdisciplinar com Arte e favorece o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois os estudantes podem fruir diferentes manifestações artísticas.

Circunferência e arcos de circunferência

Inicialmente, reproduza as figuras na lousa para que os estudantes as identifiquem. Depois, peça a eles que leiam o texto desta página e verifiquem os elementos que não foram reconhecidos. Em seguida, desenhe na lousa outras circunferências para que os estudantes tracem raios, cordas, diâmetros e destaquem nelas dois arcos de medidas diferentes.

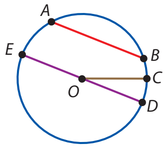


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

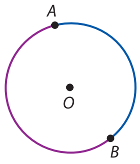
Circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma medida de distância de um ponto fixo desse plano.

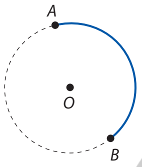
Na circunferência a seguir:

- O é o centro;
- $\overline{AB}$ é uma corda;
- $\overline{OC}$ é um dos raios;
- $\overline{DE}$ é um dos diâmetros.

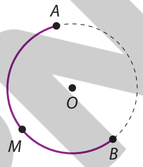


Considere dois pontos distintos de uma circunferência. Esses pontos a dividem em duas partes chamadas de **arco**.



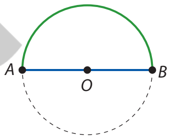


Arco $\widehat{AB}$: **arco menor**



Arco $\widehat{AMB}$: **arco maior**

Quando os dois pontos coincidem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos é chamado de **semicircunferência**.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Medida do comprimento de uma circunferência

Acompanhe a situação a seguir.

Aline é arquiteta e está desenhando a planta de uma quadra poliesportiva.

Qual deverá ser a medida do comprimento da circunferência central dessa quadra, sabendo que o raio deve medir 1,8 metro?

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Já sabemos que a razão entre a medida do comprimento (C) de uma circunferência e a medida de seu diâmetro (d) é constante e aproximadamente igual a 3,14. Essa constante é representada pela letra grega π (lemos: "pi"). Ou seja, dada uma circunferência de raio medindo r, verificamos:

$$\frac{C}{d} = \pi \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

Na situação anterior, como o raio da circunferência central da quadra mede 1,8 m, podemos calcular a medida do comprimento dessa circunferência, em metro, da seguinte maneira:

$$C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}8$$
$$C \simeq 11{,}3$$

Portanto, o comprimento da circunferência do círculo central da quadra poliesportiva mede, aproximadamente, 11,3 m.

Convém lembrar que o número π, que indica a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro, é um número irracional, isto é, não pode ser representado na forma decimal exata nem por uma dízima periódica.

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

Acompanhe alguns exemplos de aplicação.

a) Vamos calcular a medida do comprimento de uma circunferência, cujo diâmetro mede 16 cm, considerando $\pi = 3{,}14$.

É dado $d = 16$ cm e sabemos que $C = \pi d$.

Assim, obtemos:

$C = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24$

Logo, o comprimento da circunferência mede 50,24 cm.

b) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência, cujo comprimento mede 37,68 cm, considerando $\pi = 3{,}14$.

É dado: $C = 37{,}68$ cm e sabemos que $C = 2\pi r$.

Assim, obtemos:

$2\pi r = 37{,}68$

$2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 37{,}68$

$6{,}28 \cdot r = 37{,}68$

$r = 6$

Logo, a medida do raio da circunferência é 6 cm.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

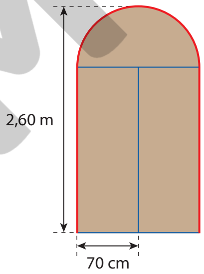
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Para os exercícios a seguir, adote $\pi = 3{,}14$.

1 Um ciclista deu 500 pedaladas completas. O raio da roda da bicicleta desse ciclista mede 25 cm. Determine quantos metros ele percorreu aproximadamente, supondo que cada pedalada corresponde a uma volta completa da roda da bicicleta. **1.** 785 m

2 Construa uma circunferência de raio medindo r. Trace dois diâmetros, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, perpendiculares entre si. Determine a diferença entre as medidas do comprimento da circunferência e do perímetro do quadrado $ABCD$ em função de r. (Use $\sqrt{2} = 1{,}41$.) **2.** $0{,}64r$

3 Um marceneiro construiu uma porta com as características da figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine a medida do comprimento do acabamento em madeira destacado em vermelho na figura. **3.** 5,998 m

Medida do comprimento de uma circunferência

Leia a situação dada no livro e apresente a expressão do cálculo da medida do comprimento de uma circunferência. Peça aos estudantes que utilizem essa expressão para calcular a medida do comprimento da circunferência central da quadra da situação. Só depois siga para a resolução apresentada no livro.

Explore com os estudantes os exemplos apresentados. Comente que em geral usamos a aproximação 3,14 para o valor de π, mas que podem ser solicitadas outras aproximações, como 3,1416.

Se julgar conveniente, proponha uma pesquisa sobre o número π.

Sugestão de leitura

Para aprofundar o tema da pesquisa, sugerimos:

KELLER, F. A. L. **Descobrindo o número π.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5950. Acesso em: 23 jul. 2022.

Nesse trabalho, é apresentada uma sequência didática com base na Engenharia didática como metodologia de investigação a fim de explorar a relação entre a medida de comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 3**, os estudantes devem perceber, por meio da ilustração, que a parte de cima da porta é uma semicircunferência de raio medindo 70 cm. Assim, podem chegar à conclusão de que a medida do comprimento dessa semicircunferência, em metro, será:

$$C_{\text{semi}} = \frac{2\pi r}{2} = 3{,}14 \cdot 0{,}7 = 2{,}198$$

As laterais da porta correspondem a dois segmentos de reta, e cada um deles tem comprimento de medida igual a 2,60 m − 0,7 m, ou seja, o comprimento de cada um deles mede 1,90 m. Logo, o comprimento dessas duas laterais juntas mede 3,8 m.

Dessa maneira, o comprimento do acabamento em vermelho mede 5,998 m, pois:

$2{,}198 + 3{,}8 = 5{,}998$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 4**, **6**, **7** e **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 4**, peça aos estudantes que levem para a sala de aula régua ou trena com escalas em polegada e em centímetro. Providencie pedaços de canos plásticos, com diâmetros diferentes, para que sejam medidos. Também podem ser medidas as telas (na diagonal) de aparelhos celulares, de monitores de computador, de televisores. Explique que é essa medida que determina as polegadas da tela desses aparelhos.

No **exercício 5**, se os estudantes fizerem os cálculos sem as transformações necessárias das unidades de medida, faça intervenções para perceberem que o exercício solicita a velocidade em km/h e que nenhum dado original foi dado em quilômetro ou em hora, mas em centímetro e em segundo.

Se o diâmetro da roda da moto mede 70 cm, podemos calcular a medida C, em cm, do seu comprimento:

$C = \pi \cdot d \Rightarrow C = 3{,}14 \cdot 70 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 219{,}8$

Logo, em 10 voltas, ela percorrerá um total de 2 198 cm, que é equivalente a 21,98 m ou a 0,02198 km. Com essa informação, podemos determinar a velocidade, lembrando que 1 segundo é equivalente a $\frac{1}{3600}$ hora e que a relação entre as grandezas envolvidas é de proporcionalidade direta; assim, obtemos que a medida da velocidade é x, em km/h, tal que:

$$\frac{0{,}02198}{x} = \frac{\frac{1}{3600}}{1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0{,}02198 \cdot 3600 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 79{,}128$

Explore as diferentes estratégias de resolução do **exercício 9**. Como a circunferência de raio 3 cm tem medida de comprimento (C_1) dada por: $C_1 = 2 \cdot \pi \cdot 3$ e queremos determinar uma circunferência cuja medida do comprimento seja o triplo de C_1, obtemos:

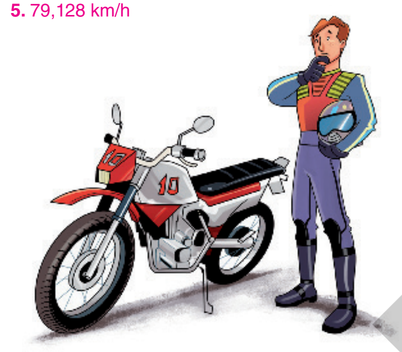
$C_F = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow C_F = 9 \cdot 2 \cdot \pi$

Logo, o raio da última circunferência deve medir 9 cm e, portanto, é necessário traçar 6 circunferências (pois 3 + 6 = 9).

4 Uma polegada equivale a cerca de 2,5 cm. A medida do diâmetro de um cano é de $\frac{3}{4}$ de polegada. A quantos centímetros essa medida equivale, aproximadamente?
4. Equivale a 1,875 cm.


THANIDA/SHUTTERSTOCK

5 O diâmetro da roda de uma moto mede 70 cm. Se ela der 10 voltas completas por segundo, qual será a velocidade aproximada, em quilômetro por hora, dessa roda?
5. 79,128 km/h

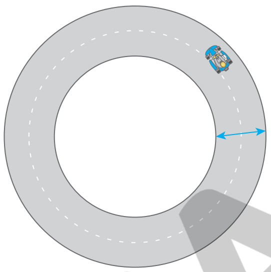


LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

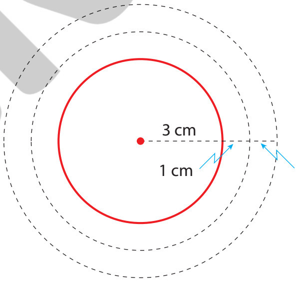
6 O diâmetro de uma praça circular mede 118 m. Edu e Ari, partindo de um mesmo ponto, correm em torno dela em sentido contrário e param ao se encontrar. Nesse instante, Edu havia percorrido 192,52 m. Qual dos dois é mais rápido? **6.** Edu, pois Ari percorreu 178 m a menos do que Edu.

7 Em outra praça circular, Teca e Lia fizeram o mesmo que Edu e Ari. Quando elas se encontraram, Teca havia percorrido 180 m, e Lia, 196,8 m. Qual é a medida aproximada do raio dessa praça? **7.** 60 m

8 Uma pista circular de corrida de *kart* foi construída a partir de duas circunferências concêntricas cujos comprimentos têm medidas 1 500 m e 1 200 m. Determine a medida aproximada da largura dessa pista.
8. 47,77 m



9 Lucila traçou uma circunferência de 3 cm de raio. Depois traçou outras circunferências, concêntricas à primeira, aumentando a medida do raio de 1 em 1 centímetro. Quantas circunferências ela deverá traçar até encontrar aquela que tenha o triplo da medida do comprimento da primeira?
9. 6 circunferências.

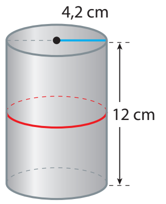


10 *Hora de criar* – Em dupla, cada um cria um problema sobre medida de comprimento de uma circunferência. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.
10. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

A figura representa uma lata de formato cilíndrico.

Calcule, aproximadamente, a medida de comprimento em centímetro de fita adesiva que é necessária para contornar a linha vermelha sobre a lata. *Pense mais um pouco...*: 26,4 cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

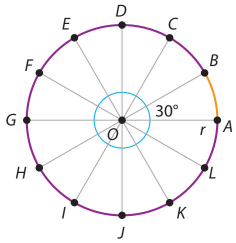
Na resolução do **exercício 10**, incentive os estudantes a considerar objetos que apresentem elementos que possam ser associados a circunferências.

Pense mais um pouco...

Os estudantes devem atentar a que não é necessária a informação sobre a altura da lata, uma vez que não influencia na quantidade de fita adesiva passando pela linha vermelha; o que importa, nesse caso, é o raio da base dessa lata. Assim, com $\pi = 3{,}14$, temos que a medida do comprimento de fita é: $C = 4{,}2 \cdot 2 \cdot \pi = 26{,}376$, ou seja, aproximadamente 26,4 cm.

Arco de circunferência

Ana Paula faz projetos de lustres e luminárias. Ela precisa projetar um lustre com 12 lâmpadas igualmente espaçadas entre si e à mesma distância do centro do lustre. Para isso, ela desenhou um esquema: uma circunferência dividida em 12 arcos de mesma medida angular.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Ana Paula percebeu que a soma de todas as medidas angulares desses arcos é igual à medida angular de uma circunferência (360°) e, portanto, cada um deles mede 30° (pois 360° : 12).

Na circunferência, Ana Paula destacou o arco $\widehat{AB}$, correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

Recordando, a **medida angular** (em grau) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente.

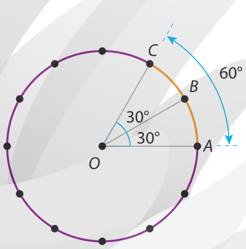
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Indicamos a medida angular do arco $\widehat{AB}$ por $m(\widehat{AB}) = 30°$.

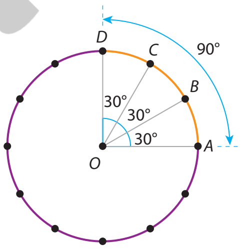
O arco $\widehat{AB}$ da figura é $\frac{1}{12}$ da circunferência, então podemos dizer que a medida do comprimento desse arco, na mesma unidade de medida da circunferência, é igual a $\frac{2\pi r}{12}$.

Observe algumas relações que podemos estabelecer entre a medida angular e a medida do comprimento de arcos de uma mesma circunferência.

- Um arco de medida angular de 60° tem o dobro da medida do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $2 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



- Um arco de medida angular de 90° tem o triplo da medida do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $3 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Arco de circunferência

Em duplas, peça aos estudantes que leiam o texto apresentado e elaborem uma ficha com os principais conceitos, ilustrando-a com figuras. Depois, proponha a cada dupla que exponha seu fichamento. Registre na lousa uma ficha correspondente às anotações da turma.

Apresente novos exemplos e destaque sempre a medida angular dos arcos envolvidos. Considere arcos que correspondem a divisões da circunferência em partes iguais:

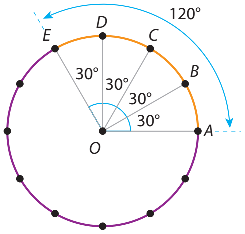
- medida de um arco que corresponde a um sexto da circunferência: 60°
- medida de um arco que corresponde a um terço da circunferência: 120°
- medida de um arco que corresponde a um oitavo da circunferência: 45°
- medida de um arco que corresponde a um quarto da circunferência: 90°
- medida de um arco que corresponde à metade da circunferência: 180°
- medida de um arco que corresponde a três quartos de uma circunferência: 270°

Arco de circunferência

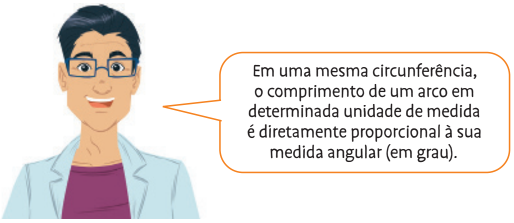
Explore com os estudantes a medida linear de um arco de circunferência, ou seja, a medida do seu comprimento. Depois, peça a eles que a comparem com a medida angular, observando o que essas medidas têm de diferente.

Se julgar necessário, retome a noção de grandezas diretamente proporcionais para a realização dos exemplos do livro do estudante. Amplie, propondo na lousa outros exemplos.

- Um arco de medida angular de 120° tem o quádruplo da medida do comprimento de um arco de 30°, ou seja, $4 \cdot \frac{2\pi r}{12}$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos considerar a seguinte terminologia:

- ℓ: medida do comprimento de um arco da circunferência (medido em determinada unidade de comprimento);
- α: medida angular do mesmo arco em grau;
- r: medida do raio da circunferência (medido na mesma unidade de comprimento de ℓ).

Lembrando que o arco de uma circunferência mede 360°, podemos, por meio da regra de três, organizar o seguinte quadro:

Medida do comprimento do arco	Medida angular do arco
$2\pi r$	360°
ℓ	α

Assim, obtemos a proporção: $\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\alpha}$

Acompanhe dois exemplos.

a) Vamos calcular a medida do comprimento de um arco de 20° em uma circunferência com raio de medida 10 cm.

Medida do comprimento do arco (cm)	Medida angular do arco (grau)
$2\pi \cdot (10)$	360°
ℓ	20°

$$\frac{20\pi}{\ell} = \frac{360}{20}$$

$$\frac{10\pi}{\ell} = \frac{9}{1}$$

$$9\ell = 10\pi$$

$$\frac{9\ell}{9} = \frac{10\pi}{9}$$

$$\ell = \frac{10\pi}{9}$$

Considerando $\pi \simeq 3{,}14$, obtemos:

$$\ell \simeq \frac{10 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 3{,}49$$

Portanto, o arco mede, aproximadamente, 3,49 cm.

b) Vamos calcular a medida em grau de um arco que mede 6π cm de comprimento em uma circunferência com raio de medida 15 cm.

Medida do comprimento do arco (cm)	Medida angular do arco (grau)
$2\pi \cdot (15)$	360°
6π	α

$$\frac{30\pi}{6\pi} = \frac{360}{\alpha}$$

$$\frac{5}{1} = \frac{360}{\alpha}$$

$$5\alpha = 360$$

$$\frac{5\alpha}{5} = \frac{360}{5}$$

$$\alpha = 72$$

Portanto, o arco mede 72°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Uma circunferência tem raio de medida 12 cm. Calcule a medida aproximada, em centímetro, de um arco dessa circunferência correspondente a um ângulo central de 40°. **11.** 8,4 cm

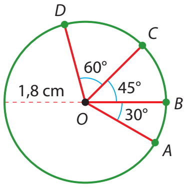
12 Construa uma circunferência com raio de medida 3 cm. Trace dois diâmetros perpendiculares entre si. Quantos centímetros mede aproximadamente cada um dos quatro arcos em que a circunferência ficou dividida? **12.** 4,71 cm

13 Uma circunferência é dividida em 12 arcos congruentes de medida 3π cm de comprimento. Determine: **13. a)** 36π cm **13. b)** 18 cm

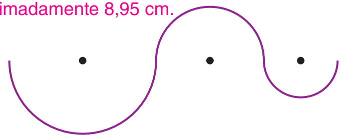
a) a medida do comprimento da circunferência;
b) a medida do raio dessa circunferência.

14 Calcule a medida aproximada do comprimento dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CD}$ da circunferência.

14. arco $\widehat{AB}$: 0,9 cm;
arco $\widehat{BC}$: 1,4 cm;
arco $\widehat{CD}$: 1,9 cm.

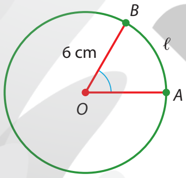


15 Calcule a medida aproximada do comprimento da linha representada pela figura a seguir. Utilize uma régua para obter a medida dos segmentos necessários para o cálculo. **15.** Aproximadamente 8,95 cm.



16 Construa uma circunferência cujo raio meça 4 cm. Trace um de seus diâmetros e apague metade da circunferência traçada. A figura obtida tem medida de perímetro de quantos centímetros, aproximadamente? **16.** 20,56 cm

17 Na figura, considere que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ mede 6,28 cm. Calcule a medida aproximada do ângulo $A\hat{O}B$. **17.** 60°

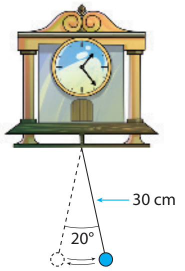


18 Calcule em grau a medida de um arco de circunferência de 9,42 cm, sabendo que o raio dessa circunferência mede 15 cm. **18.** 36°

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

19 Uma circunferência tem a medida do raio igual a 18 cm. Calcule a medida aproximada do comprimento do arco de 40° contido nessa circunferência. **19.** 12,56 cm

20 O pêndulo de um relógio de parede tem 30 cm de comprimento.

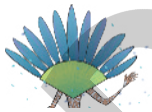


LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

A cada movimento, o pêndulo descreve um arco de 20°.
Determine a medida aproximada do percurso realizado pelo peso desse pêndulo. **20.** 10,5 cm

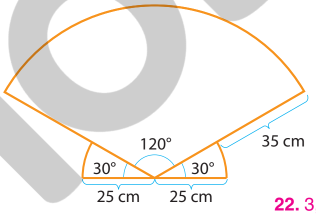
21 Calcule a medida em grau de um arco de 7,85 cm em uma circunferência de 10 cm de raio. **21.** 45°

22 Alguns adereços das fantasias de Carnaval são apreciados por sua beleza e pompa.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe, no esquema a seguir, a estrutura de um desses adereços feita com arame grosso.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

22. 3,22 m

Quantos metros de arame, aproximadamente, são necessários para construir esse adereço?

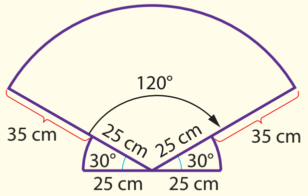
23 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre medida do comprimento de arco de circunferência. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **23.** Resposta pessoal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 11** a **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 15**, peça aos estudantes que discutam com os colegas o procedimento utilizado para chegar à resposta. É importante que eles percebam que o “caminho sinuoso” entre dois pontos é sempre mais longo que o “caminho em linha reta”. Desse modo, será possível saber que o comprimento da linha é maior que a distância em linha reta das duas extremidades da linha traçada. Verifique se eles percebem que podem colocar o número π em evidência, multiplicando-o pela soma das medidas dos três raios.

No **exercício 22**, podemos verificar pelo esboço que o raio do setor menor mede 25 cm e o raio do setor maior mede 60 cm (25 cm + 35 cm).



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, podemos determinar a medida do comprimento dos arcos de 30° e de 120°, em cm:

Medida do comprimento do arco (em cm)	Medida angular do arco
$2 \cdot \pi \cdot 25$	360°
x	30°

$$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 25}{x} = \frac{360}{30}$$

$x \simeq 13{,}08$

Medida do comprimento do arco (em cm)	Medida angular do arco
$2 \cdot \pi \cdot 60$	360°
y	120°

$$\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 60}{y} = \frac{360}{120}$$

$y \simeq 125{,}6$

Adicionando todas as partes do arame, obtemos aproximadamente 321,76 cm, ou seja, cerca de 322 cm ou 3,22 m.

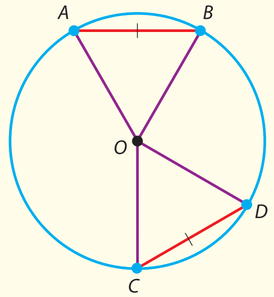
Para elaborar o problema no **exercício 23**, incentive os estudantes a utilizar diferentes contextos em que percebam que há elementos que podem ser associados ao arco de circunferência. Caso tenham dificuldades, eles podem aproveitar, por exemplo, a fotografia da abertura deste capítulo ou as pesquisas que realizaram durante o desenvolvimento dos conteúdos já estudados para criar situações com base neles.

Propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência

Apresente cada propriedade e peça aos estudantes que elaborem exemplos de situações envolvendo a respectiva propriedade estudada.

Se julgar conveniente, discuta com eles a demonstração da recíproca da 1ª propriedade:

A recíproca é verdadeira, ou seja, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas congruentes, então os arcos correspondentes a cada uma delas são também congruentes.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ ARQUIVO DA EDITORA

Hipótese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Tese: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

Demonstração

Considerando os triângulos AOB e COD, temos:

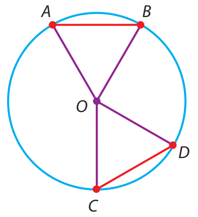
- $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ (raios)
- $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (raios)
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (por hipótese)

Logo, o triângulo AOB e COD são congruentes pelo caso LLL. Assim, concluímos que $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$.

Portanto, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$.

Propriedades entre arcos e cordas de uma circunferência

1ª propriedade



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Considere a figura ao lado, em que $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são arcos congruentes de uma circunferência.

Vamos mostrar que as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ também são congruentes.

Hipótese: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

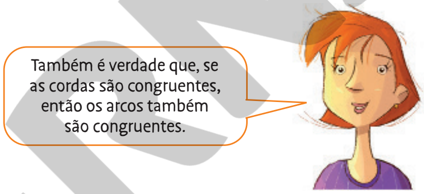
Tese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Observe que:

$$\left.\begin{array}{l} ① \ \overline{OA} \cong \overline{OD} \text{ (raios)} \\ ② \ A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \ (\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}) \\ ③ \ \overline{OB} \cong \overline{OC} \text{ (raios)} \end{array}\right\} \text{ Logo: } \triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (pelo caso LAL)}$$

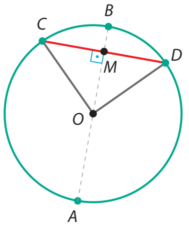
Portanto, os lados correspondentes são congruentes, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

> Em toda circunferência, se dois arcos têm a mesma medida, então as cordas compreendidas por esses arcos são **congruentes**.



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

2ª propriedade



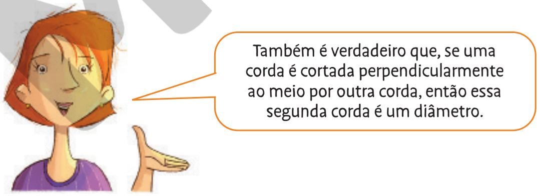
Considere a figura ao lado, em que o diâmetro $\overline{AB}$ é perpendicular à corda $\overline{CD}$.

Observe que $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios) e, portanto, $\triangle COD$ é um triângulo isósceles cuja altura é $\overline{OM}$.

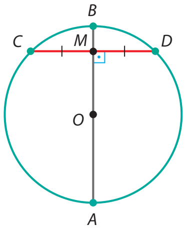
Como em um triângulo isósceles a altura relativa à base coincide com a mediana, então M é ponto médio de $\overline{CD}$. Logo, $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

Com isso, mostramos que:

> Em uma circunferência, todo diâmetro perpendicular a uma corda divide-a ao meio.



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA



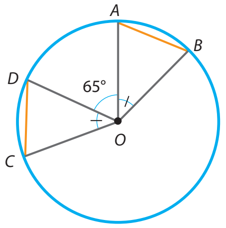
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Se $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ e $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, então $\overline{AB}$ é **diâmetro**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Na figura, $AB = 1{,}2$ cm e $m(A\hat{O}B) = 45°$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule:

a) a medida da corda $\overline{CD}$; **24. a)** 1,2 cm

b) a medida do ângulo $B\hat{O}C$. **24. b)** 155°

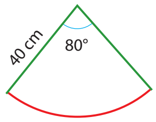
25 Considere um ponto P comum ao diâmetro $\overline{XY}$ de uma circunferência (de centro O) e a uma corda $\overline{AB}$. Determine a medida do raio dessa circunferência, sabendo que $\overline{XY}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, $OP = 5$ cm e $AB = 24$ cm.
25. 13 cm

26 Marque sobre uma folha do caderno três pontos: A, B e C, não alinhados. Trace o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{BC}$. Trace a mediatriz de cada um desses segmentos. Chame de M o ponto de encontro dessas mediatrizes. Com centro em M e abertura AM, trace uma circunferência. Qual é a posição dos pontos A, B e C em relação à circunferência?

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!) **26.** Estão situados sobre a circunferência.

27 Construa um triângulo ABC, em que $AB = 4$ cm, $BC = 3{,}6$ cm e $AC = 7$ cm. Trace uma circunferência que passe pelos vértices desse triângulo.
27. Construção de figura.

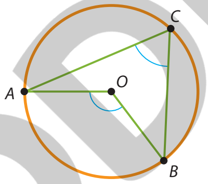
28 Para confeccionar um chapéu de palhaço, Aline seguiu o modelo indicado na figura. Determine a medida aproximada do arco de circunferência desse modelo. **28.** 55,8 cm



2 Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

Considere a figura ao lado.

Nela, destacamos o ângulo inscrito $A\hat{C}B$, ou seja, um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência.

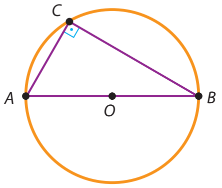


Sabemos que um ângulo inscrito em uma circunferência tem por medida a metade da medida do ângulo central correspondente e, portanto, a metade da medida do arco compreendido por seus lados, ou seja:

$$m(A\hat{C}B) = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

Esta outra figura mostra um triângulo em que um dos lados é um diâmetro da circunferência. Esse triângulo é retângulo, pois:

$$m(\hat{C}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$



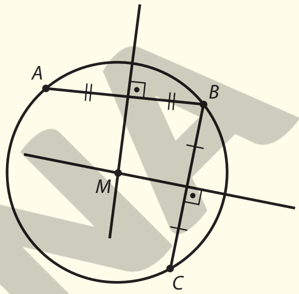
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 24**, **25** e **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

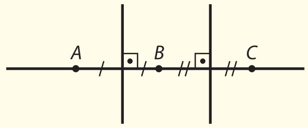
Incentive os estudantes a fazer um esboço das situações propostas neste bloco de exercícios.

No **exercício 26**, um possível esboço é o que segue. Por meio dele, os estudantes podem verificar que os pontos A, B e C, nesse caso, estão sobre a circunferência.



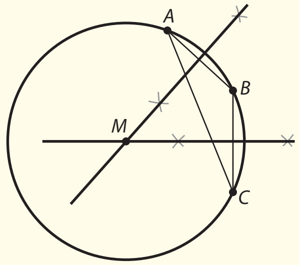
ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Após a resolução do **exercício 26**, questione os estudantes sobre qual posição teriam as mediatrizes de $\overline{AB}$ e de $\overline{BC}$ caso os pontos A, B e C estivessem alinhados. Existiria o ponto M? Existiria uma circunferência passando por A, B e C? Fazendo um novo esboço, eles podem verificar que as mediatrizes desses segmentos seriam paralelas e, portanto, não teriam ponto em comum.



Assim, não existiria o ponto M nem uma circunferência que passasse por esses três pontos simultaneamente.

Para o **exercício 27**, com régua e compasso, construímos o triângulo com lados com as medidas indicadas. Como dois lados desse triângulo serão cordas da circunferência, cada mediatriz desses dois lados passará pelo centro da circunferência (os diâmetros perpendiculares às cordas dividem essas cordas ao meio). Logo, essas duas mediatrizes determinarão o ponto M, centro da circunferência.



2. Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

- Habilidade da BNCC: **EF09MA11**.

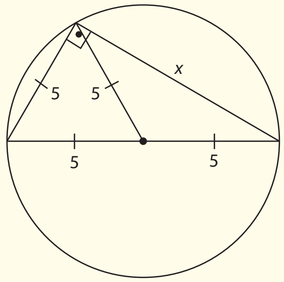
Para comprovar a definição apresentada neste tópico, peça aos estudantes que, usando régua, transferidor e compasso, desenhem um triângulo retângulo qualquer com uma circunferência o circunscrevendo.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 29** a **31** e **33** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 32**, os estudantes deverão perceber que, se a circunferência tem 10π cm de comprimento, então ela tem raio de medida igual a 5 cm, pois: $\frac{10\pi}{2\pi} = 5$.

Como o triângulo está inscrito na circunferência, a hipotenusa tem medida igual à do diâmetro dessa circunferência, que é 10 cm. Note que a mediana desse triângulo relativa à hipotenusa é um raio dessa circunferência e, portanto, mede 5 cm. Assim, o menor cateto também mede 5 cm. Segue um esboço da situação:



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Desse modo, uma possível resolução para os **itens a** e **b** desse exercício é:

a) Considerando *x*, em cm, a medida do cateto procurado, basta utilizar o teorema de Pitágoras para determinar seu valor:

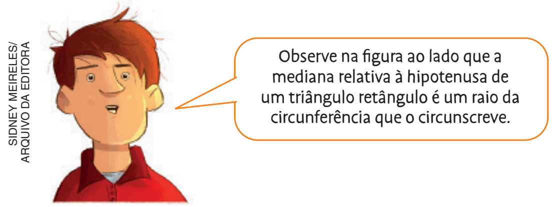
$10^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 75 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

b) Como o triângulo é retângulo, considerando um dos catetos como base, a altura relativa a essa base é o outro cateto. Logo, a área desse triângulo, em cm^2, mede:

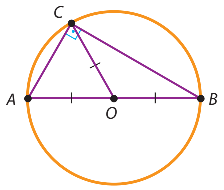
$$A = \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{2}$$

$$A = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

De modo geral, todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo e, reciprocamente, todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência.



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

29 Determine a medida da mediana, relativa à hipotenusa, de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{20}$ cm e 4 cm. **29.** 3 cm

30 A mediana de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa mede 4 cm, e um dos catetos mede $\sqrt{15}$ cm. Qual é a medida do outro cateto? **30.** 7 cm

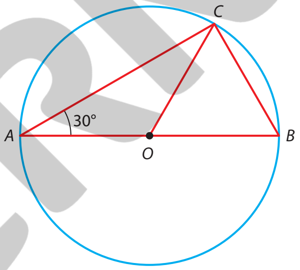
31 A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Calcule quantos centímetros mede o comprimento da circunferência que o circunscreve.
31. Aproximadamente 75,36 cm.

32 O comprimento de uma circunferência mede 10π cm. Determine: **32. a)** $5\sqrt{3}$ cm

a) a medida do cateto maior de um triângulo retângulo inscrito nessa circunferência, sabendo que o menor cateto tem a mesma medida da mediana relativa à hipotenusa;
b) a medida da área desse triângulo.

32. b) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2

33 Considere o triângulo *ABC* inscrito em uma circunferência de raio de medida 3 cm.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais são as medidas de $A\hat{C}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{O}C$, $B\hat{C}O$ e $A\hat{O}C$? **33. a)** 90°, 60°, 60°, 60° e 120°.
b) Quais são as medidas de $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? **33. b)** 3 cm, 3 cm, 3 cm, 6 cm e $3\sqrt{3}$ cm.
c) Classifique, quanto às medidas dos ângulos e às medidas dos lados, os triângulos *ABC*, *AOC* e *OBC*.

33. c) Triângulo retângulo e escaleno, triângulo obtusângulo e isósceles, triângulo acutângulo e equilátero.

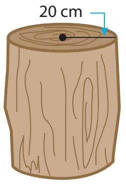
Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

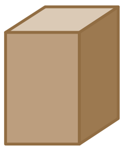
Deseja-se cortar, de um toco de árvore cujo raio mede 20 cm, uma coluna de base quadrada em formato como o de um bloco retangular.

1 Determine a medida máxima do lado da base que se pode obter. *Pense mais um pouco...*: **1.** $20\sqrt{2}$ cm

2 Calcule a medida da área da base quadrada da coluna em centímetro quadrado. **2.** 800 cm^2



toco de árvore



coluna de base quadrada

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

Peça aos estudantes que deixem registrada toda a resolução da atividade proposta, incluindo explicações e cálculos, para que possam comparar e discutir com os colegas.

Na **atividade 1**, se a medida da diagonal do quadrado coincide com a do diâmetro da circunferência (40 cm) e ℓ é a medida do lado desse quadrado, em centímetro, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$40^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{800} \Rightarrow \ell = 20\sqrt{2}$

Na **atividade 2**, se a base quadrada tem lado de medida igual a $\ell = 20\sqrt{2}$ cm, então a área dessa base, em cm^2, mede:

$A = \ell^2 = (20\sqrt{2})^2 = 400 \cdot 2 = 800$

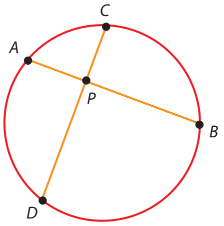
Proponha aos estudantes que calculem também a medida do volume da coluna em formato de paralelepípedo. Nesse caso, eles poderão atribuir valores para a medida de altura dessa coluna ou apenas representá-la por uma letra.

3 Relações métricas em uma circunferência

1ª relação

Considerando a figura ao lado, vamos demonstrar que:

> Se duas cordas se intersectam em um ponto interior a uma circunferência, então o produto das medidas dos dois segmentos de uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

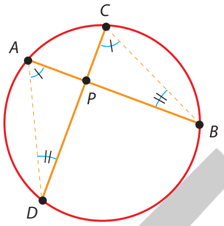


Hipótese: as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se intersectam em um ponto P, interior à circunferência.

Tese: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, obtemos os triângulos APD e CPB. Nesses triângulos:

- os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{BD}$;
- os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{AC}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

Logo, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos APD e CPB são semelhantes.

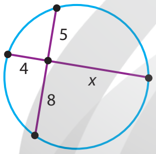
Portanto, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ou seja:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Acompanhe alguns exemplos.

Vamos calcular o valor de x em cada figura.

a)



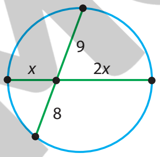
$4 \cdot x = 8 \cdot 5$

$4x = 40$

$x = \frac{40}{4}$

$x = 10$

b)



$2x \cdot x = 8 \cdot 9$

$2x^2 = 72$

$x^2 = \frac{72}{2}$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

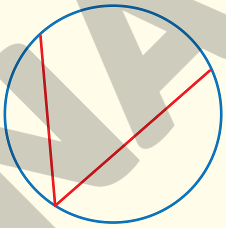
Como x é um número positivo, $x = 6$.

3. Relações métricas em uma circunferência

Habilidade da BNCC: **EF09MA11**.

Iniciamos o estudo das relações métricas em uma circunferência. A **1ª relação** é a que envolve duas cordas que se cruzam em um ponto interno à circunferência.

Peça aos estudantes que mostrem situações (com representação de esquemas) em que duas cordas podem ter um único ponto em comum. Espera-se que surja esta situação também:



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Discuta com eles por que ela não está nas condições da hipótese da 1ª relação. Espera-se que percebam que o ponto comum às duas cordas não é um ponto interior à circunferência, mas um ponto pertencente à circunferência. Destaque que não são formados 4 segmentos.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 34** a **37** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 36**, questione os estudantes a respeito da necessidade da informação de que "os passos das duas garotas têm o mesmo comprimento". Espera-se que eles observem que sem essa afirmação não seria possível estabelecer essas relações, pois não teríamos a garantia de tal proporcionalidade, visto que cada medida estaria em uma unidade diferente.

2ª relação

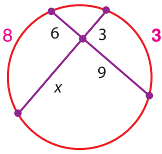
Converse com os estudantes sobre essa relação métrica e incentive-os a compor alguns exemplos com circunferência e duas retas secantes a ela e anotar as medidas dos segmentos obtidos, verificando essa relação. Se possível, os estudantes podem utilizar *softwares* de geometria dinâmica para explorar essa sugestão de atividade e, assim, desenvolver a **competência geral 5**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

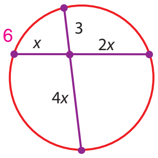
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

34 Calcule o valor de x em cada uma das figuras.

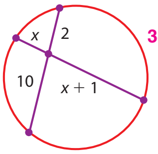
a) **34. a)** $x = 18$



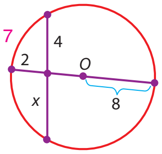
c) **34. c)** $x = 6$



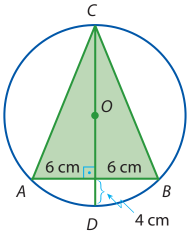
b) **34. b)** $x = 4$



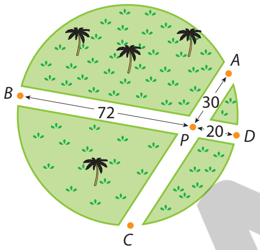
d) **34. d)** $x = 7$



35 Determine a medida da área do $\triangle ABC$ a seguir. **35.** 54 cm²



36 Uma praça circular é cortada por duas ruas, como mostra a figura a seguir.



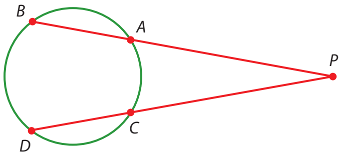
Para ir de A até P, Rita dá 30 passos. Luísa dá 72 passos para ir de B a P e 20 passos para ir de P a D. Calcule quantos passos Rita deve dar para chegar até C, admitindo que os passos das duas garotas tenham mesma medida de comprimento. **36.** 48 passos.

37 Uma corda de 6 cm corta perpendicularmente um diâmetro a 4 cm do centro de uma circunferência. Calcule a medida da área do círculo determinada por essa circunferência. **37.** 25π cm²

2ª relação

Considerando a figura ao lado, vamos provar que:

> Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos dois segmentos secantes, então o produto das medidas de um segmento secante e de sua parte externa é igual ao produto das medidas do outro segmento secante e de sua parte externa.

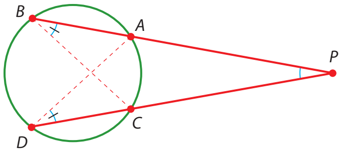


Hipótese: $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$ são segmentos secantes à circunferência, com P no exterior.

Tese: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Traçando os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, obtemos os triângulos PAD e PCB. Nesses triângulos:

- os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos e determinam na circunferência o mesmo arco $\overset{\frown}{AC}$;
- o ângulo $\hat{P}$ é comum.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos *APD* e *CPB* são semelhantes.

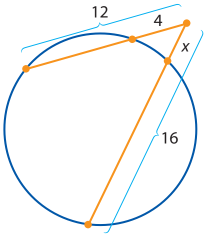
Portanto, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, ou seja:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Acompanhe alguns exemplos.

Vamos calcular o valor de *x* em cada figura.

a)



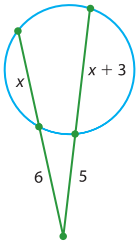
$16 \cdot x = 4 \cdot 12$

$16x = 48$

$x = \frac{48}{16}$

$x = 3$

b)



$6 \cdot (6 + x) = 5 \cdot (x + 8)$

$36 + 6x = 5x + 40$

$6x - 5x = 40 - 36$

$x = 4$

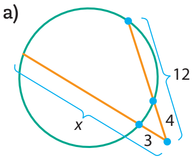
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

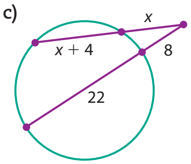
38 Calcule o valor de *x* em cada uma das figuras.

a)



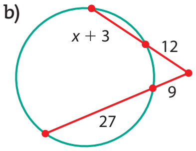
38. a) $x = 16$

c)



38. c) $x = 10$

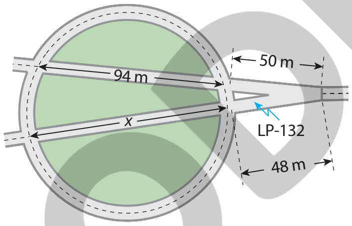
b)



38. b) $x = 12$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

39 O canteiro circular de uma rotatória é cortado por duas estradas, como mostra a figura a seguir. A medida do comprimento da parte da estrada LP-132 que corta o canteiro está indicada por *x*. Calcule o valor de *x*. **39.** 102 m



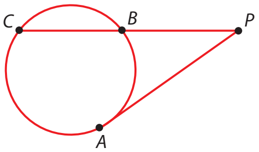
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3ª relação

Na figura ao lado, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência.

Vamos provar que:

> Se, de um ponto exterior a uma circunferência, traçamos um segmento tangente e um segmento secante a essa circunferência, então o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto das medidas do segmento secante e de sua parte externa.



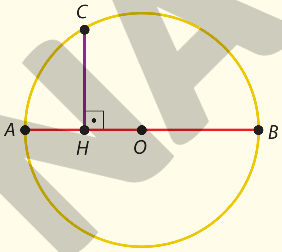
Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 38** e **39** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

3ª relação

Após trabalhar a 3ª relação, se julgar conveniente, explore a situação indicada a seguir.

Na circunferência desta figura, temos que *O* é o centro, $\overline{AB}$ é um diâmetro e $\overline{CH}$ é um segmento perpendicular a $\overline{AB}$. Vamos provar que $(HC)^2 = AH \cdot HB$



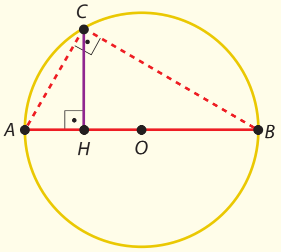
ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Hipótese: $\overline{CH}$ é perpendicular a $\overline{AB}$

Tese: $(HC)^2 = AH \cdot HB$

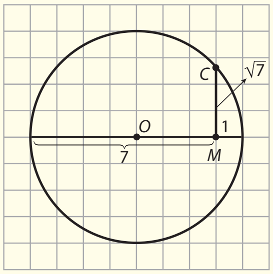
Demonstração

Unindo *C* com *A* e *C* com *B*, obtemos o triângulo *ABC*, que é retângulo (inscrito em uma semicircunferência).



Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura (relativa à hipotenusa) é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos (sobre a hipotenusa), isto é: $(HC)^2 = AH \cdot HB$

Segue um exemplo de aplicação dessa relação para representar geometricamente $\sqrt{7}$. Traçamos uma circunferência cujo diâmetro mede 8. Marcamos sobre um dos diâmetros um ponto *M*, distante 7 unidades de um dos extremos. Traçamos por esse ponto uma perpendicular que encontrará a circunferência no ponto *C*.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

$$(CM)^2 = 7 \cdot 1 = 7 \Rightarrow CM = \sqrt{7}$$

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 40** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 41**, sugira aos estudantes que nomeiem os pontos nos quais se encontram o fotógrafo e o acrobata em cada fotografia. Por exemplo, F para a posição do fotógrafo e A_1, A_2 e A_3 para as posições do acrobata nas fotografias 1, 2 e 3, respectivamente. Assim, é necessário que eles percebam que os valores escolhidos devem satisfazer a relação:

$(FA_3)^2 = (FA_2) \cdot (FA_1)$

Uma possível resposta:

$FA_3 = 6$ m, $FA_2 = 4$ m e $FA_1 = 9$ m.

Note que: $4 \cdot 9 = 36 = 6^2$

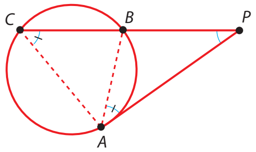
Para o **exercício 42**, incentive os estudantes a elaborar problemas envolvendo cada uma das relações trabalhadas neste tópico; para isso, eles podem ser organizados em três grupos e os participantes de cada grupo elaboram um problema para uma relação. Depois, apresentam alguns dos problemas elaborados aos colegas dos demais grupos.

Hipótese: $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são segmentos tangente e secante à circunferência, respectivamente.

Tese: $(PA)^2 = PB \cdot PC$

Traçando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, obtemos os triângulos PBA e PAC. Nesses triângulos:

- os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$ são congruentes, pois são ângulos com vértice na circunferência e determinam nela o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$;
- o ângulo $\hat{P}$ é comum.



Logo, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos, os triângulos PBA e PAC são semelhantes.

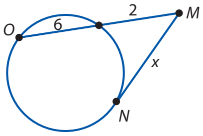
Portanto, $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PB}{PA}$, ou seja:

$$\boxed{(PA)^2 = PB \cdot PC}$$

Acompanhe os exemplos.

Vamos calcular o valor de x em cada figura, sabendo que $\overline{MN}$ é tangente à circunferência.

a)



$x^2 = 8 \cdot 2$

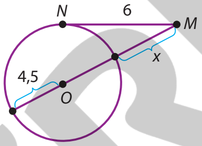
$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Como x é um número positivo, $x = 4$.

b)



$6^2 = x \cdot (x + 9)$

$x^2 + 9x - 36 = 0$

$x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1}$

Como x é um número positivo, $x = 3$.

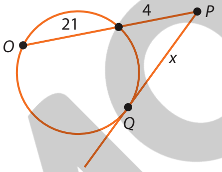
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

40 Calcule o valor de x nas figuras a seguir, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência.

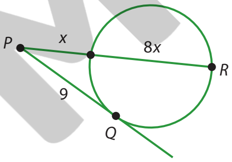
a)

40. a) $x = 10$



b)

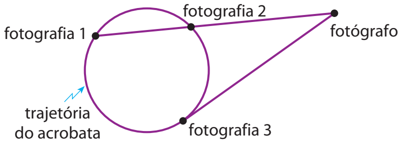
40. b) $x = 3$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

41 Um fotógrafo assistia a uma apresentação circense na qual um acrobata, durante toda sua apresentação, descreveu um movimento circular em torno do picadeiro. Em três momentos distintos, o fotógrafo tirou fotografias conforme o esquema a seguir.

41. Resposta pessoal.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Estime valores para as medida das distâncias entre o acrobata e o fotógrafo, nos momentos das fotografias, de modo que atendam à 3ª relação estudada.

42 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre uma das três propriedades estudadas. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

42. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Semicoroa circular

Nesta reportagem, observe um tipo de gráfico, diferente dos que já estudamos até aqui, muito usado em jornais e revistas.

É desperdiçada aos montes

A água é essencial para a vida, e seu desperdício pode acarretar sérios problemas socioambientais para a humanidade. Isso porque, embora 70% do planeta Terra seja coberto por água, apenas 1% dela é própria para o consumo.

Para onde vai nosso estoque de água doce:

Dados obtidos em: GRUPO Recicla. Quais são as atividades que mais consomem água no mundo? **Blog Grupo Recicla**, Cachoeirinha, 18 dez. 2019. Disponível em: https://www.gruporecicla.com.br/2019/12/18/quais-sao-as-atividades-que-mais-consomem-agua-no-mundo/. Acesso em: 4 jul. 2022; WWF-Brasil. Dia Mundial da Água. **WWF** Brasília, [201-]. Disponível em: https://www.wwf.org.br/natureza_brasileira/areas_prioritarias/pantanal/dia_da_agua/#:~:text=Do%20total%20de%20%C3%A1gua%20dispon%C3%ADvel,1%25%20est%C3%A1%20dispon%C3%ADvel%20para%20consumo. Acesso em: 4 jul. 2022.

Podemos considerar o gráfico usado na reportagem como uma variação de um gráfico de setores. Porém, em vez de ser composto de setores circulares cujo total forma um círculo, suas partes compõem uma semicoroa circular, ou seja, uma região limitada por duas semicircunferências concêntricas.

Para construir um gráfico com semicoroa circular, uma vez construída a tabela com as frequências relativas dos dados pesquisados, basta multiplicar as porcentagens por 180° (no gráfico de setores multiplicamos por 360°) e construir, com um transferidor, setores circulares adjacentes, de mesmo raio e centro, cujas medidas angulares são os produtos obtidos. A soma desses setores resulta em um semicírculo do qual retiramos outro semicírculo concêntrico de raio menor.

No exemplo da reportagem, 70% da água doce é destinada à agricultura (tanto no Brasil como no mundo). Então, o setor que inicialmente devemos representar para esse dado deve medir $0,7 \cdot 180°$, isto é, 126°.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Faça uma pesquisa com os colegas de turma sobre a quantidade de água que eles bebem, em média, por dia. Em seguida, construa uma tabela e um gráfico como o da reportagem apresentada.

Considere na pesquisa as seguintes quantidades (e que 1 copo = 200 mL):

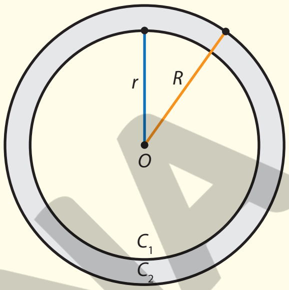
Construção de tabela e de gráfico.

- 1 copo;
- 2 copos;
- 3 copos;
- 4 copos;
- 5 copos;
- 6 ou mais copos.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA23**.

Esta seção aborda gráficos formados por semicoroa circular. Explique aos estudantes que **coroa circular** é a região do plano delimitada por duas circunferências concêntricas (que têm mesmo centro) de raios medindo *R* e *r*.



Explore o formato e os elementos do gráfico dado por uma semicoroa (metade de uma coroa) circular.

Para a construção do gráfico solicitado na questão do **Agora quem trabalha é você!**, organize os estudantes em duplas. Os dois estudantes da dupla devem fazer juntos a organização da tabela e a construção do gráfico relativo à pesquisa de cada um deles.

Em seguida, promova uma apresentação dos gráficos de cada dupla.

O trabalho com a atividade de pesquisa, construção de tabela e gráfico favorece o desenvolvimento da habilidade (EF09MA23).

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios é mais uma oportunidade de os estudantes revisitarem os principais conceitos tratados e mobilizarem os conhecimentos construídos ao longo do capítulo, identificando possíveis dúvidas.

As resoluções do **exercício 2** e dos **exercícios 4** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 1**, a pista *A* tem a medida do raio médio igual a 3 m e a pista B, 3,6 m. Assim:

a) A medida da distância percorrida, em metro, é dada por $36 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3$, ou seja, 216π m. Com $\pi = 3{,}14$, temos que essa distância mede 678,24 m, pois: $216 \cdot 3{,}14 = 678{,}24$

b) A medida da distância percorrida, em metro, é dada por $24 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6$, ou seja, $172{,}8\pi$ m. Com $\pi = 3{,}14$, temos que essa distância mede cerca de 542,59 m, pois: $172{,}8 \cdot 3{,}14 = 542{,}592$

No **exercício 3**, temos que o raio *r* mede 24 m. Assim, a medida do comprimento da pista é:

$$C = 2\pi \cdot 24 = 48\pi$$

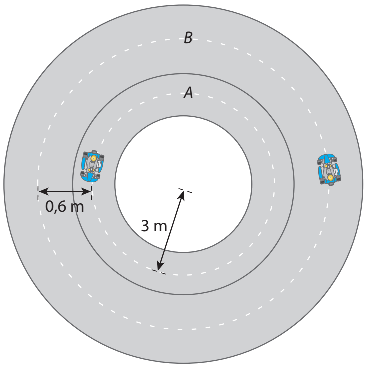
Como são realizadas 15 voltas, a medida da distância percorrida é igual a $15 \cdot 48\pi$, ou seja, 720π. Considerando $\pi = 3{,}14$, a medida da distância percorrida é 2 260,8 m. Dessa maneira, como o tempo do percurso foi igual a 160 s, a velocidade, em m/s, é:

$$v = \frac{2\,260{,}8}{160} = 14{,}13$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um autorama circular tem duas pistas, *A* e *B*, conforme esquema a seguir.



1. a) Aproximadamente 678,24 m.

a) Depois que um carro der 36 voltas na pista A, quantos metros terá andado?

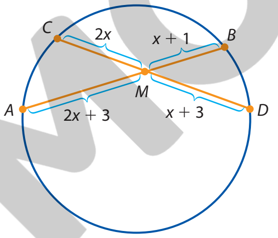
b) Quantos metros terá andado um carro que der 24 voltas na pista B?

1. b) Aproximadamente 542,59 m.

2 O ponteiro dos minutos de um relógio de parede mede 9 cm. Determine a medida da distância, em centímetro, que o extremo desse ponteiro percorre em 20 minutos. **2.** 6π cm

3 Um ciclista, em uma pista circular de 24 m de raio, dá 15 voltas em 160 segundos. Qual é medida da velocidade média dele nesse trajeto? **3.** 14,13 m/s

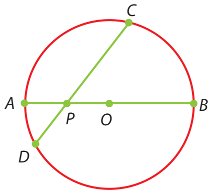
4 Observe a circunferência a seguir em que as cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, concorrem no ponto *M*.



Sejam *AM*, *MB*, *CM* e *MD* dadas em centímetro. Quanto vale *AB*? **4.** Alternativa **d.**

a) 36.
b) 18.
c) 14.
d) 13.

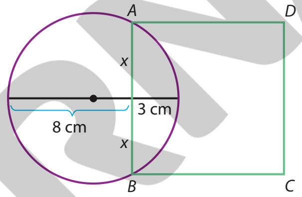
5 (USF-SP) Na circunferência abaixo, de centro *O* e raio $r = 4$, a corda $\overline{CD}$ corta o diâmetro $\overline{AB}$ no ponto *P* de tal forma que *P* é o ponto médio do raio $\overline{OA}$ e $PC = 2 \cdot PD$. **5.** Alternativa **b.**



Então:

a) $CD = 2\sqrt{6}$
b) $CD = 3\sqrt{6}$
c) $CD = 6\sqrt{6}$
d) $CD = \sqrt{6}$
e) $CD = 6$

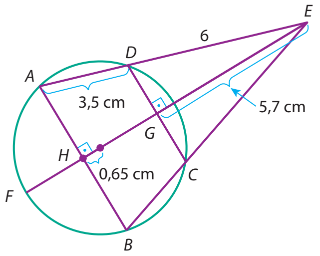
6 Considerando a figura, determine a medida da área do quadrado *ABCD*. **6.** 96 cm²



7 Em uma circunferência, uma corda é intersectada por um diâmetro que fica dividido em dois segmentos, um de 7 cm e um de 2 cm. Se essa intersecção é feita a 2,5 cm do centro da circunferência, quanto mede o raio da circunferência? **7.** 4,5 cm

8 Construa uma circunferência de 12 cm de diâmetro e trace um diâmetro $\overline{AB}$. Marque sobre ele, distante 11 cm de *A*, um ponto *M*. Trace, por esse ponto, uma perpendicular que intersecte a circunferência em um ponto *P*. O segmento $\overline{PM}$ é a representação geométrica de qual número? **8.** $PM = \sqrt{11}$

9 Determine a medida da altura $\overline{EH}$ do triângulo *ABE* na figura. **9.** 9,025 cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um corredor treina em uma pista circular de comprimento de medida 31,4 km. Qual é a medida do raio da circunferência da pista?

a) 197,19 km
b) 98,6 km **1.** Alternativa **d.**
c) 10 km
d) 5 km

2 Um automóvel é fabricado com rodas aro 17”. Sabendo que 1” equivale a 2,54 cm, qual é a medida aproximada do comprimento da circunferência dessa roda? **2.** Alternativa **c.**

a) 15,95 cm
b) 106,8 cm
c) 135,6 cm
d) 271,2 cm

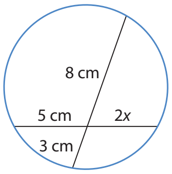
3 Qual é, aproximadamente, a medida do comprimento de arco compreendido por um ângulo de 45° em uma circunferência de raio de medida 4,5 m? **3.** Alternativa **c.**

a) 14,13 m
b) 28,26 m
c) 3,53 m
d) 1,18 m

4 Qual é a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio de medida 15 cm?

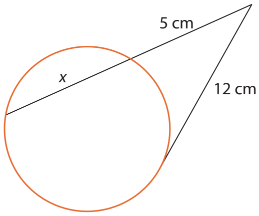
a) 30 cm **4.** Alternativa **a.**
b) 15π cm
c) 60 cm
d) 30π cm

5 Qual é o valor de x na figura? **5.** Alternativa **b.**



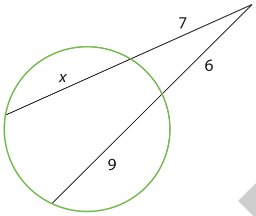
a) 0,417 cm
b) 2,4 cm
c) 4,2 cm
d) 20 cm

6 Sendo x, em centímetro, a medida da corda indicada na figura, qual é, aproximadamente, a medida do comprimento de uma circunferência cujo raio mede x? **6.** Alternativa **d.**



a) 18,09 cm
b) 21,42 cm
c) 33,18 cm
d) 149,46 cm

7 Sendo x a medida, em centímetro, da corda indicada na figura, aproximadamente, qual é a medida da área de um quadrado cujos lados medem x? **7.** Alternativa **c.**



a) 165,38 cm
b) 64
c) 34,31 cm
d) 22 cm

8 Qual é a medida do ângulo correspondente a um índice de 50% em um gráfico de semicoroa circular? **8.** Alternativa **a.**

a) 90°
b) 45°
c) 180°
d) 120°

Organizando:
c) Sabendo a medida do raio *r* de uma circunferência, a medida de seu comprimento é dada por $2\pi r$. A medida do diâmetro *D* é dada por $D = \frac{C}{\pi}$.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) O que é um arco de circunferência? **a)** É cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos distintos.

b) A razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro é sempre o mesmo valor. Qual é esse valor? **b)** O valor é sempre igual a pi (π), aproximadamente 3,14.

c) Como podemos determinar a medida do comprimento de uma circunferência qualquer? Sabendo a medida do comprimento de uma circunferência, é possível determinar a medida de seu diâmetro?

d) Explique as três relações métricas em uma circunferência que você aprendeu neste capítulo.
d) Espera-se que os estudantes enunciem, com suas palavras, as relações métricas estudadas.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando

Os testes desta seção são mais uma oportunidade para o estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos e mapas conceituais ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e que reflitam sobre algumas temáticas.

Capítulo 12 – Polígonos regulares e áreas

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas de Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, ampliamos o trabalho sobre polígonos regulares e seus elementos ao apresentar as relações métricas entre elementos de um polígono regular e a circunferência a que ele está inscrito.

Desenvolvemos o estudo de polígonos regulares, com o uso da linguagem algébrica, e de questões de construção geométrica de figuras. Nas demonstrações mostramos a aplicação do teorema de Pitágoras e da proporcionalidade.

Tratamos da medida da área de um polígono regular, de um círculo e de suas partes; e da medida do volume de alguns sólidos geométricos.

O contexto da abertura deste capítulo possibilita desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, pois os estudantes podem pesquisar e debater sobre o carimbó, que é uma manifestação artística que pode representar o multiculturalismo brasileiro, visto que reúne elementos de diferentes culturas.

Associado a isso, podem-se desenvolver atividades interdisciplinares com Arte, solicitando aos estudantes que pesquisem e analisem diferentes formas de expressão, representação e encenação da dança, em diferentes regiões do Brasil. Também é possível explorar a pintura **Dançando carimbó** e outras que retratem o multiculturalismo nas matrizes históricas brasileiras, orientando os estudantes a analisar aspectos históricos, sociais e políticos da produção artística. Dessa maneira, os estudantes desenvolvem a **competência geral 3**, pois poderão fruir e valorizar diferentes manifestações artísticas.

Capítulo
12
Polígonos regulares e áreas

Observe, leia e responda no caderno. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

a) Junte-se a outros três colegas e pesquisem o carimbó e outras manifestações artísticas e culturais de diferentes regiões do Brasil. Conversem sobre a importância de reconhecer e valorizar o multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras.

b) Com base na pesquisa que realizaram, que elementos da obra **Dançando carimbó**, de Thais Gomez, vocês acreditam que mais representam o carimbó?

c) Que tipo de instrumento musical é o curimbó? Qual é o formato dele? Que elemento geométrico foi utilizado na tela **Dançando carimbó** para o representar?

THAÍS GOMEZ - COLEÇÃO PARTICULAR

GOMEZ, T. **Dançando Carimbó**. 2011. Acrílica sobre tela, 60 × 80 cm.

c) O curimbó é um instrumento de percussão, um tambor; ele pode ser associado a um cilindro reto; na tela **Dançando carimbó** ele foi representado por meio de uma figura que lembra um círculo.

Tradicional no Pará, o carimbó reúne elementos de culturas indígenas, ibéricas e africanas. Em suas músicas, nos instrumentos e nas danças, expressa características das populações tradicionais da região e a relação delas com o ambiente. Em tupi, *curimbó* significa "pau oco" e é o nome do instrumento de percussão indígena de onde deriva carimbó. Essa manifestação artística e cultural tem sido preservada pela oralidade dos mestres populares e, em 2014, tornou-se um Patrimônio Cultural Imaterial do Brasil.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos:

HUERTAS, B. M. O carimbó: cultura tradicional paraense, patrimônio imaterial do Brasil. **Revista CPC**, [*s. l.*], n. 18, p. 81-105, 2014. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/cpc/article/view/74966. Acesso em: 23 jul. 2022.

Nesse artigo, a autora apresenta um breve histórico sobre o carimbó e explora a relação dessa manifestação artística com o modo de vida de comunidades tradicionais.

1 Relações métricas nos polígonos regulares

Retomando o estudo dos polígonos regulares


PETER PROBST/ALAMY/FOTOARENA

Relógio na torre do antigo complexo de estaleiros e arsenais navais da cidade de Veneza, na Itália.

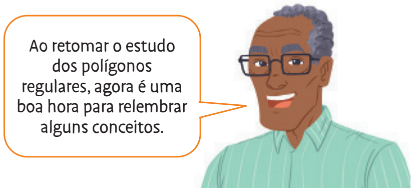
Ao elaborar um projeto para a construção de mostradores de relógios de parede feitos com chapas de madeira, Edgard precisa efetuar cálculos das medidas de um dodecágono regular com base na medida do raio da circunferência circunscrita a ele. Em particular, para saber quanto material comprar, ele precisará calcular a medida da área desse polígono.

Situações como a de Edgard requerem um estudo sobre as relações métricas em polígonos regulares, o que faremos neste capítulo.

Orientação: A situação descrita será explorada no exercício 36, na página 291.

Por exemplo:

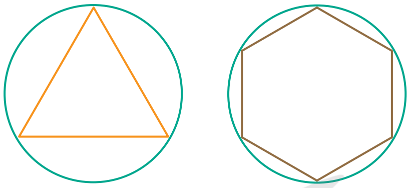
- Um polígono é regular quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si.
- Todo polígono regular é inscritível e circunscritível em uma circunferência.

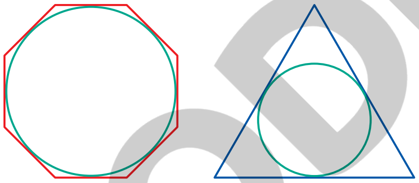


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Também vimos que, se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes:

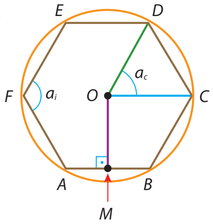
- as cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular inscrito na circunferência;
- as tangentes aos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular circunscrito à circunferência. Observe os exemplos a seguir.


polígonos regulares inscritos


polígonos regulares circunscritos

Em um polígono regular, consideramos:

- **centro do polígono**: centro da circunferência circunscrita a ele (ponto *O*);
- **raio do polígono**: raio da circunferência circunscrita a ele ($\overline{OC}$);
- **apótema do polígono**: segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados ($\overline{OM}$);
- **ângulo central**: aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados são semirretas que contêm dois vértices consecutivos do polígono ($C\hat{O}D$);
- $\boldsymbol{a_c} = \frac{360°}{n}$ e $\boldsymbol{a_i} = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$, em que *n* é o número de lados.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Relações métricas nos polígonos regulares

Habilidades da BNCC: **EF09MA11** e **EF09MA14**.

Neste tópico, ao estudar os polígonos regulares inscritos em uma circunferência, os estudantes mobilizam as habilidades (EF09MA11) e (EF09MA14), pois precisam compreender os conceitos de ângulo central e de ângulo inscrito e aplicar o teorema de Pitágoras para resolver problemas. Pergunte aos estudantes em que situações observam formatos de objetos que podem associar a polígonos regulares. Espera-se que identifiquem os favos hexagonais de uma colmeia ou os pentágonos em uma bola de futebol, por exemplo.

Aproveite o momento e verifique que conhecimentos eles já têm sobre polígonos regulares. Peça que deem exemplos desse tipo de polígono: quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular etc.

Desenhe na lousa um polígono regular com alguns de seus elementos e peça aos estudantes que os identifiquem.

Quadrado inscrito

Explore o quadrado inscrito em uma circunferência de raio medindo *r*. Peça aos estudantes que identifiquem os elementos do quadrado em relação aos elementos da circunferência. Espera-se que eles percebam que:

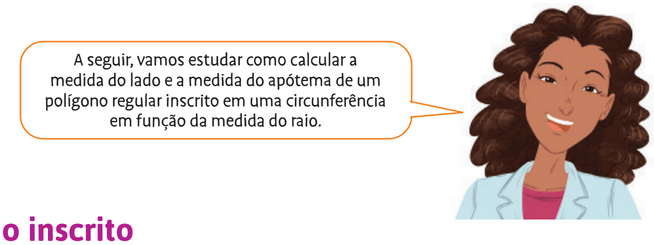
- as diagonais do quadrado são diâmetros da circunferência e, portanto, que a medida *d* da diagonal é dada por: $d = 2r$
- como o ângulo central do quadrado mede 90° $\left(\frac{360°}{4}\right)$, cada triângulo retângulo cuja hipotenusa é o lado do quadrado (de medida ℓ) é um triângulo isósceles cujos catetos medem *r*. Assim, pelo teorema de Pitágoras, determinamos que: $\ell = r\sqrt{2}$

Note que essa relação poderia ter sido obtida por $d = \ell\sqrt{2}$, pois:

$$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 2r = \ell\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Quadrado inscrito

Considere uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

Para construir um quadrado *ABCD* inscrito nessa circunferência, podemos traçar dois diâmetros perpendiculares entre si ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), determinando os vértices do quadrado.

Vamos calcular as medidas do lado e do apótema desse quadrado em função de *r*.

Cálculo da medida do lado (ℓ)

No △*AOB*, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

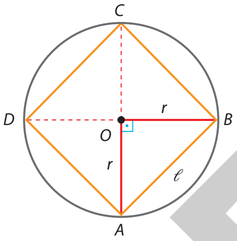
$$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

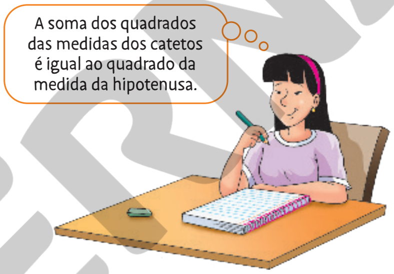
$$\ell^2 = r^2 + r^2$$

$$\ell^2 = 2r^2 \quad (r > 0)$$

$$\ell = \pm\sqrt{2r^2}$$

$$\ell = \pm r\sqrt{2}$$





JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Como ℓ é um número positivo, pois é a medida do lado do quadrado, obtemos:

$$\ell = r\sqrt{2}$$

Cálculo da medida do apótema (*a*)

No △*OMB*, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(OM)^2 + (BM)^2 = (BO)^2$$

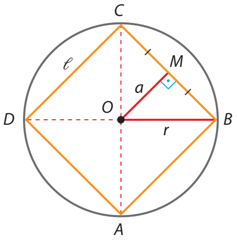
$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 + \frac{2r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{2r^2}{4}}$$

$$a = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como *a* é um número positivo, pois é a medida do apótema do quadrado, obtemos:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência com raio medindo 6 cm. Observe a figura a seguir.

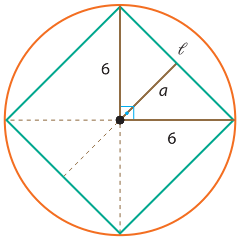
Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\ell^2 = 6^2 + 6^2$$
$$\ell^2 = 72$$
$$\ell = \pm\sqrt{72}$$
$$\ell = \pm 6\sqrt{2}$$

Como ℓ é um número positivo, $\ell = 6\sqrt{2}$ cm.

$$a = \frac{\ell}{2}$$
$$a = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$
$$a = 3\sqrt{2}$$

Portanto, $a = 3\sqrt{2}$ cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Sim; do enunciado, sabemos que $r = 6$ cm. Então:

$$\ell = r\sqrt{2}$$
$$\downarrow$$
$$\ell = 6\sqrt{2}$$

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$
$$a = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$
$$a = 3\sqrt{2}$$

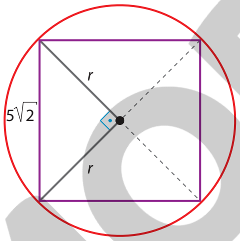
Portanto, $\ell = 6\sqrt{2}$ cm e $a = 3\sqrt{2}$ cm.

b) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência na qual está inscrito um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{2}$ cm. Observe a figura a seguir.

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$r^2 + r^2 = (5\sqrt{2})^2$$
$$2r^2 = 25 \cdot 2$$
$$r^2 = 25$$
$$r = \pm\sqrt{25}$$
$$r = \pm 5$$

Como r é um número positivo, $r = 5$ cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Sim; do enunciado, sabemos que $\ell = 5\sqrt{2}$ cm. Então:

$$\ell = r\sqrt{2}$$
$$5\sqrt{2} = r\sqrt{2}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$r = 5$$

Portanto, $r = 5$ cm.

Quadrado inscrito

Verifique se os estudantes percebem que o apótema do quadrado é a altura de um desses triângulos retângulos isósceles relativa à hipotenusa. Há vários caminhos para determinar a medida dessa altura, ou seja, do apótema do quadrado. Os estudantes devem mobilizar seus conhecimentos prévios para usar o fato de que a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com a mediana relativa a essa mesma base (que no caso é a hipotenusa).

Desse modo, um dos caminhos para determinar a medida *a* do apótema do quadrado é aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo *OMB*, como feito no desenvolvimento na página anterior.

Outra maneira é usar a relação métrica no triângulo retângulo *COB*: o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela é igual ao produto das medidas dos catetos. Assim, temos:

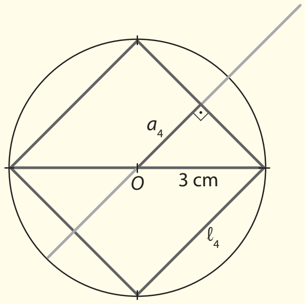
$$\ell \cdot a = r \cdot r \Rightarrow a = \frac{r^2}{\ell} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{r^2}{r\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Ao utilizar o teorema de Pitágoras para calcular a medida do lado e do apótema do quadrado, os estudantes mobilizam e aprofundam o desenvolvimento da habilidade (EF09MA14).

Exercícios propostos

A seguir, apresentamos uma possível resolução do **exercício 1**.

Obtemos o quadrado dividindo a circunferência em quatro arcos de mesma medida. Traçando duas retas perpendiculares que passam pelo centro, obtemos os arcos desejados.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

a) O raio mede 3 cm. Assim, indicando por ℓ, em cm, a medida do lado desse quadrado, temos:

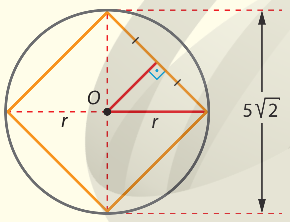
$$\ell = r\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell \simeq 4{,}2$$

b) Indicando a medida do apótema do quadrado por a, em cm, temos:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

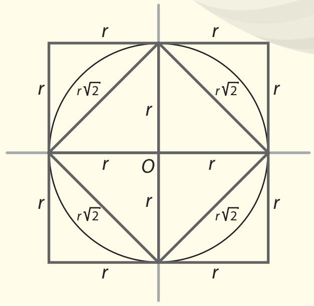
Ressalte aos estudantes que, no caso do quadrado inscrito, a diagonal é um diâmetro.

Para o **exercício 3**, de acordo com o enunciado, um possível esquema da situação é apresentado a seguir, em que destacamos a circunferência circunscrita ao quadrado, cujo centro O é o centro dessa circunferência.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 5**, uma possível resolução é a que segue.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

1 Construa um quadrado inscrito em uma circunferência de raio medindo 3 cm.

a) Que número irracional representa a medida do lado desse quadrado? A representação decimal desse número tem infinitas casas decimais e não é periódica. Determine essa representação decimal com uma casa decimal. **1. a)** $3\sqrt{2} \simeq 4{,}2$

b) Que número irracional representa a medida do apótema? **1. b)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2 O apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida da diagonal desse quadrado. **2.** 24 cm

3 A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida da distância do centro desse quadrado a um de seus lados. **3.** 2,5 cm

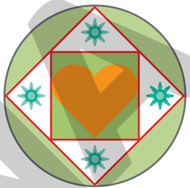
4 O lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência mede 8 cm.

a) Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência. **4. a)** $4\sqrt{2}$ cm

b) Calcule a medida da diagonal do quadrado inscrito nessa circunferência. **4 b)** 8 cm

5 Construa um quadrado circunscrito e um quadrado inscrito em uma mesma circunferência. Determine a diferença entre as medidas dos perímetros desses quadrados em função da medida r do raio da circunferência. **5.** $(8 - 4\sqrt{2})r$

6 Uma fábrica de chocolates lançou no mercado a nova caixa de bombons decorada. O desenho da tampa da caixa foi elaborado com base em dois quadrados, como se vê na figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

A medida do lado do quadrado menor é 10 cm. E os seus vértices são os pontos médios dos lados do quadrado maior. Determine:

6. a) $10\sqrt{2}$ cm **6. b)** $(40 + 40\sqrt{2})$ cm

a) a medida do lado do quadrado maior;

b) a medida do comprimento da faixa vermelha que cobre os lados dos dois quadrados;

c) a soma das medidas das áreas dos quatro triângulos da tampa. **6. c)** 100 cm²

Hexágono regular inscrito

Considere uma circunferência de centro O e raio de medida r.

Como o ângulo central do hexágono regular mede $\frac{360°}{6} = 60°$, podemos construir na circunferência um ângulo central com essa medida, obtendo um arco $\widehat{AB}$. Com a abertura do compasso igual a $\overline{AB}$, marcamos os outros vértices do hexágono.

Vamos calcular as medidas do lado e do apótema desse hexágono em função de r.

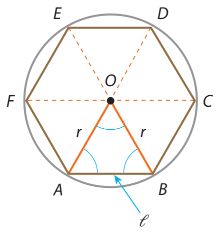
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

Cálculo da medida do lado (ℓ)

$$\text{m}(A\hat{O}B) = 60°$$

$$\text{m}(A\hat{B}O) = \frac{m(\widehat{AE})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

$$\text{m}(B\hat{A}O) = \frac{m(\widehat{BD})}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

O $\triangle AOB$ é equiângulo, logo é equilátero, ou seja: $AB = OA = OB$.

Portanto: $\boxed{\ell = r}$

Como a diagonal do quadrado inscrito é um diâmetro, a medida da diagonal é $2r$; assim, a medida do lado do quadrado inscrito é $r\sqrt{2}$. O lado do quadrado circunscrito é um diâmetro, então mede $2r$. Desse modo:

- perímetro P_1 do quadrado circunscrito: $P_1 = 4 \cdot 2r = 8r$
- perímetro P_2 do quadrado inscrito: $P_2 = 4 \cdot r\sqrt{2} = 4r\sqrt{2}$

Portanto, a diferença entre esses perímetros é:

$$P_1 - P_2 = 8r - 4r\sqrt{2} = (8 - 4\sqrt{2})\,r$$

As resoluções dos **exercícios 2** a **4** e **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Cálculo da medida do apótema (*a*)

No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(OM)^2 + (MB)^2 = (BO)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

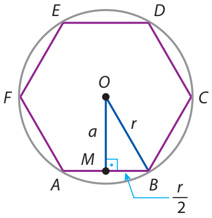
$$a^2 + \frac{r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$a = \pm\frac{r}{2}\sqrt{3}$$



Como *a* é um número positivo, pois é a medida do apótema, obtemos: $\boxed{a = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Vamos calcular a medida do raio de uma circunferência na qual o apótema do hexágono regular inscrito mede $12\sqrt{3}$ cm.

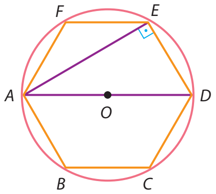
$$a = 12\sqrt{3}$$

$$\frac{r\cancel{\sqrt{3}}}{2} = 12\cancel{\sqrt{3}}$$

$$r = 24$$

Portanto, o raio mede 24 cm.

b) Vamos calcular a medida do perímetro do hexágono regular a seguir, sendo $AE = 10\sqrt{3}$ cm.



- $ED = r$;
- $AD = 2r$;
- $AE = 10\sqrt{3}$ cm;
- $\triangle ADE$ é retângulo.

Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle ADE$, obtemos:

$$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2$$

$$(10\sqrt{3})^2 + r^2 = (2r)^2$$

$$300 = 4r^2 - r^2$$

$$300 = 3r^2$$

$$r^2 = 100$$

$$r = \pm 10$$

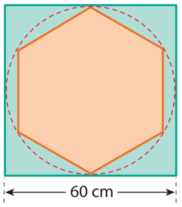
Como *r* é um número positivo, pois é medida de raio, obtemos $r = 10$ cm. Logo, $\ell = 10$ cm.

Portanto, a medida do perímetro é 60 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Marina é projetista em uma fábrica de lustres. Ela criou um lustre formado por quatro placas quadradas de polipropileno translúcido (um tipo de plástico que deixa passar a luz) com 60 cm de lado cada uma. A figura central dessas placas é um hexágono regular, desenhado com base em uma circunferência tangente aos lados das placas. Determine as medidas do lado e da área desse polígono. **7.** Medida do lado: 30 cm; medida da área: $1\,350\sqrt{3}$ cm².



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Hexágono regular inscrito

No caso do hexágono regular inscrito, os estudantes devem perceber que o lado do hexágono tem a mesma medida do raio ($\ell = r$) e que o apótema é a altura de cada um dos 6 triângulos equiláteros que compõem esse hexágono (e que também têm lado medindo ℓ). Desse modo, a medida *a* do apótema do hexágono regular pode também ser obtida pela relação da medida *h* da altura em função da medida ℓ do lado de um desses triângulos equiláteros. Assim, temos:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

No **exemplo b**, retome com os estudantes que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo.

Exercícios propostos

No **exercício 7**, o lado do quadrado circunscrito à circunferência mede 60 cm. Logo, o raio da circunferência mede 30 cm. Temos um hexágono regular inscrito nessa mesma circunferência; então, o lado desse hexágono mede 30 cm, ou seja, $\ell = 30$ cm.

A medida da área do hexágono regular é igual à medida da área de 6 triângulos equiláteros de lado medindo *r*. A altura de cada um desses triângulos equiláteros é o apótema *a* do hexágono.

A altura de medida *h* de um triângulo equilátero de lado medindo ℓ_3 é dada por: $h = \frac{\ell_3 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Peça aos estudantes que determinem a medida da área de um triângulo equilátero nessas condições, em função da medida ℓ_3 de seu lado. A medida dessa área, em cm², é dada por:

$$A_{\text{triângulo (equilátero)}} =$$

$$= \frac{(\ell_3)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(30)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{triângulo (equilátero)}} = 225\sqrt{3}$$

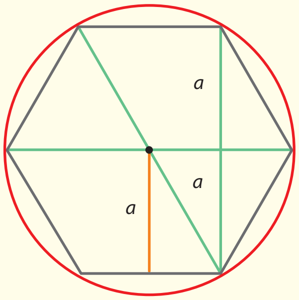
Assim, temos que a medida da área do hexágono regular, em cm², é

$$A_{\text{hexágono (regular)}} = 6 \cdot 225\sqrt{3}$$

$$A_{\text{hexágono (regular)}} = 1\,350\sqrt{3}$$

Exercícios propostos

No **exercício 10**, espera-se que os estudantes percebam que a medida da menor diagonal é o dobro da medida a do apótema. Assim, temos:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Com $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ e $2a = 12\sqrt{3}$, obtemos:

$$\frac{12\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 12$$

Como no hexágono regular a medida do lado é igual à medida do raio da circunferência que o circunscreve, o lado mede 12 cm e o perímetro mede 72 cm (6 · 12).

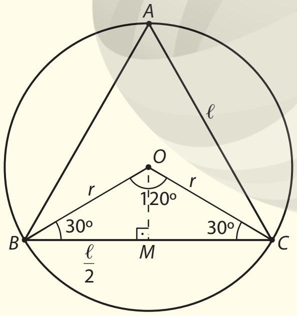
No **exercício 13**, oriente os estudantes a pesquisar jogos de tabuleiro e agende um dia para que apresentem a pesquisa e as produções aos demais colegas.

As resoluções dos **exercícios 8**, **9**, **11** e **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Triângulo equilátero inscrito

Apresentamos outra maneira de calcular a medida (ℓ) do lado e a medida (a) do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio medindo r.

O ângulo central de um triângulo equilátero mede 120°.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

O triângulo BOC é isósceles e, portanto, os ângulos da base são congruentes e medem 30° (pois: $30° + 30° + 120° = 180°$).

O segmento $\overline{OM}$ é o apótema do triângulo equilátero ABC. Assim, é perpendicular à base $\overline{BC}$ e, portanto, $\overline{OM}$ é a altura relativa a essa base do triângulo BOC. Logo, $\overline{OM}$ é também mediana e M é ponto médio de $\overline{BC}$ e o triângulo BOM é retângulo em M.

- Cálculo da medida ℓ do lado:

$$\cos 30° = \frac{BM}{BO}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\ell}{2}}{r}$$

$$\ell = r\sqrt{3}$$

- Cálculo da medida a do apótema:

$$\text{sen } 30° = \frac{OM}{BO}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{r}$$

$$2a = r$$

$$a = \frac{r}{2}$$

---

8 Um hexágono regular é inscrito em uma circunferência de raio medindo 3,2 cm. Calcule:

a) a medida dos lados desse hexágono; **8. a)** 3,2 cm

b) a medida do perímetro desse hexágono; **8. b)** 19,2 cm

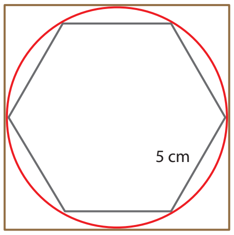
c) a medida do apótema. **8. c)** $1{,}6\sqrt{3}$ cm

9 O apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do lado do quadrado inscrito nessa circunferência. **9.** $18\sqrt{2}$ cm

10 A menor diagonal de um hexágono regular mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do perímetro desse hexágono. **10.** 72 cm

11 Divide-se uma circunferência de diâmetro medindo 10 cm em seis partes iguais. Escolhem-se três pontos alternados dessa divisão, os quais são unidos com segmentos de reta. Determine a medida de cada um desses segmentos. **11.** $5\sqrt{3}$ cm

12 Considerando a figura a seguir, determine a medida do perímetro do quadrado circunscrito à circunferência. **12.** 40 cm



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

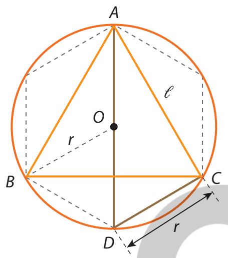
13 ***Hora de criar*** – Junto com um colega, elaborem um tabuleiro de jogo (por exemplo, dama ou uma trilha a ser percorrida por peões, tampinhas etc.) em formato de hexágono regular. Estabeleçam as regras do jogo e, em dia a ser agendado pelo/a professor/a, joguem uma partida para apresentar à turma. **13.** Resposta pessoal.

Triângulo equilátero inscrito

Para construir um triângulo equilátero ABC inscrito em uma circunferência, dividimos a circunferência em seis arcos congruentes e unimos, alternadamente, os pontos de divisão por meio de segmentos.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse triângulo em função de r.

Cálculo da medida do lado (ℓ)



Observe que:

- o $\triangle ADC$ é retângulo (inscrito na semicircunferência);
- $DC = r$, pois $\overline{DC}$ é lado de um hexágono regular inscrito na circunferência.

No $\triangle ADC$, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(AC)^2 + (DC)^2 = (AD)^2$$

$$(\ell)^2 + (r)^2 = (2r)^2$$

$$\ell^2 + r^2 = 4r^2$$

$$\ell^2 = 3r^2 \quad (r > 0)$$

$$\ell = \pm\sqrt{3r^2}$$

Como ℓ é um número positivo, pois é a medida do lado do triângulo, obtemos: $\boxed{\ell = r\sqrt{3}}$

Cálculo da medida do apótema (a)

No $\triangle OMC$, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(OM)^2 + (MC)^2 = (OC)^2$$

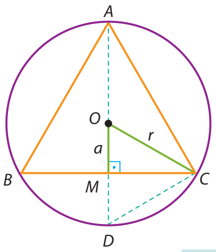
$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 + \frac{3r^2}{4} = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{r^2}{4} \quad (r > 0)$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{r^2}{4}}$$



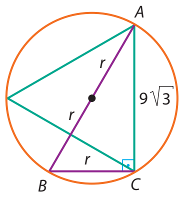
Como a é um número positivo, pois é a medida do apótema, obtemos: $\boxed{a = \frac{r}{2}}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe a aplicação desse cálculo no exemplo a seguir.

O lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{3}$ cm. Vamos calcular a medida do raio dessa circunferência.

Observe a figura geométrica a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No △*ABC*, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$
$$(9\sqrt{3})^2 + r^2 = (2r)^2$$
$$81 \cdot 3 + r^2 = 4r^2$$
$$81 \cdot 3 = 3r^2$$
$$r^2 = 81$$
$$r = \pm\sqrt{81}$$
$$r = \pm 9$$

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Como *r* é um número positivo, pois é a medida do raio, obtemos $r = 9$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

14 Trace uma circunferência de raio medindo 3 cm e um triângulo equilátero inscrito nela. Calcule:

a) a medida do lado do triângulo; **14. a)** $3\sqrt{3}$ cm

b) a medida do apótema. **14. b)** 1,5 cm

15 Se o apótema de um triângulo equilátero mede $\sqrt{12}$ cm, determine:

a) a medida do lado do triângulo; **15. a)** 12 cm

b) a medida da altura do triângulo. **15. b)** $6\sqrt{3}$ cm

16 Um triângulo equilátero é inscrito em uma circunferência de raio medindo 8 cm.

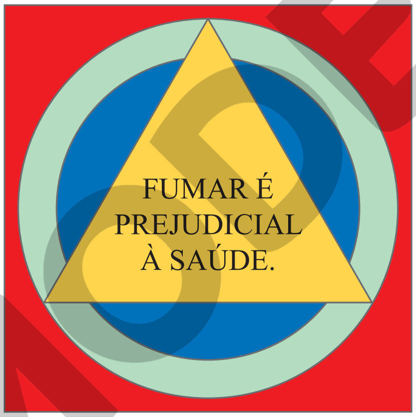
a) Calcule a medida do apótema. **16. a)** 4 cm

b) Adicione a medida do raio com a medida do apótema. **16. b)** 12 cm

c) Calcule a medida da altura do triângulo aplicando a fórmula $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. **16. c)** 12 cm

d) Considerando um triângulo equilátero em que o lado tem medida ℓ, o raio tem medida *r*, e o apótema, medida *a*, e tendo em vista os resultados dos itens **b** e **c**, podemos dizer que $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = r + a$? **16. d)** Sim.

17 Um colégio está divulgando uma campanha contra o tabagismo. Para isso, promoveu um concurso entre os estudantes para a escolha de um cartaz para a campanha. O cartaz a seguir foi o vencedor.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o raio da circunferência que circunscreve o triângulo equilátero mede 30 cm, determine a medida da área desse triângulo.

17. $675\sqrt{3}$ cm²

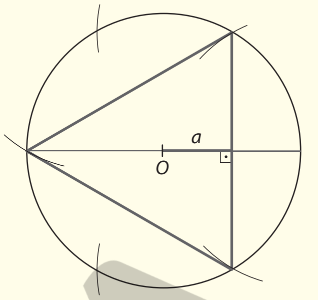
18 Em uma mesma circunferência, são inscritos um quadrado e um triângulo equilátero. O apótema do quadrado mede $3{,}5\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do triângulo.

18. 3,5 cm

Exercícios propostos

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 14**.

Indicando a medida do lado do triângulo equilátero por ℓ e a de seu apótema por *a*, temos:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

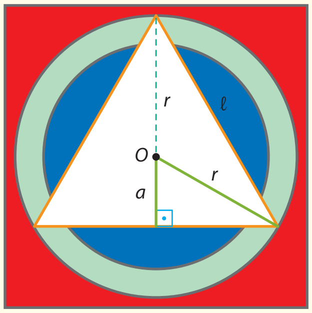
a) $\ell = r\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Logo, o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência mede $3\sqrt{3}$ cm.

b) $a = \frac{r}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Logo, o apótema desse triângulo mede 1,5 cm.

No **exercício 17**, a medida do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo é $r = 30$ cm. Assim, podemos obter um esquema da situação:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida ℓ do lado é dada por:

$$\ell = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 30\sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo, a medida *A* da área desse triângulo equilátero, em cm², é igual a:

$$A = \frac{(\ell)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$
$$A = \frac{(30\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$
$$A = 675\sqrt{3}$$

Como atividade complementar, pode-se pedir aos estudantes que pesquisem os malefícios do cigarro. Ao trabalhar esse tema, contribui-se para desenvolver a **competência geral 8**, pois os estudantes podem perceber e discutir a importância de cuidar da saúde.

As resoluções dos **exercícios 15**, **16** e **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Exercícios propostos

Na resolução do **exercício 19**, indicando a medida do lado do triângulo equilátero por ℓ_3 e a medida do lado do hexágono regular por ℓ_6, temos:

$\ell_3 = 15\sqrt{3}$

$r\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

Logo, $r = 15$ cm e $\ell_6 = 15$ cm.

O **exercício 20** tem como objetivo fazer com que os estudantes utilizem polígonos e circunferências para criar um logotipo para uma campanha que eles irão determinar. É importante que todos os integrantes dos grupos participem das discussões. Ao final, peça aos grupos que apresentem os logotipos criados e que falem um pouco sobre o tema que pensaram.

2. Medida da área de um polígono regular

Habilidades da BNCC:
EF09MA11 e **EF09MA14**.

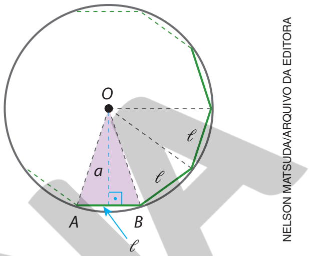
Explore a figura inicial com os estudantes, reproduzindo-a na lousa. Amplie o triângulo destacado de modo que eles percebam que esse triângulo é isósceles, cuja base é o lado do polígono regular considerado (de medida ℓ), a altura é o apótema do polígono (de medida a) e os lados congruentes são raios da circunferência (de medida r).

Aproveite o momento e retome as propriedades válidas para um triângulo isósceles, indicando, principalmente, que nesse triângulo a altura relativa à base coincide com a bissetriz e a mediana relativas à mesma base.

19 Em uma circunferência, é inscrito um triângulo equilátero cujo lado mede $15\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do lado do hexágono regular inscrito nessa circunferência. **19.** 15 cm

20 ***Hora de criar*** – Junte-se a três colegas para discutirem e determinarem um tema para uma campanha em prol da melhora da vida da sua comunidade. Criem, usando polígonos e circunferências, um logotipo para essa campanha. **20.** Resposta pessoal.

2 Medida da área de um polígono regular



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Considere um polígono regular de n lados.

Indicando por ℓ a medida do lado do polígono e por a a medida de seu apótema, a medida da área do $\triangle AOB$ é dada por:

$$\frac{\ell \cdot a}{2}$$

Como o polígono tem n lados congruentes, terá também n triângulos de mesma medida de área do $\triangle AOB$.

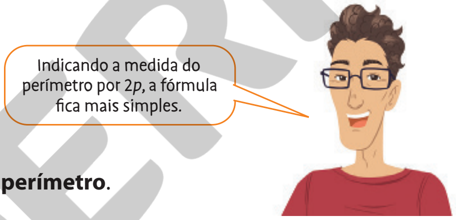
Portanto, a medida da área A do polígono é dada por:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}, \text{ ou seja, } A = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$$

A medida do perímetro do polígono é $n \cdot \ell$. Indicando essa medida por $2p$, obtemos:

$$A = \frac{\cancel{2}p \cdot a}{\cancel{2}}, \text{ ou seja:}$$

$$\boxed{A = p \cdot a}$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida p é chamada de medida do **semiperímetro**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Vamos calcular a medida da área de um decágono regular de lado medindo 12 cm. Considere tg 18° = 0,32.

- Cálculo da medida do semiperímetro, em centímetro:

$$p = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60, \text{ ou seja, } p = 60 \text{ cm}$$

- Cálculo da medida do ângulo central:

$$a_c = \frac{360°}{10} = 36°$$

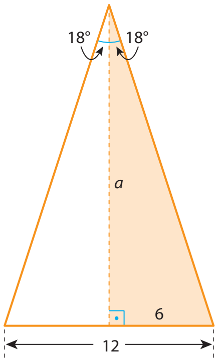
- Cálculo da medida a do apótema, em centímetro:

$$\text{tg } 18° = \frac{6}{a}$$

$$a \cdot 0{,}32 = 6$$

$$\frac{a \cdot 0{,}32}{0{,}32} = \frac{6}{0{,}32}$$

$a = 18{,}75$, ou seja, o apótema mede 18,75 cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- Cálculo da medida da área do polígono, em centímetro quadrado:

$A = p \cdot a$

$A = 60 \cdot 18{,}75$

$A = 1\,125$

Logo, a área do decágono regular mede 1 125 cm².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 O professor de Matemática de uma escola promoveu um campeonato de pipas entre os estudantes. Para isso, passou a seguinte especificação: a pipa deverá ter a forma de um hexágono regular de lados medindo 20 cm. Calcule as medidas do apótema e da área da pipa. **21.** Medida do apótema: $10\sqrt{3}$ cm; medida da área: $600\sqrt{3}$ cm².

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

22 O lado de um pentágono regular mede 20 cm. Calcule a medida da sua área. (Dado: tg 36° ≃ 0,73.) **22.** Aproximadamente 395 cm².

23 Um eneágono regular é inscrito em uma circunferência de raio medindo 18 cm. Calcule a medida da sua área, sabendo que sen 20° ≃ 0,34 e cos 20° ≃ 0,93.

23. Aproximadamente 922 cm².

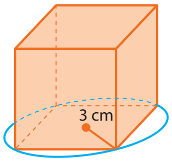
24 Esta figura faz parte de um anúncio publicitário.

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

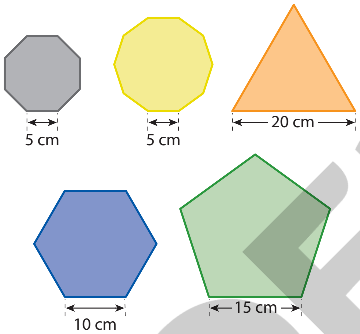
Sabendo que o diâmetro da circunferência da figura mede 3,6 cm, determine a medida da área do triângulo equilátero impresso nesse anúncio. **24.** $2{,}43\sqrt{3}$ cm²

25. Área das bases: 18 cm²; área da superfície lateral: 72 cm².

25 Determine a medida da área das bases e a medida da área de superfície lateral de um cubo que tem uma das faces inscrita em uma circunferência de raio medindo 3 cm.



26 Observe as figuras a seguir.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Represente em um gráfico de colunas as medidas das áreas dos polígonos regulares. (Considere: $\sqrt{3} = 1{,}73$; tg 30° = 0,58; tg 36° = 0,73; tg 22,5° = 0,41; tg 18° = 0,32.)

b) Calcule a média das medidas das áreas desses polígonos (área média).

26. a) Construção de gráfico. **26. b)** 226,89 cm²

27 ***Hora de criar*** – Em dupla com um colega separem algumas revistas que possam ser recortadas. Após cada um escolher uma imagem (paisagem, flores, um rosto etc.), colem as duas imagens em dois pedaços de cartolina ou papelão. Usando lápis e régua, tracem polígonos cobrindo toda a imagem. Depois, cada um de vocês deve recortar os polígonos traçados sobre suas imagens, fazendo um quebra-cabeça. Troque seu quebra-cabeça com o do colega para cada um montar o quebra-cabeça do outro.

(Usem tesouras com pontas arredondadas e as manuseiem com cuidado!) **27.** Resposta pessoal.

No **exercício 27**, incentive os estudantes a compor diferentes quebra-cabeças com base nos conceitos já estudados neste capítulo. Proponha a eles que apresentem aos demais colegas as produções.

Exercícios propostos

No **exercício 21**, o raio da circunferência que circunscreve o hexágono mede $r = \ell = 20$ cm. Então, a medida a do apótema do hexágono é dada por:

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $a = 10\sqrt{3}$ cm.

A medida da área A desse hexágono é dada por:

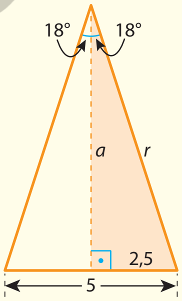
$$A = \frac{6 \cdot 20}{2} \cdot 10\sqrt{3}$$

Assim, $A = 600\sqrt{3}$ cm².

No **exercício 26**, apresentamos o cálculo da medida da área do decágono regular. As demais medidas de áreas são obtidas de maneira análoga.

Cálculo da medida do ângulo central do decágono:

$$a_c = \frac{360}{10} \Rightarrow a_c = 36°$$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{tg } 18° = \frac{2{,}5}{a}$$

$$a = \frac{2{,}5}{0{,}32} = 7{,}8125$$

Assim, obtemos:

$$A_{\text{decágono (regular)}} = p \cdot a =$$

$$= \frac{10 \cdot 5}{2} \cdot 7{,}8125$$

Portanto,

$$A_{\text{decágono (regular)}} \simeq 195{,}31 \text{ cm}^2.$$

Desse modo, os estudantes devem obter as seguintes medidas de áreas:

- octógono regular: 121,95 cm²;
- triângulo equilátero: 173 cm²;
- hexágono regular: 259,5 cm²;
- pentágono regular: 385,27 cm².

As resoluções dos **exercícios 22 a 25** e dos demais itens do **exercício 26** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Pense mais um pouco...

Vamos indicar por a_6 e por a_5 as medidas dos apótemas do hexágono regular e do pentágono regular, respectivamente.

Para o hexágono regular, temos:

$\ell = r = 2$ cm

$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

Portanto, $a_6 = \sqrt{3}$ cm.

$p_6 = \dfrac{6 \cdot 2}{2} \Rightarrow p_6 = 6$ cm

$A_{\text{hexágono(regular)}} = 6\sqrt{3} \simeq 10{,}38$

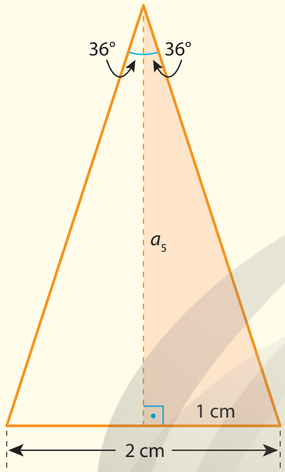
Para o pentágono regular, pela figura do enunciado, verificamos que o lado de cada pentágono regular mede $\ell = 2$ cm (mesma medida do lado do hexágono). Então:

$p_5 = \dfrac{5 \cdot 2}{2} \Rightarrow p_5 = 5$ cm

O ângulo central do pentágono regular mede:

$a_c = \dfrac{360}{5} \Rightarrow a_c = 72°$

Assim, cada triângulo isósceles que compõe cada um desses pentágonos regulares tem base medindo 2 cm e ângulo do vértice de 72°:



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

$\text{tg } 36° = \dfrac{1}{a_5}$

$0{,}73 = \dfrac{1}{a_5} \Rightarrow a_5 = \dfrac{1}{0{,}73}$

Então, $a_5 \simeq 1{,}37$ cm.

$A_{\text{pentágono(regular)}} \simeq 5 \cdot 1{,}37$

Logo, $A_{\text{pentágono(regular)}} \simeq 6{,}85 \text{ cm}^2$.

Medida aproximada da área de madeira utilizada em cada enfeite:

$A_{\text{madeira}} \simeq 10{,}38 + 6 \cdot 6{,}85$

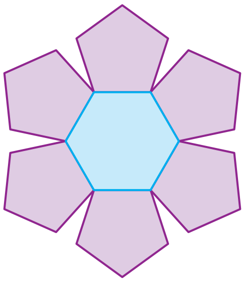
Assim, $A_{\text{madeira}} \simeq 51{,}48 \text{ cm}^2$.

Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

Ângela é proprietária de uma loja de artesanato. No final do ano, ela pretende oferecer como brinde aos clientes da loja um enfeite confeccionado em madeira. O enfeite será uma flor estilizada, formada por polígonos regulares: um hexágono e seis pentágonos.

Sabendo que o hexágono tem lado de medida igual a 2,0 cm, determine a medida da área aproximada de madeira que Ângela utilizará para produzir cada enfeite. Considere tg 36° = 0,73.

Pense mais um pouco...: Aproximadamente $51{,}48 \text{ cm}^2$.

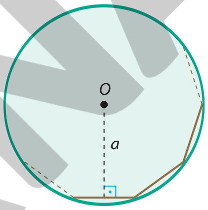


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3 Medida da área de um círculo

Considere um círculo de centro *O* e raio de medida *r*.

Vamos inscrever nesse círculo um polígono regular de *n* lados, sendo *a* a medida do apótema do polígono.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Supondo que o número de lados (n) cresça indefinidamente, acontecerá o seguinte:

- a medida do perímetro $2p$ do polígono regular vai se aproximar da medida do comprimento $2\pi r$ da circunferência e, portanto, a medida do semiperímetro p se aproximará de πr;
- a medida do apótema do polígono regular vai se aproximar da medida do raio do círculo;
- a medida da área do polígono regular vai se aproximar da medida da área do círculo.

Então, vamos encontrar uma fórmula que forneça a medida da área de um círculo:

$$\begin{aligned} A_{\text{polígono}} &= \underset{\substack{\downarrow \\ \pi r}}{p} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ r}}{a} \\ A_{\text{círculo}} &= \pi r \cdot r \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$$

Observe um exemplo.

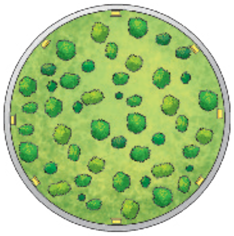
Vamos calcular, em metro quadrado, a medida da área de uma praça circular que tem raio medindo 35 m. Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$

$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot (35)^2$

$A_{\text{círculo}} \simeq 3{,}14 \cdot 1\,225$

$A_{\text{círculo}} \simeq 3\,846{,}50$



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a área da praça mede aproximadamente $3\,846{,}50 \text{ m}^2$.

3. Medida da área de um círculo

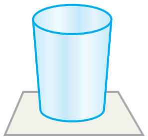
■ Habilidades da BNCC: **EF09MA11** e **EF09MA14**.

Explore com os estudantes a determinação da medida da área do círculo. Sugira a eles que desenhem polígonos regulares inscritos em uma mesma circunferência, cada vez com maior número de lados, para que percebam a ideia de limite que pode ser associada à comparação da medida da área do círculo com a de um polígono regular de *n* lados, com *n* tendendo ao infinito (quanto maior o número *n*, melhor é a aproximação da medida dessas áreas).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 (Saresp) Juliana colocou um copo molhado sobre a mesa, onde ficou a marca da base circular do copo. A área da marca mede 16π cm². **28.** Alternativa **b**.



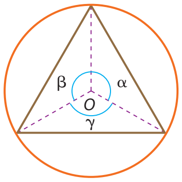
O diâmetro da base do copo mede:

a) 4 cm.
c) 16 cm.
b) 8 cm.
d) $\simeq 5{,}7$ cm.

29 (Fuvest-SP) O triângulo *ABC* é inscrito em uma circunferência de raio medindo 5 cm. Sabe-se que *A* e *B* são extremidades de um diâmetro e que a corda $\overline{BC}$ mede 6 cm. Então a área do triângulo *ABC*, em cm², mede: **29.** Alternativa **a**.

a) 24.
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
e) $2\sqrt{3}$.
b) 12.
d) $6\sqrt{3}$.

30 (Unifor-CE) Um triângulo está inscrito em uma circunferência de centro *O*, como mostra a figura a seguir.

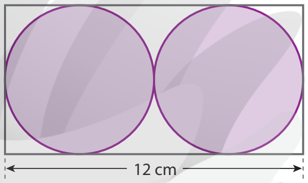


Se o raio da circunferência mede 1 cm e os ângulos α, β e γ são congruentes, então o lado do triângulo mede: **30.** Alternativa **e**.

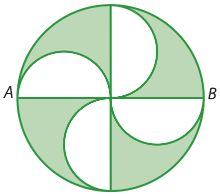
a) 1,2 cm.
d) 1,5 cm.
b) 1,3 cm.
e) $\sqrt{3}$ cm.
c) $\sqrt{2}$ cm.

31 Junte algumas moedas de diferentes valores. Com uma régua, meça cada diâmetro em milímetro, e calcule a medida da área aproximada da face de cada uma delas. Em seguida, construa uma tabela com essas medidas.
31. Construção de tabela.

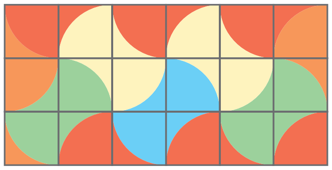
32 Calcule a medida da área da parte pintada de lilás, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$.
32. 56,52 cm²



33 Calcule a medida da área aproximada da parte pintada de verde, sabendo que $AB = 4$ cm.
33. 6,28 cm²



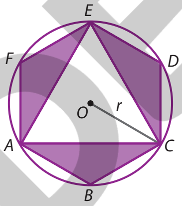
34 Durante uma aula de Arte, Pedro elaborou um painel, conforme a figura a seguir.



Esse painel foi feito em um papel quadriculado cujo quadradinho mede 3 cm de lado. Determine a medida da área da parte pintada de verde. **34.** 36 cm²

35 Na figura, *r* é a medida do raio da circunferência em uma unidade *u*, e $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE} \cong \overset{\frown}{EF} \cong \overset{\frown}{FA}$.

Calcule a medida da área da região pintada de roxo. **35.** $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}\ u^2$



36 Retomando a situação de Edgard sobre o projeto de construção de mostradores de relógios de parede, descrita no início do capítulo, considere um polígono regular de 12 lados inscrito em uma circunferência de raio medindo 10 cm. **36. a)** 30°

a) Quanto mede o ângulo central do polígono?
b) Use o quadro de razões trigonométricas da página 204, com duas casas decimais, para determinar as medidas do apótema e do lado desse polígono.
c) Qual é a diferença entre as medidas do comprimento da circunferência e do perímetro desse polígono? **36. c)** 0,4 cm
d) Qual é a medida da área desse polígono?

36. b) Medida do apótema: 9,70 cm; medida do lado: 5,20 cm.
36. d) 302,64 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

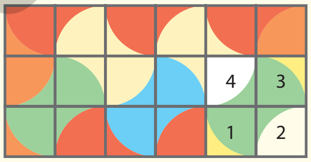
No **exercício 31**, uma coleção de moedas pode ser formada pelas que estão em circulação no Sistema Monetário Brasileiro. Fazendo as medições dos diâmetros e usando $\pi = 3{,}14$, podemos montar a seguinte tabela:

Medidas das áreas de moedas

Valor da moeda	Medida do diâmetro (em mm)	Medida da área (em mm²)
R$ 0,05	22	379,94
R$ 0,10	20	314
R$ 0,25	25	490,625
R$ 0,50	23	415,265
R$ 1,00	27	572,625

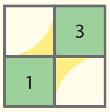
Dados obtidos na coleção de moedas considerada.

No **exercício 34**, vamos analisar um dos conjuntos de quadradinhos que formam uma parte da área pintada de verde:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse conjunto, a área destacada em amarelo nos quadradinhos 1 e 3 juntos é igual à área em verde nos quadradinhos 2 e 4 juntos. Trocando nesse conjunto a parte em amarelo com essas partes em verde, temos:



A área em verde corresponde à área de 2 quadradinhos. Como no painel há dois conjuntos com regiões idênticas pintadas de verde, temos que nele toda a área pintada de verde corresponde à área de 4 quadradinhos (3 cm de lado). Ou seja:

$A_{verde} = 4 \cdot 3^2$

Portanto, $A_{verde} = 36$ cm².

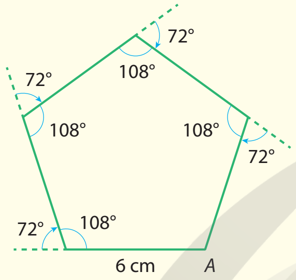
As resoluções dos **exercícios 28** a **30** e dos **exercícios 32**, **33**, **35** e **36** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Para saber mais

Nessa seção, ao trabalhar com fluxogramas, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF09MA15).

Na **atividade 1** do **Agora é com você!**, escolhendo $n = 5$, por exemplo, o procedimento será:

Com $a_e = 72°$ (pois $360° : 5 = 72°$) e iniciando no ponto A, traçamos um segmento de 6 cm ("bordar 6 cm em linha reta"), que é o primeiro lado; para $k = 2$, com $n = 5$, obtemos $2 < 5$, ou seja, k não é maior do que n; seguimos o fluxograma e giramos 72° no sentido horário; traçamos outro segmento de 6 cm (segundo lado); para $k = 3$, temos $k < n$, então giramos 72° no sentido horário; traçamos outro segmento de 6 cm (terceiro lado); para $k = 4$, temos $k < n$, portanto, giramos 72° no sentido horário; traçamos outro segmento de 6 cm (quarto lado); para $k = 5$, com $n = 5$, temos $k < n$ e giramos 72° no sentido horário; traçamos outro segmento de 6 cm (quinto lado) e voltamos ao ponto A; para $k = 6$, temos $k > n$, então desligamos a máquina e o pentágono está construído.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

A resolução da **atividade 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

PARA SABER MAIS

Construção de polígono regular de *n* lados

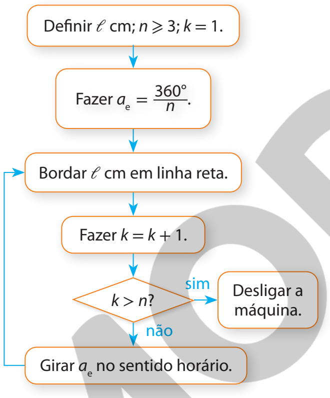
Lizandra precisa programar um tear eletrônico para compor contornos de polígonos regulares na fabricação de tecidos.

SERGEY RYZHOV/SHUTTERSTOCK

Tear eletrônico usado na indústria têxtil para a produção de tecidos com padrões criados por computador.

Acompanhe as etapas do programa que ela elaborou para a máquina seguir, também descritas no fluxograma.

Fluxograma



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Definir a medida do comprimento ℓ cm do lado do polígono.
2. Definir o número n de lados do polígono, $n \geqslant 3$.
3. Definir o número $k = 1$.
4. Calcular a medida $a_e = \frac{360°}{n}$ do ângulo externo.
5. Bordar em linha reta caminho com ℓ cm.
6. Fazer $k = k + 1$.
7. Se $k > n$, desligar a máquina.
8. Girar no sentido horário a_e graus e voltar para o item **5**.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

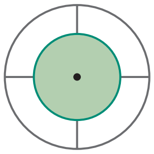
1 Seguindo as etapas descritas por Lizandra, escolha um número n de lados e construa em uma folha avulsa um polígono regular de lados medindo 6 cm. **1.** Construção de figura.

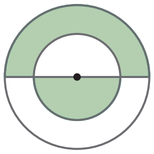
2 Construa novamente o polígono da atividade 1 mudando o item 8 para "Girar no sentido anti-horário a_e graus e voltar para o item **5**". **2.** Construção de figura.

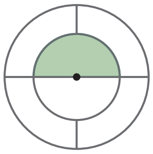
Pense mais um pouco... **FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO**

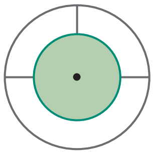
Pense mais um pouco...: Alternativas **c**, **d**; medida da área: $\frac{9\pi}{2}$ cm².

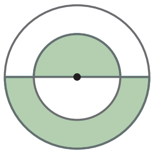
Todas as figuras a seguir são formadas por duas circunferências concêntricas cujos raios medem 2 cm e 3 cm, mas apenas duas delas podem ser sobrepostas de modo que toda a região contida nas circunferências esteja pintada de verde. Descubra que figuras são essas e determine a medida da área da região pintada de verde em cada uma dessas figuras.

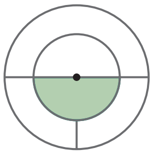
a)


c)


e)


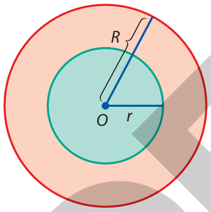
b)


d)


f)


Medida da área de uma coroa circular

A figura a seguir mostra dois círculos concêntricos. O círculo menor tem raio de medida r, e o círculo maior, raio de medida R.



A parte da figura pintada de vermelho é chamada de **coroa circular**.

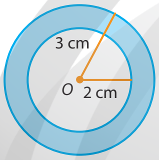
Observe que a medida da área da coroa circular é igual à diferença entre as medidas das áreas dos dois círculos, ou seja:

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

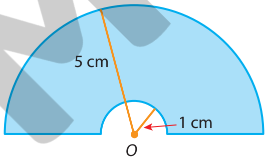
$$A_{\text{coroa circular}} = \pi(R^2 - r^2)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS **FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO**

37 Calcule a medida aproximada da área pintada de azul em cada uma das figuras a seguir.

a)


37. a) Aproximadamente 15,70 cm².

b)


37. b) Aproximadamente 37,68 cm².

38 Dois círculos concêntricos de raios medindo 6 cm e 2 cm formam uma coroa circular. Calcule a medida da área dessa coroa. **38.** 100,48 cm²

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

As únicas duas figuras que podem ser sobrepostas são as das alternativas **c** e **d**, pois rotacionando uma delas 180° em torno do centro, pode-se perceber que são idênticas. Observe o cálculo da medida da área (A) pintada de verde nesse caso.

$$A = \frac{\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2}{2} + \frac{\pi \cdot r^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2}{2} + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} =$$

$$= \frac{5\pi}{2} + 2\pi = \frac{9\pi}{2}$$

Logo, $A = \frac{9\pi}{2}$ cm².

Alternativamente, pode-se perceber que a medida da área verde de cada figura é igual à metade da medida da área de um círculo de medida do raio igual a 3 cm.

Medida da área de uma coroa circular

Pergunte aos estudantes se eles se lembram da definição de coroa circular:

Coroa circular é a região do plano limitada por duas circunferências concêntricas.

Depois, diga que a medida da área de uma coroa circular é obtida por meio da medida de área do círculo de raio maior subtraída da medida de área do círculo de raio menor.

As resoluções dos **exercícios 37** e **38** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Pense mais um pouco...

Sejam C_n os círculos de raio medindo $10n$ cm no esquema dado, com $n = 1, 2, ..., 7$. Assim, C_1 é o círculo central de raio medindo 10 cm e C_7 é o círculo de raio medindo 70 cm, por exemplo. A área da região verde é dada pela relação entre as áreas desses círculos:

$$A_{\text{verde}} = (A_{C_7} - A_{C_6}) +$$
$$+ (A_{C_5} - A_{C_4}) +$$
$$+ (A_{C_3} - A_{C_2}) + A_{C_1}$$

Cálculo da medida da área de cada círculo, em cm²:

$$A_{C_7} = \pi \cdot 70^2 \Rightarrow A_{C_7} = 15\,386$$
$$A_{C_6} = \pi \cdot 60^2 \Rightarrow A_{C_6} = 11\,304$$
$$A_{C_5} = \pi \cdot 50^2 \Rightarrow A_{C_5} = 7850$$
$$A_{C_4} = \pi \cdot 40^2 \Rightarrow A_{C_4} = 5\,024$$
$$A_{C_3} = \pi \cdot 30^2 \Rightarrow A_{C_3} = 2\,826$$
$$A_{C_2} = \pi \cdot 20^2 \Rightarrow A_{C_2} = 1\,256$$
$$A_{C_1} = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A_{C_1} = 314$$

Cálculo da medida da área verde, em cm²:

$$A = (15\,386 - 11\,304) +$$
$$+ (7850 - 5\,024) +$$
$$+ (2\,826 - 1\,256) + 314$$
$$A = 4\,082 + 2\,826 + 1\,570 + 314$$
$$A = 8\,792$$

Como $A_{C_8} = \pi \cdot 80^2 = 20\,096$ cm², temos:

$$A_{\text{amarela}} = A_{C_8} - A_{\text{verde}} =$$
$$= 20\,096 - 8\,792$$

Portanto, $A_{\text{amarela}} = 11\,304$ cm².

Medida da área de um setor circular

Pergunte aos estudantes se eles se lembram da definição de setor circular:

Setor circular é uma região do círculo delimitada por dois de seus raios e um arco.

Explore a noção de proporcionalidade envolvida no cálculo da medida da área de um setor circular. Comente com os estudantes que esse cálculo pode ser usado para determinar a medida da área dos setores circulares de um gráfico de setores e, assim, construir gráficos desse tipo.

Pense mais um pouco...

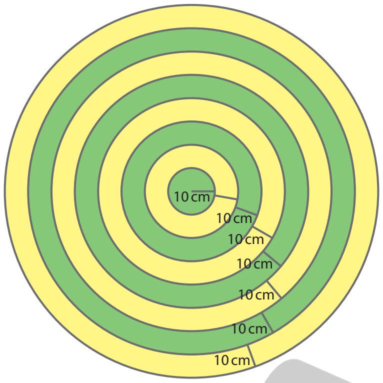
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...: Parte verde: 8 792 cm²; parte amarela: 11 304 cm².

Adotando $\pi = 3{,}14$, calcule:

- a medida da área total da parte verde do alvo;
- a medida da área total da parte amarela do alvo.

ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA



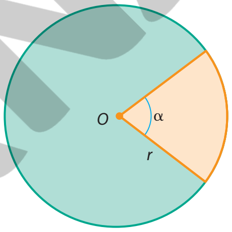
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Medida da área de um setor circular

Todo ângulo central determina em um círculo uma região chamada de **setor circular**.

Considerando o setor circular em que a medida do ângulo central, em grau, é α, podemos calcular a medida da área desse setor estabelecendo uma proporção. Observe.



Medida da área	Medida do ângulo central
πr^2	360°
$A_{\text{setor circular}}$	α

$$\frac{\pi r^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360°}{\alpha}$$

Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular a medida da área do setor circular cujo ângulo central mede 30° e cujo raio mede 10 cm.

Pelo enunciado, temos: α = 30° e $r = 10$ cm.

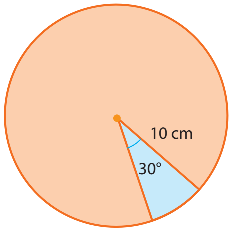
Assim:

$$\frac{\pi \cdot 10^2}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{360}{30}$$

$$\frac{100\pi}{A_{\text{setor circular}}} = \frac{12}{1}$$

$$12 \cdot A_{\text{setor circular}} = 100\pi$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{25\pi}{3}$$



Portanto, a medida da área do setor circular é $\frac{25\pi}{3}$ cm².

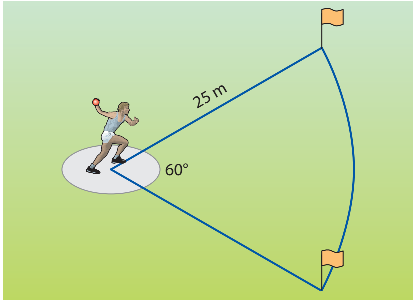
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

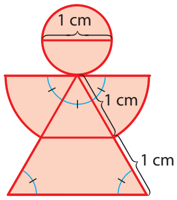
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39. $\frac{625\pi}{6}$ m² $\simeq$ 327 m²

39 Em uma pista de atletismo, o campo de arremesso de peso tem a forma de um setor circular com 60° de abertura e raio medindo 25 m. Calcule a medida da área desse campo.



40 Para fazer um molde, Clarice desenhou a figura a seguir.



Calcule a medida da área aproximada da figura desenhada por Clarice. **40.** 3,56 cm²

41 Em uma circunferência cujo raio mede 15 cm, o arco de um setor circular mede 10π cm. Determine:

41. a) 120°

a) a medida do ângulo central desse setor;

b) a medida da área desse setor. **41. b)** 75π cm²

42 (PUC-RJ) Triplicando-se o raio de uma circunferência: **42.** Alternativa **c**.

a) a medida da área é multiplicada por 9π.

b) a medida do comprimento é multiplicada por 3π.

c) a medida da área é multiplicada por 9, e a do comprimento, por 3.

d) as medidas da área e do comprimento são ambas multiplicadas por 3.

e) a medida da área é multiplicada por 3, e a do comprimento, por 9.

43 Em cada figura, calcule a medida da área da parte colorida. Em seguida, verifique se existem figuras equivalentes. (Adote π = 3,14.)

Figura 1

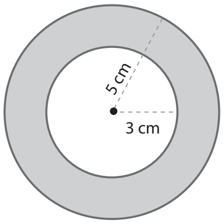


Figura 2

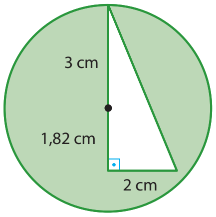


Figura 3

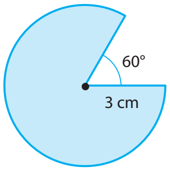
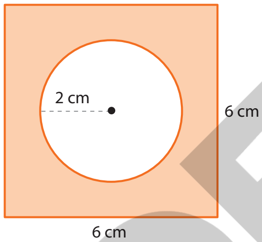


Figura 4



44 (Fuvest-SP) Um comício político lotou uma praça semicircular cujo raio mede 130 m. Admitindo uma ocupação média de quatro pessoas por m², qual é a melhor estimativa do número de pessoas presentes?

44. Alternativa **b**.

a) dez mil

b) cem mil

c) meio milhão

d) um milhão

e) muito mais de um milhão

45 (Vunesp) Um cavalo se encontra preso em um cercado de pastagem cuja forma é um quadrado, com lado medindo 50 m. Ele está amarrado a uma corda de 40 m que está fixada em um dos cantos do quadrado. Considerando π = 3,14, calcule a medida da área, em metro quadrado, da região do cercado que o cavalo não conseguirá alcançar, porque está amarrado. **45.** Alternativa **a**.

a) 1 244

b) 1 256

c) 1 422

d) 1 424

e) 1 444

43. Figura 1: 50,24 cm²; figura 2: 23,44 cm²; figura 3: 23,55 cm²; figura 4: 23,44 cm². As figuras 2 e 4 são equivalentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Para a resolução do **exercício 39**, vamos considerar $\pi \simeq 3{,}14$. Assim, a medida *A* da área do setor circular é dada por:

$$\frac{\pi \cdot 25^2}{A} = \frac{360}{60}$$

Logo, $A = \frac{625\pi}{6} \Rightarrow A \simeq 327 \text{ m}^2$.

No **exercício 40**, vamos considerar $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$. Na figura, todos os ângulos demarcados medem 60°, pois são ângulos internos de um triângulo equilátero cujo lado mede $\ell = 2$ cm.

Assim, a figura é composta de um círculo de raio medindo 0,5 cm, dois setores circulares de 60° e raio de 1 cm e uma região determinada por um triângulo equilátero de lado medindo 2 cm.

- Cálculo da medida da área do círculo, em cm²:
  $\pi r^2 = 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2$
  $A_c = 0{,}785$
- Cálculo da medida da área de cada setor circular, em cm²:
  $\frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360} = \frac{60 \cdot 3{,}14 \cdot (1)^2}{360}$
  $A_s \simeq 0{,}523$
- Cálculo da medida da área do triângulo equilátero, em cm²:
  $A_t = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \simeq 1{,}73$

A medida da área da figura, em cm², é dada pela soma das medidas das áreas dos elementos que a compõem:

$A_{\text{figura}} \simeq (0{,}785 + 2 \cdot 0{,}523 +$
$+ 1{,}73) \simeq 3{,}56$

No **exercício 44**, a medida *A* da área, em m², de um semicírculo de raio medindo 130 m é dada por:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 130^2}{2}$$

$A = 8\,450\pi$

Como admitimos uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, fazendo $\pi = 3{,}14$, temos:

$4 \cdot 8\,450 \cdot 3{,}14 \simeq 106\,132$

Logo, a melhor estimativa, entre as alternativas, é cem mil pessoas.

As resoluções dos **exercícios 41** a **43** e **45** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF09MA21**.

Nesta seção, trabalhamos com gráficos cujos elementos induzem a erros de leitura e interpretação, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF09MA21).

Antes de trabalhar o texto desta seção apresente apenas os gráficos em cópia ampliada, fixando-os na lousa, para que os estudantes explorem cada gráfico. Verifique, por exemplo, se eles percebem que no gráfico 1, de maneira equivocada, o total é 110% e não 100%. Eles podem observar esse fato na própria figura (sem efetuar a soma das porcentagens), pois os dois setores de 25% deveriam corresponder à metade do círculo, mas não é o que acontece.

Para ampliar a discussão, apresente outros gráficos de setores.

Analise com eles o gráfico de colunas apresentado, sobre a densidade demográfica das regiões do Brasil, e verifique se percebem que nem todas as colunas têm a altura proporcional às demais. Espera-se que os estudantes percebam que a coluna referente à região Sudeste não é proporcional às demais, pois sua altura deveria ser quase o dobro da altura da coluna referente à região Sul.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

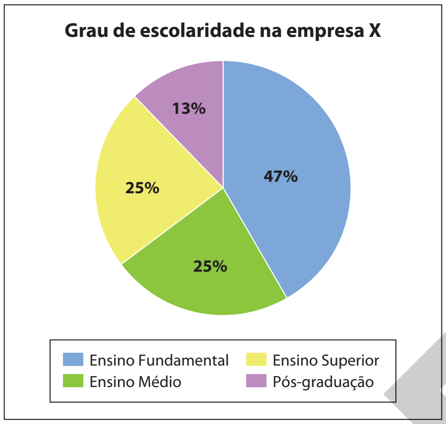
Atenção ao ler gráficos

Ler um texto ou assistir a um filme requer atenção, assim como acontece com a leitura de um gráfico, especialmente gráficos duplos em que compará-los é inevitável e desejado.

Há gráficos que apresentam erros em sua construção, e outros que apresentam inadequações.

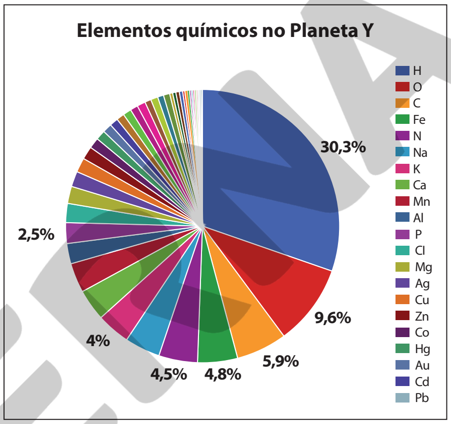
- Em um gráfico de setores, por exemplo, um erro banal é quando a soma das porcentagens dos setores, exceto nos casos de arredondamento, difere de 100% (ver gráfico 1). Já uma inadequação é haver uma quantidade muito grande de setores e de cores muito parecidas, tornando as legendas incompreensíveis (ver gráfico 2).

Gráfico 1



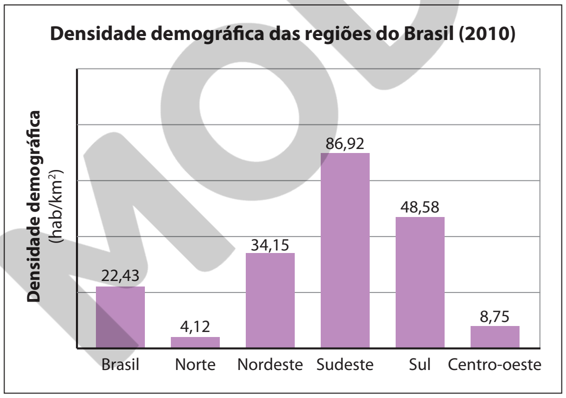
Dados fictícios.

Gráfico 2



Dados fictícios.

- Em gráficos de colunas ou gráficos de barras, os erros mais comuns ocorrem por não contemplarem a proporcionalidade entre os comprimentos das colunas/barras e os valores que elas representam.



Dados obtidos em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo 2010**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=10&uf=00. Acesso em: 7 jul. 2022.

ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

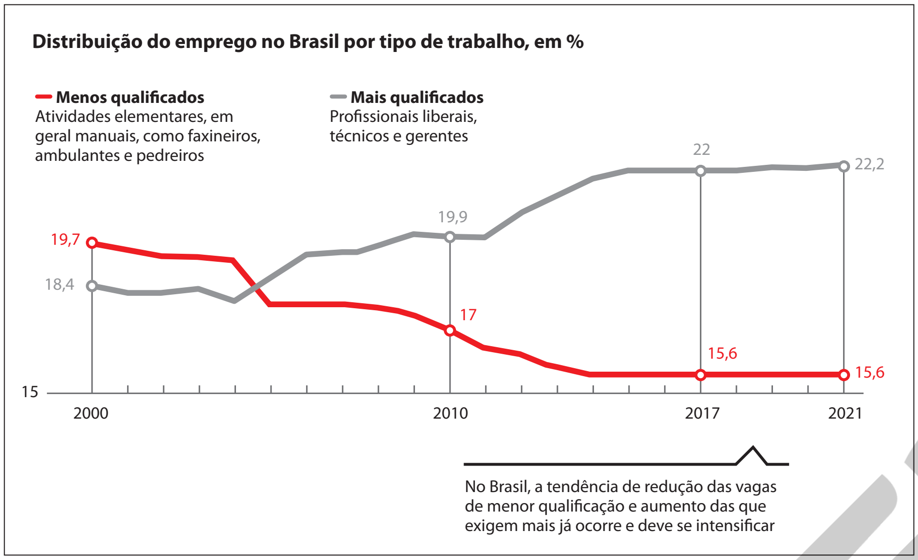
Observe que a coluna referente à região Sudeste não é proporcional às demais colunas. Por exemplo, com o compasso no gráfico, se adicionarmos a altura da coluna Brasil e a da coluna Sul, veremos que uma sobre a outra resulta quase na altura da coluna Sudeste. No entanto, a soma dos valores $22,43 + 48,58 = 71,01$ é diferente do valor da coluna Sudeste (86,92). Se o eixo vertical fosse graduado (não graduá-lo é um erro), a falta de proporcionalidade dificilmente ocorreria.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

- Uma inadequação que por vezes ocorre tanto em gráficos de colunas quanto em gráficos de linhas duplas é quando a graduação do eixo vertical não inicia do zero. No gráfico de linhas duplas, por exemplo, esse fato pode induzir o leitor a erros ao comparar os valores de cada linha em uma mesma vertical. Acompanhe no gráfico a seguir.

EDITORIA DE ARTE/FOLHAPRESS

Distribuição do emprego no Brasil por tipo de trabalho, em %



No Brasil, a tendência de redução das vagas de menor qualificação e aumento das que exigem mais já ocorre e deve se intensificar

Fonte: PERRIN, F. Automação vai mudar a carreira de 16 milhões de brasileiros até 2030. **Folha de S.Paulo**, São Paulo, 21 jan. 2018.

Observe que os valores do eixo vertical não começam no zero, mas no 15. O fato de a escala vertical iniciar no valor 15 faz com que em 2010, por exemplo, tenhamos a impressão de que a porcentagem de empregos mais qualificados (19,9) seja pouco mais do que o dobro (ou seja, 100%) da porcentagem de empregos menos qualificados (17). Mas isso não é verdade: 19,9 é apenas 17% maior do que 17, pois 19,9 : 17 ≃ 1,17.

Agora observe os valores de 2021. Calculando 22,2 : 15,6 ≃ 1,42. Isso significa que 22,2 é aproximadamente 42% maior do que 15,6. No entanto, no gráfico, a altura de 22,2 é 10 vezes maior do que a altura de 15,6, ou seja, 1 000% maior.

A compreensão da leitura que obtemos em um gráfico como esse pode nos induzir a conclusões equivocadas. Por isso, é preciso muita atenção na leitura.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Considerando o gráfico "Distribuição do emprego no Brasil por tipo de trabalho, em %" responda:

a) Em que ano os dois tipos de emprego representavam a mesma porcentagem? **a)** Em 2004.

b) Em 2000, o emprego menos qualificado era aproximadamente quantos por cento maior do que o emprego mais qualificado? **b)** 7%

Agora quem trabalha é você!

As atividades propostas podem ser respondidas em duplas, pois a discussão enriquece o aprendizado e amplia o repertório de estratégias de resolução dos estudantes.

No **item a**, os estudantes devem observar no gráfico de linhas o ano em que as linhas se cruzam, pois isso indica quando a distribuição dos tipos de empregos foi igual; isso ocorreu em 2004 (quatro marcações após 2000 e antes da quinta marcação).

No **item b**, considerando que no ano 2000 as porcentagens indicadas são 19,7% e 18,4%, temos que 19,7 é cerca de 7% maior do que 18,4 (pois 19,7 : 18,4 ≃ 1,07).

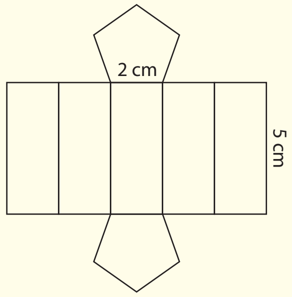
4. Estudando alguns sólidos

Habilidade da BNCC: **EF09MA19**.

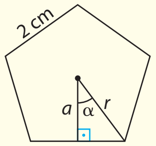
Esse tópico desenvolve a habilidade (EF09MA19), pois trata de expressões de cálculo da medida de volume de prismas retos e de cilindros retos.

Ao explorar as planificações indicadas, reforce a ideia do que é base dos prismas apresentados e como determinar a medida da altura deles.

Amplie esse tema explorando outros exemplos, como um prisma reto de base pentagonal (considerando que a base é um pentágono regular) e sua planificação:



Cálculo da medida da área de uma das bases (pentágono regular):



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

- Medida α do ângulo central:

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

- Cálculo da medida do apótema:

$$\text{tg } 72° = \frac{1}{a} \Rightarrow 3{,}0777 = \frac{1}{a}$$

$$a \simeq 0{,}32 \text{ cm}$$

- Cálculo da medida de área:

$$A_{\text{base}} = A_{\text{pentágono (regular)}} = p \cdot a$$

$$A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 2}{2} \cdot 0{,}32$$

$$A_{\text{base}} \simeq 1{,}6 \text{ cm}^2$$

A medida da área lateral corresponde à medida da área de 5 retângulos congruentes de lados medindo 2 cm por 5 cm.

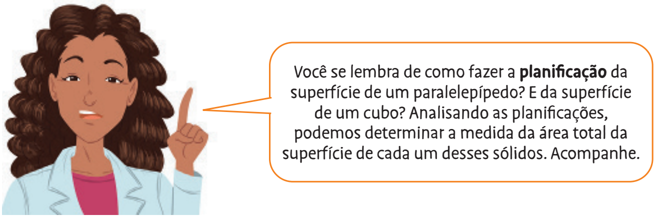
$$A_{\text{lateral}} = 5 \cdot 2 \cdot 5$$

$$A_{\text{lateral}} = 50 \text{ cm}^2$$

A medida da área total corresponde à medida da área da superfície do prisma pentagonal, ou seja, é a soma das medidas das áreas das duas bases com a medida da área lateral.

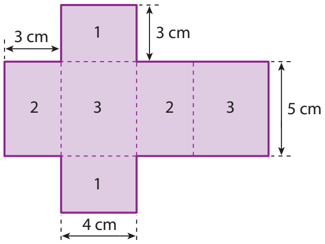
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 1{,}6 \text{ cm}^2 + 50 \text{ cm}^2 = 53{,}2 \text{ cm}^2$$

4 Estudando alguns sólidos



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Planificação da superfície de um paralelepípedo



Cálculo da medida *A* da área em centímetro quadrado:

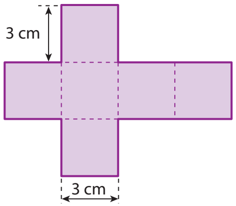
$$A = \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 4}^{\text{retângulo 1}} + \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}^{\text{retângulo 2}} + \overbrace{2 \cdot 4 \cdot 5}^{\text{retângulo 3}}$$

$$A = 24 + 30 + 40$$

$$A = 94$$

A área total da superfície do paralelepípedo mede 94 cm².

Planificação da superfície de um cubo



Cálculo da medida *A* da área em centímetro quadrado:

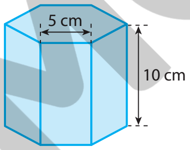
$$A = 6 \cdot \overbrace{3 \cdot 3}^{\text{quadrado}}$$

$$A = 54$$

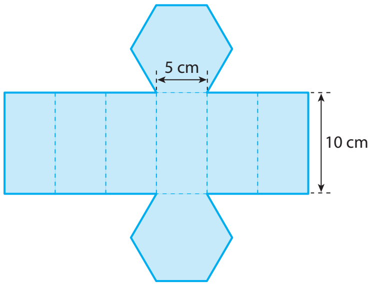
A área total da superfície do cubo mede 54 cm².

Do mesmo modo, podemos determinar a medida da área total da superfície de um prisma fazendo sua planificação. Observe.

Prisma



Planificação da superfície de um prisma



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

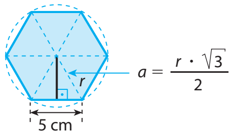
Cálculo da medida *A* da área em centímetro quadrado:

$$A = 6 \cdot \overbrace{10 \cdot 5}^{\textbf{retângulo}} + 2 \cdot A_{\text{hexágono}}$$

$$A = 300 + 2 \cdot 6 \cdot A_{\text{triângulo}}$$

$$A = 300 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = 300 + 75\sqrt{3}$$

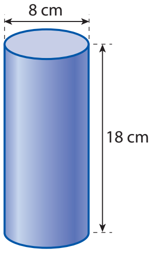


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

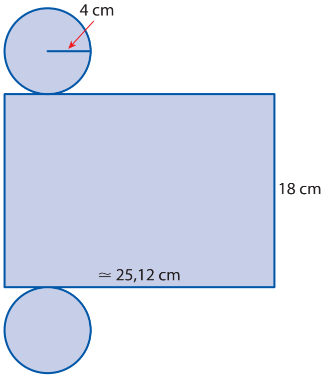
A área total da superfície do prisma mede $(300 + 75\sqrt{3})$ cm².

Vamos recorrer à planificação da superfície de um cilindro para determinar a medida da área total de sua superfície.

Cilindro



Planificação da superfície de um cilindro



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

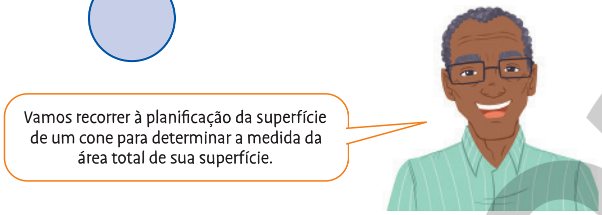
Cálculo da medida *A* da área em centímetro quadrado:

$$A \simeq 2 \cdot \overbrace{\pi \cdot 4^2}^{\textbf{círculo}} + \overbrace{18 \cdot 25{,}12}^{\textbf{retângulo}}$$

$$A \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16 + 452{,}16$$

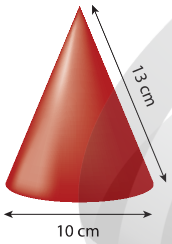
$$A \simeq 552{,}64$$

A área total da superfície do cilindro mede aproximadamente 552,64 cm².

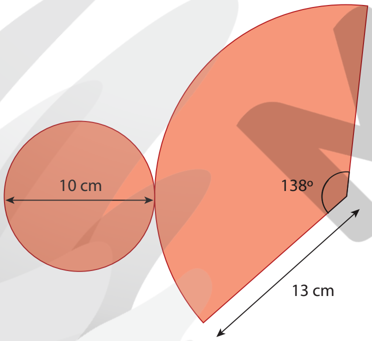


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Cone



Planificação da superfície de um cone



ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área do setor circular (A_{sc})

Aplicando regra de três:

$$\pi \cdot 13^2 \text{ ——— } A_{sc}$$

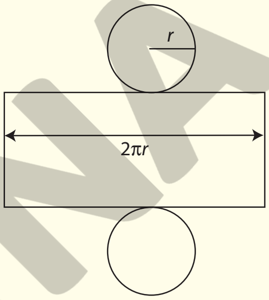
$$360° \text{ ——— } 138°$$

$$A_{sc} \simeq \frac{3{,}14 \cdot 169 \cdot 138}{360} \simeq 203$$

Estudando alguns sólidos

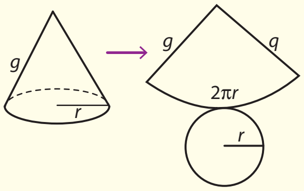
Se possível, leve para a sala de aula modelos de cilindros e de cones (retos) que possam ser desmontados e remontados para que os estudantes percebam os elementos da planificação de sua superfície.

Espera-se que eles percebam que a planificação da superfície de um cilindro reto é composta de dois círculos congruentes e de um retângulo de dimensões de medidas *h* (altura do cilindro) e $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base).



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Do mesmo modo, espera-se que observem que a planificação da superfície de um cone circular reto é composta do círculo da base e de um setor circular de raio de medida *g* (medida da geratriz do cone) e comprimento do arco de medida $2\pi r$ (medida do comprimento da circunferência da base).



Questione os estudantes sobre como seria a planificação da superfície esférica. Espera-se que eles compreendam que a superfície de uma esfera não pode ser planificada.

A medida do volume de prismas e cilindros retos

Explore a **situação 1** com os estudantes incentivando-os a indicar uma expressão para o cálculo da medida do volume do prisma. Em seguida, explore o fato de o prisma de base triangular apresentado ter um triângulo retângulo como base (pois $15^2 = 9^2 + 12^2$). Assim, a medida do volume desse prisma de base triangular é dada por:

$$V_{\text{Prisma}} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 10}{2} = 9 \cdot 6 \cdot 10$$

Logo, $V_{\text{Prisma}} = 540 \text{ cm}^2$.

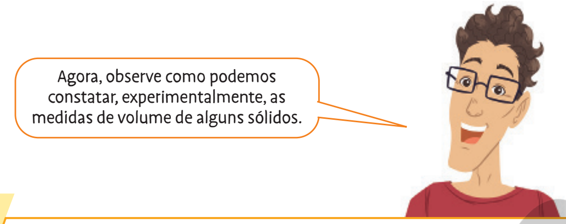
Cálculo da medida A da área em centímetro quadrado:

$$A \simeq \overbrace{\pi \cdot 5^2}^{\textbf{círculo}} + \overbrace{\frac{3{,}14 \cdot 169 \cdot 138}{360}}^{\textbf{setor circular}}$$

$$A \simeq 78{,}5 + 203 = 281{,}5$$

A área total da superfície do cone mede aproximadamente 281,5 cm².

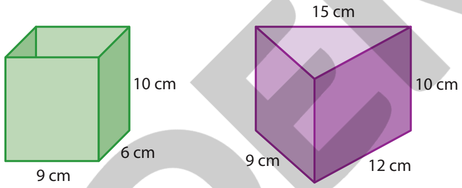
A medida do volume de prismas e cilindros retos



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 1

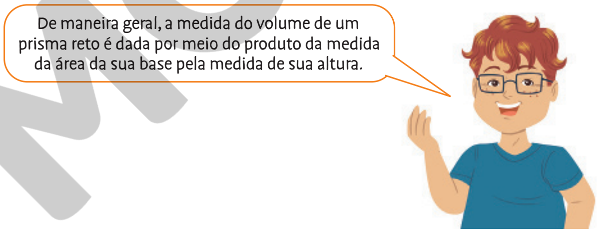
Em acrílico, construímos um modelo de prisma de base retangular e um modelo de prisma de base triangular, cujas dimensões internas estão indicadas nas figuras. Observe que eliminamos uma das faces, pois nesses modelos de prisma despejaremos areia até a borda.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Observe que os dois prismas têm as mesmas medidas de altura (10 cm) e de área da base (54 cm²).

Enchemos o prisma de base retangular com areia. Ao despejar totalmente a areia do prisma de base retangular no prisma de base triangular, verificamos que os dois têm a mesma medida de volume. Como já sabemos calcular a medida do volume do primeiro prisma ($V = 9 \cdot 6 \cdot 10$), concluímos que o volume do segundo prisma também mede 540 cm³.



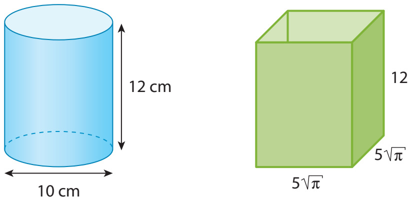
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

$$V_{\text{prisma reto}} = (\text{medida da área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

Situação 2

Para determinar a medida do volume de um cilindro reto, Emanuele fez o seguinte experimento. Ela providenciou dois recipientes de acrílico (sem as faces superiores), cujas dimensões internas estão representadas nas figuras a seguir, e encheu um deles com água. Depois, despejou completamente a água desse recipiente no outro e percebeu que a medida de volume de ambos são equivalentes.

Representações de um recipiente cilíndrico e de um prisma de base quadrada



ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ ARQUIVO DA EDITORA

Seja V_p a medida do volume do prisma utilizado por Emanuele. Como já estudamos, essa medida de volume é dada por:

$$V_p = (\text{medida da área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

$$V_p = (5\sqrt{\pi} \cdot 5\sqrt{\pi}) \cdot (12)$$

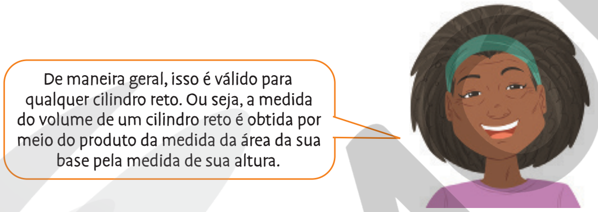
$$V_p = (5^2\pi) \cdot (12)$$

Como o volume do cilindro reto e do prisma reto utilizados por Emanuele têm a mesma medida de volume, podemos dizer que a medida V_c do volume do cilindro é:

$$V_c = V_p$$

$$V_c = (5^2\pi) \cdot (12)$$

Observando essa última expressão, podemos perceber que a medida do volume do cilindro utilizado por Emanuele é obtida por meio do produto da medida da área de sua base ($5^2\pi$) pela medida de sua altura (12).



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

$$V_{\text{cilindro}} = (\text{medida da área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

Se considerarmos um cilindro de raio cuja medida é *r* e cuja medida da altura é *h*, então, a medida do volume desse cilindro será dada por:

$$V_{\text{cilindro}} = (\pi r^2) \cdot (h) \quad \text{ou} \quad V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

A medida do volume de prismas e cilindros retos

Na **situação 2**, incentive os estudantes a comparar a medida do volume do cilindro com a do prisma de base quadrada; destaque que ambos têm a altura de mesma medida.

Se possível, podem ser confeccionados um prisma e um cilindro, ambos retos e com apenas uma das bases (de maneira que fiquem “abertos”), por meio da planificação deles e de maneira que tenham a mesma medida de altura e as figuras das bases sejam equivalentes. Com um material como confetes de papel, os estudantes podem repetir o experimento dessa situação a fim de verificar se a quantidade de confetes que cabe no cilindro é a mesma que cabe no prisma construído. Ressalte que as medidas empíricas são aproximadas e, portanto, deve-se considerar que poderão ocorrer erros de aproximação.

Alternativamente, pode-se utilizar as expressões do cálculo da medida de volumes para verificar a medida de volume de alguns recipientes. Por exemplo, com um recipiente cilíndrico, os estudantes medem o diâmetro do círculo da base dele e calculam a medida de sua área; depois, medem a altura e calculam a medida do volume do recipiente, em cm^3. Sabendo que $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}$, eles podem preencher o recipiente com água e, depois, utilizar um medidor graduado de volume para conferir se a medida de volume dada em cm^3 equivale, de fato, à medida, em litro. Novamente, destaque que as medições realizadas podem decorrer de aproximações e dependem da precisão dos instrumentos utilizados, bem como de sua correta aferição.

Para saber mais

Verifique se os estudantes conseguem mobilizar os conhecimentos sobre o cálculo da medida do volume de prismas retos e de cilindros retos, transpondo esses conhecimentos para a situação apresentada nessa situação.

Para resolver a **atividade 1** do **Agora é com você!**, deve-se considerar que a medida do volume da pirâmide será igual a um terço da medida do prisma considerado. Assim, como 1 500 : 3 = 500, a medida do volume procurado é 500 cm³.

A **atividade 2** resume a relação entre a medida do volume do prisma e a da pirâmide (ambas as figuras têm a mesma medida da altura e a mesma medida da área):

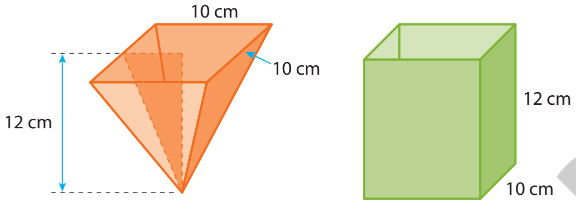
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

PARA SABER MAIS

Calculando a medida do volume de uma pirâmide

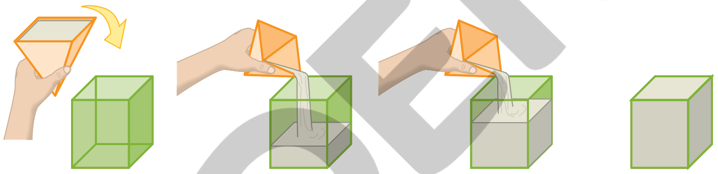
Em acrílico, construímos um modelo de pirâmide de base quadrada e um modelo de prisma de base quadrada, com base nas planificações das suas superfícies, cujas dimensões internas estão indicadas nas figuras a seguir. Observe que eliminamos uma das faces de cada um dos modelos para enchê-los com areia.

Representações de uma pirâmide de base quadrada e de um prisma de base quadrada



Observe que o prisma e a pirâmide têm as mesmas medidas de área da base e, ainda, têm as mesmas medidas de altura.

Enchendo a pirâmide de areia e despejando seu conteúdo no prisma, é possível repetir o procedimento exatamente três vezes, ou seja, para encher um prisma, precisamos do conteúdo de três pirâmides cujas medidas da área da base e da altura sejam as mesmas das respectivas medidas do prisma.



O volume da pirâmide corresponde, portanto, a um terço do volume do prisma. Assim, a medida V do volume da pirâmide é dada por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (10 \cdot 10 \cdot 12)$$

Logo, a medida do volume da pirâmide é 400 cm³.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se a medida do volume de um prisma é 1 500 cm³, qual é a medida do volume de uma pirâmide cujo polígono da base é equivalente ao polígono da base desse prisma e cuja medida da altura é igual à medida da altura do prisma? **1.** 500 cm³

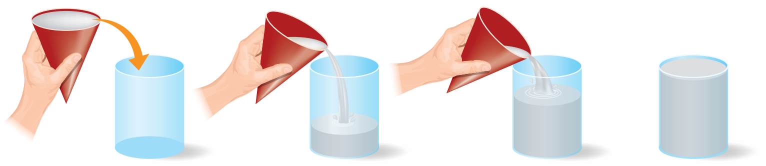
2 Com base no resultado do experimento, que relaciona a medida do volume da pirâmide e a medida do volume do prisma, escreva no caderno uma expressão para determinar a medida do volume de uma pirâmide qualquer. **2.** $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot$ (medida da área da base) · (medida da altura)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

46 Um recipiente cilíndrico tem raio que mede 5 cm e altura que mede 12 cm. Fábio possui um recipiente em forma de cone e cujas medidas do raio da base e da altura são respectivamente iguais às do recipiente cilíndrico. Fábio enche de água esse recipiente em forma de cone e, depois, despeja todo o conteúdo no recipiente cilíndrico, fazendo esse processo 3 vezes, como indica a figura.



ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a medida aproximada do volume do recipiente que tem forma de cone? **46.** $V = 314$ cm^3

47 (Urca-CE) Suponha que um grão de feijão ocupe, aproximadamente, o espaço de um prisma quadrangular regular de altura 1 cm e aresta da base 0,4 cm. Quantos grãos de feijão cabem, aproximadamente, num depósito do formato de um prisma quadrangular de altura 1 m e aresta da base 40 cm? **47.** Alternativa **d**.

a) 1 000 **b)** 10 000 **c)** 100 000 **d)** 1 000 000 **e)** 10 000 000

48 Um marceneiro vai produzir peças de madeira em formato de prisma de base triangular. Os lados da base do polígono medem 5 cm, 5 cm e 6 cm. A altura de cada peça mede 12 cm. Qual é a menor medida do volume de madeira necessária para produzir 10 dessas peças? **48.** No mínimo 1 440 cm^3.

49 Os Aparai e os Wayana são povos indígenas de língua *karib* que habitam a região de fronteira entre o Brasil, o Suriname e a Guiana Francesa. Em seu processo de cestaria eles produzem recipientes como os da fotografia.

DADEROT/CC0 1.0/WIKIMEDIA FOUNDATION - MEMORIAL DOS POVOS INDÍGENAS, BRASÍLIA

Produtos da cestaria dos Aparai e Wayana. (Fotografia de 2012.)

Considerando que um desses cestos possa ser associado a um cilindro cujo raio da base mede 21 cm e cuja altura mede 45 cm, determine a medida:

a) da área total da superfície desse cesto; **49. a)** Aproximadamente 7 319 cm^2.

b) do volume de um desses cestos. **49. b)** Aproximadamente 62 313 cm^3.

50 Em grupo de três colegas, reproduzam em uma cartolina os sólidos como os das situações **1** e **2** e da seção *Para saber mais* três experiências anteriores. Em seguida, usando confete de papel ou material similar, verifiquem as relações entre as medidas dos volumes. **50.** Montagem de sólidos.

(Usem tesouras com pontas arredondadas e as manuseiem com cuidado!)

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A medida do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência é $8\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. **1.** $4\sqrt{2}$ cm

2 A medida do perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é 42 m. Calcule a medida do perímetro do quadrado inscrito nessa circunferência. **2.** $28\sqrt{2}$ m

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 46** a **49** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Reserve uma aula para desenvolver o **exercício 50** ou instrua os estudantes a confeccionar em casa os sólidos geométricos que serão utilizados.

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios explora os principais conceitos estudados no capítulo. Espera-se que os estudantes mobilizem os conhecimentos construídos, percebendo se ainda têm alguma dificuldade.

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 3** a **6** e dos **exercícios 8** e **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Acompanhe uma possível resolução para o **exercício 7**.

a) O triângulo em branco é um triângulo retângulo de lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm. Assim, a medida da área da região verde, em cm², é dada por:

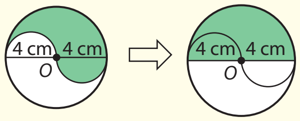
$$A_{\text{verde}} = A_{\text{semicírculo}} - A_{\text{triângulo}}$$

$$A_{\text{verde}} = \frac{\pi \cdot (2{,}5)^2}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$A_{\text{verde}} = \frac{3{,}14 \cdot 6{,}25}{2} - 6$$

$$A_{\text{verde}} = 3{,}8125$$

b) As regiões destacadas em branco e em verde são idênticas, ou seja, se sobrepõem. Assim, a parte verde completa um semicírculo de raio medindo 4 cm.



WLAMIR MIASIRO/
ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a medida da área verde, em cm², é dada por:

$$A_{\text{verde}} = A_{\text{semicírculo}}$$

$$A_{\text{verde}} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2}{2}$$

$$A_{\text{verde}} = 25{,}12$$

c) As duas partes brancas juntas formam um círculo cujo diâmetro mede 5,2 cm (raio 2,6 cm). Assim, a medida da área da parte verde, em cm², é dada por:

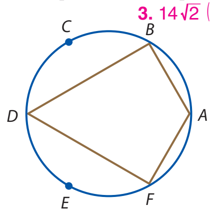
$$A_{\text{verde}} = A_{\text{quadrado}} - A_{\text{círculo}}$$

$$A_{\text{verde}} = 5{,}2^2 - 3{,}14 \cdot 2{,}6^2$$

$$A_{\text{verde}} = 27{,}04 - 21{,}2264$$

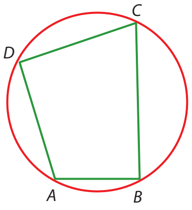
$$A_{\text{verde}} = 5{,}8136$$

3 A circunferência a seguir, cujo raio mede $7\sqrt{2}$ cm, está dividida em seis arcos congruentes. Calcule a medida do perímetro do polígono *ABDF*. **3.** $14\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$ cm

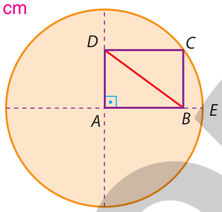


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 Na figura, $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ são lados de um quadrado inscrito, $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular inscrito, $\overline{BC}$ é lado de um triângulo equilátero inscrito. Sabe-se que $BC = 4\sqrt{3}$. Calcule *AB* e *AD*. **4.** $AB = 4$ e $AD = 4\sqrt{2}$.



5 Na figura a seguir, *ABCD* é um retângulo inscrito em um quadrante de um círculo. Calcule a medida de $\overline{BD}$, sendo $CD = 8$ cm e $BE = 2$ cm.
5. $BD = 10$ cm

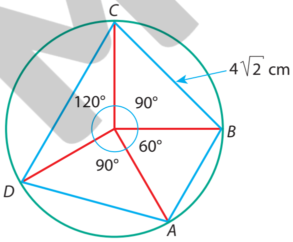


6 Considerando a figura a seguir, calcule:

a) a medida do raio da circunferência; **6. a)** 4 cm

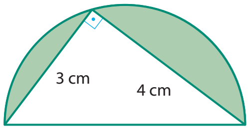
b) a medida de $\overline{AB}$; **6. b)** $AB = 4$ cm

c) a medida de $\overline{CD}$. **6. c)** $CD = 4\sqrt{3}$ cm

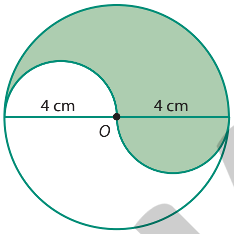


7 Considerando $\pi = 3{,}14$, determine a medida da área da figura pintada de verde. No item **b**, O é o centro da circunferência.

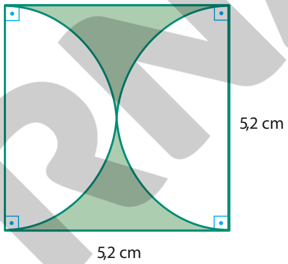
a) **7. a)** 3,8125 cm²



b) **7. b)** 25,12 cm²

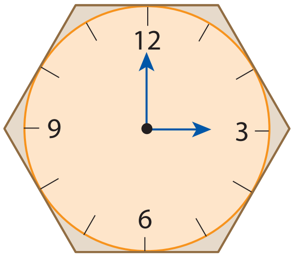


c) **7. c)** 5,8136 cm²



8 Qual é a diferença entre as medidas dos perímetros de dois quadrados, um circunscrito e outro inscrito em uma mesma circunferência cujo raio mede $\sqrt{2}$ cm? **8.** $8(\sqrt{2} - 1)$ cm

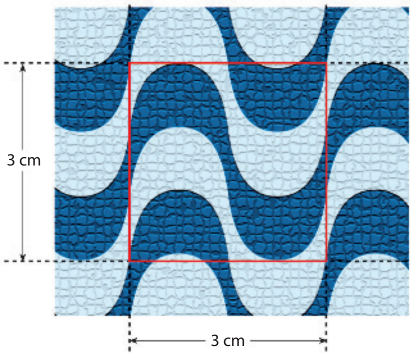
9 Raul deu de presente à sua mãe um relógio de parede com formato de hexágono regular, como na figura a seguir.



Determine a medida da área do mostrador circular desse relógio, sabendo que o hexágono regular circunscrito tem lado medindo 12 cm.
9. 108π cm²

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

10 Ao quadricular uma ilustração do calçadão de uma praia, Lucas notou que a área ocupada pelas pedras azul-escuras era maior que a ocupada pelas pedras azul-claras.

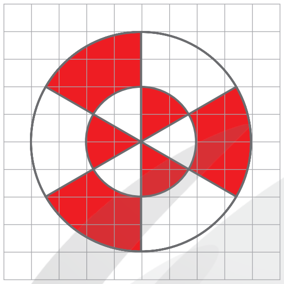


a) Faça a estimativa da medida da área, em centímetro quadrado, ocupada pelas pedras azul-escuras do quadrado em destaque na ilustração do calçadão. **10. a)** 6 cm^2

b) Considerando que a área estimada da parte azul-escura no quadrado seja igual à área de um círculo, faça um desenho de como ficaria um novo revestimento para esse calçadão com círculos azul-escuros. Indique as medidas em seu desenho.

10. b) Resposta pessoal; o círculo terá 1,38 cm de raio.

11 Calcule a medida da área aproximada da parte da figura pintada de vermelho, sabendo que o lado do quadradinho do quadriculado mede 0,5 cm. **11.** 6,28 cm^2



12 Uma folha de papel tem medidas 18 cm por 12 cm.

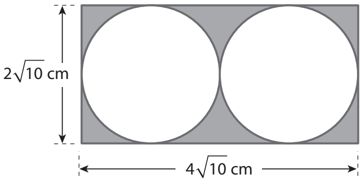
12. a) 6 círculos.

a) Qual é o maior número de círculos tangentes entre si com raio medindo 3 cm que é possível desenhar nessa folha?

b) Se esses círculos forem recortados, qual é a quantidade de aparas de papel, em centímetro quadrado, que restará? (Adote $\pi = 3{,}14$.)

12. b) 46,44 cm^2

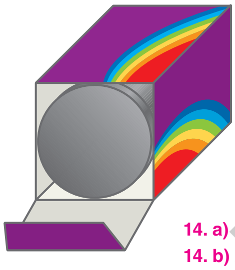
13 (Unifor-CE) Uma indústria utiliza as placas retangulares de alumínio mostradas na figura, nas quais toda a região sombreada, que está fora dos círculos, é desperdiçada.



Qual é a medida da área desperdiçada, em centímetro quadrado? (Considere $\pi = 3{,}1$.)

13. 17 cm^2

14 A situação ilustrada de uma caixa de biscoitos sugere um quadrado circunscrito a uma circunferência. Sabendo que o lado do quadrado mede 3,6 cm e que o comprimento da caixa mede 20 cm, efetue os cálculos pedidos a seguir.



14. a) 1,8 cm

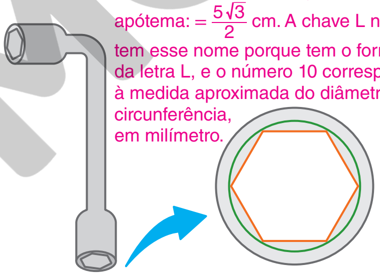
14. b) 259,2 cm^3

a) a medida do raio dessa circunferência;

b) a medida do volume da caixa de biscoitos;

c) a medida do volume aproximado da pilha de biscoitos dessa caixa. **14. c)** 203,5 cm^3

15 A ferramenta representada na figura é uma chave L número 10. Sabendo que a circunferência destacada em verde tem, na realidade, raio medindo 5 cm, calcule a medida do lado e do apótema do hexágono destacado na cor laranja. Explique por que essa ferramenta tem esse nome. **15.** Medida do lado: = 5 cm; medida do apótema: = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. A chave L número 10 tem esse nome porque tem o formato da letra L, e o número 10 corresponde à medida aproximada do diâmetro da circunferência, em milímetro.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 14**, basta os estudantes visualizarem que a medida do raio da circunferência é, de fato, metade da medida do lado desse quadrado. Amplie as discussões para questões de aumento ou diminuição da medida da área desse quadrado e dessa circunferência à medida que variamos as medidas do lado e do raio, respectivamente.

Exercícios complementares

Acompanhe uma possível resolução do **exercício 10**.

a) Considerando que, aproximadamente, $\frac{2}{3}$ do quadrado é composto de pedras azul-escuras e $\frac{1}{3}$ de pedras azul-claras, temos, em cm^2:

$A_{\text{quadrado}} = 3 \cdot 3 = 9$

Assim, a medida da área das pedras azul-escuras é 6 cm^2, pois:

$\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$

A medida estimada da área ocupada pelas pedras azul-escuras no quadrado é de 6 cm^2.

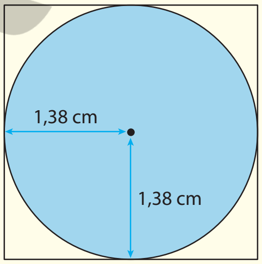
b) $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 1{,}91 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 1{,}38$

Assim, com $r = 1{,}38$ cm, uma representação possível é:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 11**, assim como em outros que pedem o cálculo da medida da área de parte de um mosaico, discuta com os estudantes a possibilidade de, mentalmente, reunirem as porções que constituem essa parte e, feito isso, compararem a parte composta com o todo. Nesse exercício, tal procedimento os leva a perceber que a área da superfície pintada de vermelho corresponde à metade do círculo. A medida da área do círculo, com $\pi = 3{,}14$, em cm^2, é:

$2^2 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$

Portanto, temos que a área em vermelho tem medida de 6,28 cm^2 (pois 12,56 : 2 = 6,28).

As resoluções dos **exercícios 12** a **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Verificando

Os testes desta seção são mais uma oportunidade para o estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos e mapas conceituais ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e que reflitam sobre algumas temáticas.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Para a resolução dos testes, considere $\pi = 3{,}14$.

1 Qual é a medida da área de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio medindo 12 cm? **1.** Alternativa **b**.

a) 144 cm^2
b) 288 cm^2
c) 452,16 cm^2
d) 904,32 cm^2

2 Um triângulo regular está inscrito em uma circunferência com 157 m de medida de comprimento. Qual é a medida do apótema desse triângulo? **2.** Alternativa **c**.

a) 25 m
b) 17,5 m
c) 12,5 m
d) 10 m

3 Qual é a medida do lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência que determina um círculo de medida da área igual a 113,04 m^2? **3.** Alternativa **a**.

a) 6 m
b) 12 m
c) 36 m
d) 113,04 m

4 Qual é a diferença entre a medida do lado de um hexágono regular e a do apótema de um triângulo regular, ambos inscritos na mesma circunferência de raio de medida r?

a) r
b) $\frac{r}{2}$
c) $\frac{r}{4}$
d) 0

4. Alternativa **b**.

5 Qual é a medida da área de uma coroa circular de raios maior e menor, respectivamente, medindo 5 m e 3 m? **5.** Alternativa **c**.

a) 25,12 m^2
b) 28,26 m^2
c) 50,24 m^2
d) 78,5 m^2

6 Quanto mede a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio medindo r? **6.** Alternativa **a**.

a) $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$
b) $3r^2\sqrt{3}$
c) $\frac{3r^2\sqrt{2}}{2}$
d) $3r\sqrt{3}$

7 Qual é a medida do volume de uma pirâmide de altura que mede 9 m cuja base é um quadrado inscrito em uma circunferência de raio com medida igual a 4 m? **7.** Alternativa **d**.

a) 10,7 m^3
b) 12 m^3
c) 48 m^3
d) 96 m^3

8 A pirâmide de Quéops, no Egito, mede 146 metros de altura, e cada lado da sua base mede 230 metros de comprimento. Qual é, aproximadamente, a medida do volume ocupado pela pirâmide? **8.** Alternativa **d**.

a) 11,1 mil metros cúbicos
b) 17,6 mil metros cúbicos
c) 1,6 milhão de metros cúbicos
d) 2,5 milhões de metros cúbicos

9 Quantos centímetros cúbicos de água cabem em uma taça cônica de altura medindo 10 cm e raio da circunferência na parte aberta medindo 3 cm? **9.** Alternativa **b**.

a) 31,4 cm^3
b) 94,2 cm^3
c) 282,6 cm^3
d) 314 cm^3

Organizando: **a)** Para os polígonos regulares destacados, inscritos em uma circunferência com raio de medida r, podemos calcular as medidas do lado (ℓ) e do apótema (a) em função de r. → Quadrado: $\ell = r\sqrt{2}$, $a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; Hexágono regular: $\ell = r$, $a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; Triângulo regular: $\ell = r\sqrt{3}$, $a = \frac{r}{2}$.

Organizando

b) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante cite situações que envolvam objetos como espelhos, revestimentos cerâmicos, bandeiras, painéis, placas de sinais de trânsito etc.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Quais são as relações algébricas das respectivas medidas dos lados, apótemas e raios da circunferência nos polígonos regulares inscritos destacados no capítulo?

b) Em quais situações do dia a dia podemos observar alguns polígonos regulares?

c) Há alguma sentença algébrica que relaciona a medida da área de qualquer polígono regular com as medidas do apótema e do perímetro? Qual? **c)** Sim. $A = p \cdot a$, em que p é a medida do semiperímetro e a é a medida do apótema.

d) Supondo uma sequência de polígonos regulares em que o número de lados cresça indefinidamente, quais aproximações (tendências) podemos fazer, com base na resposta da questão anterior, para obter a fórmula da medida da área de um círculo?

e) $\frac{V_{Cone}}{V_{Cilindro}} = \frac{1}{3}$

e) Dados um cone e um cilindro, ambos com as respectivas medidas da base e da altura iguais, qual é a razão entre as medidas de seus volumes?

d) A medida do semiperímetro aproxima-se de πr, a medida do apótema aproxima-se de r e a medida da área do polígono aproxima-se de πr^2. Assim, concluímos que a medida da área de um círculo é dada por $A = \pi r^2$.

DIVERSIFICANDO

Jogo do desenhe ou responda

Número de participantes: 2 jogadores

Material

- 20 cartas com figuras geométricas (polígono e seus elementos; circunferência e seus elementos – ângulo, mediatriz, bissetriz etc.), com ênfase em figuras estudadas nos capítulos **11** e **12** deste livro. As figuras devem estar identificadas corretamente.
- Um saquinho não transparente para guardar as cartas confeccionadas.
- Papel e lápis para esboçar as figuras e marcar os pontos.

Regras

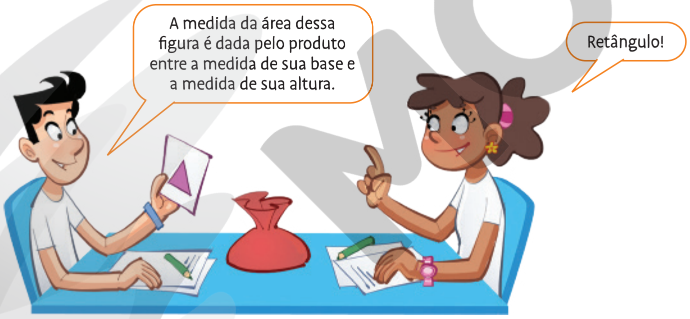
- Após o sorteio, o primeiro a jogar retira uma carta do saquinho, sem mostrá-la.
- O jogador que tira a carta deve dizer ao outro uma característica da figura para que ele tente adivinhá-la com um desenho ou uma resposta oral. Para cada carta, podem ser dadas até três dicas, uma a cada tentativa. Por exemplo, se a carta tiver um quadrado, o jogador poderá dar as seguintes dicas: “é um quadrilátero”, “tem ângulos opostos congruentes” e “tem todos os lados com medidas iguais”.
- Se um jogador der uma dica errada, perderá 2 pontos.
- Pontuação: ao acertar o nome ou o desenho na 1ª tentativa, o jogador ganha 3 pontos; na 2ª tentativa, ganha 2 pontos; e na 3ª, ganha 1 ponto.
- Após o acerto ou erro na 3ª tentativa, passa-se a vez.
- Vence aquele que completar primeiro 15 pontos. Caso nenhum jogador consiga atingir os 15 pontos, vence aquele que conseguir a maior pontuação.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Rafael deu uma dica errada e, segundo as regras, deve perder 2 pontos.

1 Observe o diálogo entre Rafael e Karina. De acordo com as regras, o que deverá acontecer com a pontuação de Rafael?



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Respostas possíveis: “Você pode encontrar um formato parecido na colmeia de abelhas”, ou “A soma das medidas dos ângulos internos é 720°”, ou “Minha figura tem seis lados de mesma medida”.

2 Se um jogador tirasse uma carta com um hexágono regular, que dica ele poderia dar sobre essa figura?

Diversificando

Organize os estudantes em duplas e estimule-os a jogar. Depois de algumas partidas, proponha às duplas que troquem de elementos para novas partidas. Então, sugira às duplas formadas que discutam as questões apresentadas no **Agora é com você!**.

Ao final, faça uma roda de conversa para que os estudantes exponham suas respostas, dúvidas, observações e conclusões.

Pode-se aproveitar o momento para discutir sobre ética, honestidade e espírito colaborativo.

LISTA DE SIGLAS

Covest-PE — Coordenadoria de Vestibulares e Concursos de Pernambuco

Enem — Exame Nacional do Ensino Médio

ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing

Etec-SP — Escola Técnica Estadual de São Paulo

FESPSP — Fundação Escola de Sociologia e Política de São Paulo

FEI-SP — Fundação Educacional Inaciana "Padre Sabóia de Medeiros"

FGV-SP — Fundação Getulio Vargas

Fuvest-SP — Fundação Universitária para o Vestibular

Mackenzie-SP — Universidade Presbiteriana Mackenzie

OM-ABC — Olimpíada de Matemática do Grande ABC

PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-Rio — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

UCS-RS — Universidade de Caxias do Sul

UCSal-BA — Universidade Católica do Salvador

Uece — Universidade Estadual do Ceará

UEL-PR — Universidade Estadual de Londrina

Ufes — Universidade Federal do Espírito Santo

UFPE — Universidade Federal de Pernambuco

UFPR — Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFU-MG — Universidade Federal de Uberlândia

Ulbra-RS — Universidade Luterana do Brasil

Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas

Unifor-CE — Universidade de Fortaleza

Unirio-RJ — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Unopar-PR — Universidade Unopar

Urca-CE — Universidade Regional do Cariri

USF-SP — Universidade São Francisco

Saresp — Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo

Vunesp — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ESTUDANTE

A seguir indicamos alguns livros para você. Faça uma boa leitura!

O fantástico mundo dos números: a Matemática do zero ao infinito.
Ian Stewart. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

Nesse livro, o autor mostra como os números podem ser divertidos e fascinantes e como estão integrados à história da humanidade. Com estrutura simples e direta, cada capítulo aborda um número, seguindo a ordem cronológica de seu surgimento na história da humanidade: 1,2,3, 4...; pi; v2; 1 059 463 e 43 252 003 274 489 856 000, que é o número de maneiras possíveis de rearranjar um cubo mágico.

A Rainha das Ciências: um Passeio Histórico Pelo Maravilhoso Mundo da Matemática.
Gilberto Geraldo Garbi. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

Esse livro é um relato de quatro mil anos de história da Matemática e apresenta uma diversidade de recursos: biografias, fatos históricos, quantidades impressionantes. Trata-se de Tales, Pitágoras, Platão, Euclides, Arquimedes e outros matemáticos famosos. O livro também traz, em um capítulo especial, mulheres importantes na história da Matemática, como Hipácia, madame du Châtelet, Sophie Germain, Sofia Kovalevskaia, Amalie Emmy Noether fazendo uma discussão sobre a importância do papel das mulheres no desenvolvimento das ciências.

Eu e os outros.

Maria Helena Pires Martins: São Paulo: Moderna, 2018.

O livro trata sobre regras e a importância de discutir esse assunto para viabilizar uma convivência harmoniosa em sociedade. Explora o porquê de algumas regras existirem, se elas são válidas para todos, se todas têm o mesmo valor. Ao trabalhar questões como liberdade e responsabilidade, o livro possibilita o respeito para com as pessoas e consigo mesmo.

Jogos de Matemática e de raciocínio lógico.

Juan Diego S. Torres. Petrópolis: Vozes, 2012.

O livro apresenta 350 jogos e 104 citações matemáticas com o objetivo de divertir, entreter, aprimorar a forma de raciocinar, de analisar, de classificar, de ordenar, de processar informações e de construir soluções para determinadas situações. Trata-se de uma obra que envolve o leitor para aprender brincando.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

AABOE, A. **Episódios da história antiga da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Essa obra está dividida em 4 capítulos. O primeiro é sobre o sistema numérico e a aritmética na Babilônia. O segundo é sobre a matemática desenvolvida na Grécia em dois momentos: a matemática antes e depois de Euclides, com as suas contribuições para a construção do pentágono regular. O penúltimo é sobre o trabalho de Arquimedes, como as construções de polígonos regulares, a trissecção do ângulo e a construção do heptágono regular. No último, conhecemos a tabela trigonométrica de Ptolomeu.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2001.

A obra convida a descobrir e criar padrões, particularmente no campo da Geometria euclidiana, relativos à pavimentação de superfícies planas.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM/IME - USP, 2004.

A autora disserta sobre a importância de trabalhar com jogos nas aulas de Matemática. Apresenta ainda alguns exemplos de jogos e como fazer a avaliação dos estudantes.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

Edição dividida em 24 capítulos que contemplam desde os vestígios matemáticos encontrados nas culturas primitivas até as tendências recentes e perspectivas futuras para a matemática. Apresenta uma cobertura atualizada de tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como a teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através de Atividades Desplugadas na Educação Básica**. 2017. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil, 2017. (Tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação). Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 25 abr. 2022.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos da Geometria**: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

Apresenta um estudo axiomático da Geometria inspirado nas ideias de David Hilbert e em cursos ministrados em universidades.

CENTURION, M. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

A obra baseia-se na ideia de que o estudante constrói seu próprio conhecimento por meio de suas ações e problematizações. Aborda as principais dúvidas tanto do estudante de pedagogia quanto do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de artigos relacionados a diferentes temáticas relacionadas com o ensino de Álgebra, como equações, expressões, resolução de problemas e uso da calculadora.

CRESPO, A. A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Com uma linguagem objetiva, esse livro traz uma abordagem introdutória de Estatística.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

Abordando a resolução de problemas matemáticos e sua importância no ensino, esse livro representa uma valiosa contribuição para a melhoria da prática de educação matemática. Propõe uma discussão dos fatores que atuam de forma negativa no aprendizado, por meio da classificação dos tipos de problemas e das etapas envolvidas na resolução.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 3. ed. São Carlos: Edufsc, 2021.

Esse livro é uma introdução à teoria dos números. Apresenta um estudo da divisibilidade relacionada aos números naturais e, depois, ampliada para os números inteiros. Apresenta, também, o desenvolvimento de algumas partes da análise matemática como pré-requisito para o estudo da teoria da representação decimal dos números reais.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Apresentado de forma cronológica, o livro inicia com uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HOUAISS, A. **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

Dicionário da Língua Portuguesa.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.

Livro sobre a história dos sistemas de numeração de diferentes civilizações desde a pré-história, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na Matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de 22 artigos de especialistas em educação matemática que poderá ajudar os professores de Matemática a lidar com a resolução de problemas. Os 19 primeiros artigos abordam a resolução de problemas por variados ângulos, sempre com a preocupação de não fugir da realidade da sala de aula. O vigésimo e o vigésimo primeiro artigos se ocupam de medições. O último é uma bibliografia comentada, muito útil para orientar o leitor na busca de mais material sobre o assunto.

LIMA, A. C. P.; MAGALHÃES, M. N. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2001.

Voltado a estudantes de cursos superiores, esse livro apresenta uma introdução à Probabilidade e à Estatística.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria:** comprimento, área, volume e semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. (Coleção do professor de Matemática).

Nesse livro o autor selecionou curiosidades históricas que revelam que a determinação de áreas e volumes está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do homem. Sua opção por introduzir a Geometria situando-a no contexto histórico do seu surgimento, torna o livro mais fascinante e facilita o estudo da noção de medida em geometria sob aspectos uni, bi e tridimensional, ou seja, a medida de segmentos de reta (comprimento), de figuras planas (área) e de figuras sólidas (volume).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 2005.

Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Merece destaque o capítulo que trata do desenvolvimento do pensar geométrico sob a perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual se pode compreender que um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente definidas para o estudo de Geometria, baseadas na problematização, é essencial para que os estudantes desenvolvam o pensar geométrico.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

Esse livro considera a Álgebra e a Aritmética como duas faces da mesma atividade, lidando com relações quantitativas e explorando a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra. Diante disso, busca identificar de que modo isso sugere mudanças na educação matemática escolar.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Nesse livro, são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Apresenta um olhar crítico de como a história da Matemática tem sido contada ao longo do tempo.

RUSSELL, M. K.; AIRASIAN, P. W. **Avaliação em sala de aula**: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.

Esse livro apresenta a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem. Apresenta ferramentas e abordagens de avaliação que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM/IME - USP, 1996.

Apresenta uma reflexão sobre ensino de Álgebra com propostas de atividades.

SOUZA, E. R. *et al*. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM/IME - USP, 1997.

Apresenta diferentes atividades que trabalham com a construção do *tangram* com régua e compasso, semelhança dos triângulos do *tangram*, entre outros temas.

TINOCO, L. A. A. *et.al.* **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar... 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ/Projeto Fundão, 2011.

Nesse livro são apresentadas atividades que exploram os papéis da Álgebra na Escola Básica e suas possíveis abordagens, para propiciar uma aprendizagem significativa do tema e a construção do sentido do símbolo pelos estudantes.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de Matemática**: como dois e dois – a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.

Esse livro traz atividades que possibilitam despertar a intuição matemática, relacionando-as à teoria formal da Matemática.

ISBN 978-85-16-13576-8

9 788516 135768